Задача. Пусть в лагранжиан L входят высшие производные:

$$L = L(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(k)});$$

$$S[\gamma] = \int\limits_{\gamma} L(t, x, \ldots, x^{(k)})\, dt.$$

Доказать, что для экстремалей функционала $S[\gamma]$ имеем уравнение Эйлера — Лагранжа вида

$$\frac{\delta S}{\delta x} = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} - \ldots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\frac{\partial L}{\partial x^{(k)}} = 0.$$

§ 32. Законы сохранения

1. Группы преобразований, сохраняющих вариационную задачу. Полученному в предыдущем параграфе закону сохранения импульса можно придать более удобную инвариантную форму, используя однопараметрические группы преобразований (см. § 23).

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана (локальная) однопараметрическая группа локальных преобразований S_τ, $-\infty < \tau < \infty$, обладающая следующими свойствами:

1. Для любой точки P найдется число $\tau_0 > 0$ и окрестность U точки P в $\mathbb{R}^n$, где преобразование S_τ определено (и гладко) при $|\tau| < \tau_0$:

$$S_\tau : U \to \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

2. $S_0 = 1$ (тождественное преобразование),

$$S_{\tau_1+\tau_2} = S_{\tau_1} \circ S_{\tau_2}, \quad S_{-\tau} = S_\tau^{-1} \tag{2}$$

(всюду, где все эти отображения определены).

Напомним, что с каждой локальной однопараметрической группой связывается векторное поле, касающееся траекторий $S_\tau(x)$:

$$(X^i) = X(x) = \frac{d}{d\tau} S_\tau(x)\Big|_{\tau=0}. \tag{3}$$

Векторное поле (X^i) определяет группу S_τ согласно теореме существования и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$, где (X^i) отличен от нуля, найдется окрестность U этой точки и координаты $y^1, \ldots, y^n$ в области U такие, что преобразование S_τ при малых τ имеет вид

$$S_\tau(y^1, \ldots, y^n) = (y^1 + \tau, y^2, \ldots, y^n). \tag{4}$$

Именно такую форму теоремы существования решений мы будем использовать далее.

Определение 1. Говорят, что однопараметрическая группа преобразований S_τ сохраняет лагранжиан $L(x, \xi, t)$, если

$$\frac{d}{d\tau} L(S_\tau(x), \quad S_{\tau *}\xi, t)=0, \tag{5}$$

где $S_{\tau *}$ — отображение касательных пространств (см. § 22).

Вычисляя производную по τ в (5) при $\tau=0$, получаем следующее соотношение:

$$\left.\frac{dL}{d\tau}\right|_{\tau=0} = X^i \frac{\partial L}{\partial x^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \xi^j \frac{\partial L}{\partial \xi^i} = 0 \tag{6}$$

(производная Ли функции $L(x, \xi, t)$ вдоль поля X^i равна нулю). Это и есть условие сохранения лагранжиана относительно группы преобразований S_τ.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Если однопараметрическая группа преобразований S_τ сохраняет лагранжиан L, то имеет место закон сохранения компоненты импульса вдоль поля $X=(X^i)$:*

$$\frac{d}{dt}\left(X^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{d}{dt}(X^i p_i) = 0, \tag{7}$$

где $X(x) = \frac{d}{d\tau} S_\tau(x)|_{\tau=0}$.

Доказательство. Рассмотрим точку $x \in \mathbb{R}^n$, в которой $X(x) \neq 0$, и такую ее окрестность U, что в ней существуют координаты $(y^1, \ldots, y^n)$, в которых S_τ записывается указанным выше образом: $S_\tau(y^1, \ldots, y^n) = (y^1+\tau, y^2, \ldots, y^n)$. В этих координатах имеем

$$\frac{\partial L(y, \dot{y})}{\partial y^1} \equiv 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^1}\right)^{\cdot} = 0.$$

Однако единичный вектор вдоль оси y^1 — это и есть векторное поле X. Поэтому в указанных координатах $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^1} = X^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$. Теорема доказана.

2. Некоторые примеры. Применение законов сохранения.

Пример 1. Релятивистская (свободная) частица ненулевой массы $m>0$ определяется в пространстве Минковского с координатами (x^0, x^1, x^2, x^3), $x^0=ct$, одним из двух функционалов (действий) на времениподобных кривых:

$$S_1 = \frac{mc}{2}\int \langle \dot{x}, \dot{x}\rangle\, d\tau, \quad \langle \dot{x}, \dot{x}\rangle = (\dot{x}^0)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} (\dot{x}^\alpha)^2; \tag{8}$$

$$S_2 = -mcl = -mc\int \sqrt{\langle \dot{x}, \dot{x}\rangle}\, d\tau = -mc\int dl. \tag{9}$$

Мировые линии массивных частиц в пространстве $\mathbb{R}^4_{1,3}$ являются экстремалями функционалов S_1 или S_2 (*релятивистский принцип наименьшего действия*). Легко проверить (как и в § 31), что экстремали этих двух функционалов совпадают. Как мы увидим, действие S_2 удобно при сопоставлении с классической механикой.

В случае (9) в качестве τ можно взять произвольный параметр, обычно он выбирается в виде $\tau = t = x^0/c$.

При такой параметризации имеем

$$S_2 = -mcl = -mc^2 \int \sqrt{1 - \left(\frac{w}{c}\right)^2}\, dt, \tag{10}$$

$$w^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

($w = |w^\alpha|$ — трехмерная скорость, l/c — собственное время). Следуя общим правилам, пишем $S_2 = \int L\, dt$, где $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}$; заметим, что лагранжиан L записан в трехмерной форме. Энергия и импульс для такого лагранжиана имеют вид

$$E = pw - L = \dot{x}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}, \tag{11}$$

$$p_\alpha = \frac{mw^\alpha}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}. \tag{12}$$

При $w/c \to 0$ имеем

$$E \sim mc^2 \left(1 + \frac{w^2}{2c^2} + \dots\right),$$

$$p_\alpha \sim mw^\alpha (1 + \dots),$$

т. е. для импульса получаем в первом приближении классическое выражение

$$p_\alpha \approx mw_\alpha \tag{13}$$

(см. § 31), и для энергии — с точностью до постоянной mc^2 — классическое выражение

$$E \approx mc^2 + \frac{mw^2}{2}. \tag{14}$$

Кроме того, имеет место тождество

$$E^2 - c^2p^2 = m^2c^4, \quad E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{15}$$

Если $E > 0$, то точки (E, cp) пробегают трехмерное пространство

Лобачевского (массовую поверхность) в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^4$ с координатами E, cp.

В рамках этого трехмерного формализма энергия и импульс неравноправны, время — выделенная координата.

Обратимся к функционалу действия $S_1 = \frac{mc}{2}\int\left\langle \frac{dx}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}\right\rangle d\tau$. В силу результатов предыдущего параграфа параметр экстремалей здесь натуральный (закон сохранения формальной «энергии»). Определим 4-импульс $\tilde{p}_i = (\tilde{p}_0, \tilde{p}_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$, формулой

$$\tilde{p}_i = \frac{\partial L}{\partial x'^i}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad \text{где} \quad x'^i = \frac{dx^i}{d\tau}.$$

Получаем

$$\tilde{p}_0 = \frac{\partial L}{\partial x'^0} = mcx'^0, \quad \tilde{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial x'^\alpha} = -mcx'^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Если поднять индекс ковектора $\tilde{p}_i$ в метрике Минковского, то получим вектор

$$\tilde{p}^i = mcx'^i, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Поскольку вдоль экстремалей функционала S_1 параметр пробегания натуральный, то

$$dl = \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}\,dt, \quad x'^i = \frac{dx^i}{dl},$$

$$\tilde{p}^0 = mcx'^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} = E, \tag{16}$$

$$\tilde{p}^\alpha = mcx'^\alpha = mc\frac{dx^\alpha}{dt}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} = \frac{mcw^\alpha}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} = cp^\alpha.$$

Выводы. 1) *4-импульс $\tilde{p}^i$ связан с трехмерными энергией и импульсом соотношениями*

$$\tilde{p}^0 = E, \quad \tilde{p}^\alpha = cp^\alpha; \tag{17}$$

4-импульс называют также вектором энергии-импульса.

2) *При лоренцевых преобразованиях вектор энергии-импульса (E, cp) преобразуется как 4-вектор; 4-импульсы массивных частиц лежат на массовой поверхности, имеющей геометрию Лобачевского:*

$$E^2 - c^2p^2 = (\tilde{p}^0)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3}(\tilde{p}^\alpha)^2 = m^2c^4. \tag{18}$$

В частности, для перехода в равномерно движущуюся со скоростью v систему координат (вдоль оси x^1) имеем

$$(E,\ cp) \to (E',\ cp'),$$

где

$$E' = \frac{E + (cp)\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad E' = \frac{E + pv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$
$$cp_1' = \frac{E\frac{v}{c} + cp}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad p_1' = \frac{\frac{Ev}{c^2} + p}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad p_2' = p_2,\quad p_3' = p_3. \tag{19}$$

При $v/c \to 0$ получаем: $E' = E + pv + \text{const}$, $p' = p + \text{const}$.

Пример 2. Основным постулатом общей теории относительности является тезис или гипотеза (Эйнштейна): гравитационное поле — это не что иное, как метрика g_{ij} на 4-мерном пространстве-времени (метрика сигнатуры $(+---)$ в каждой точке). При отсутствии всех других сил пробная частица в гравитационном поле любой массы $m > 0$ движется по времениподобным геодезическим, определяемым действием

$$S_1 = \frac{mc}{2}\int \langle \dot{x},\ \dot{x}\rangle\, d\tau. \tag{20}$$

Частица массы $m = 0$ движется по изотропным геодезическим, вдоль которых $\langle \dot{x},\ \dot{x}\rangle = 0$.

Слабое поле определяется классическим гравитационным потенциалом $\varphi(x^0, x)$, $x^0 = ct$. Оно представляет собой метрику, формально разложенную в ряд по $1/c$:

$$g_{ab} = g_{ab}^{(0)} + c^{-2}g_{ab}^{(2)} + O\left(\frac{1}{c^3}\right),\quad g_{00}^{(2)} = 2\varphi(x^0,\ x), \tag{21}$$

где $g_{ab}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ — метрика Минковского и члены порядка $1/c$ отсутствуют.

Определение 2. Времениподобная геодезическая $x^a = x^a(t)$, $t = \frac{x^0}{c}$, в слабом поле называется *медленной*, если $\frac{dx^\alpha}{dt} \ll c$.

Для натурального параметра (собственного времени) медленной геодезической в слабом поле будем иметь

$$d\tau = \frac{dl}{c} = \sqrt{\frac{1}{c^2}\, g_{ab}\frac{dx^a}{dt}\frac{dx^b}{dt}}\, dt \qquad \left(t = \frac{x^0}{c}\right)$$

или
$$d\tau = \left[1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right] dt. \tag{22}$$

Поэтому в уравнении геодезической
$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{d\tau}\frac{dx^c}{d\tau} = 0,$$

где параметр пробегания натуральный, можно с точностью до $O\left(\frac{1}{c^2}\right)$ заменить $d\tau$ на dt.

Утверждение. *Уравнение медленных геодезических в слабом поле имеет вид*
$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} + O\left(\frac{1}{c}\right), \tag{23}$$

т. е. совпадает с уравнением Ньютона для частицы в классическом гравитационном поле с потенциалом φ.

Доказательство. Для символов Кристоффеля, вычисляемых по формуле
$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}\left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{cd}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d}\right),$$

будем иметь: 1) производные вида $\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^0} = \frac{1}{c}\frac{\partial g_{ab}}{\partial t}$ имеют порядок $O\left(\frac{1}{c^3}\right)$ в силу (21) (метрика $g^{(0)}_{ab}$ постоянна, величина t считается конечной); 2) производные вида $\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ имеют порядок $O\left(\frac{1}{c^2}\right)$ (величины x^α считаются конечными). Поэтому из слагаемых с символами Кристоффеля в уравнении геодезических максимальный по порядку величины член — это $\Gamma^\alpha_{00}\dot{x}^0\dot{x}^0 = \Gamma^\alpha_{00}c^2 + O\left(\frac{1}{c}\right)$. Для Γ^α_{00} будем иметь
$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2}g^{\alpha\alpha}\left(-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}\right) + O\left(\frac{1}{c^3}\right) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} + O\left(\frac{1}{c^3}\right),$$
$$\alpha = 1, 2, 3.$$

Отсюда вытекает требуемое утверждение.

Пример 3. Система из n классических частиц с парным взаимодействием описывается лагранжианом (в пространстве $\mathbb{R}^{3n}$)
$$L = \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\dot{x}_i^2}{2} - U(x_1, \ldots, x_n), \quad x_i = (x_i^1, x_i^2, x_i^3), \tag{24}$$

где $U = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V(x_i, x_j)$.

Мы предположим, что эта система трансляционно инвариантна. Другими словами, при преобразованиях

$$x_i \to x_i + \xi, \quad \xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3), \tag{25}$$

лагранжиан не меняется: $L \to L$. Для этого достаточно, чтобы V была функцией от разности аргументов:

$$V(x_i, x_j) = V(x_i - x_j). \tag{26}$$

Тогда из закона сохранения импульса следует, что *полный импульс сохраняется*:

$$P_{\text{полн}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i, \qquad \frac{dP_{\text{полн}}}{dt} = 0. \tag{27}$$

Доказательство. Мы имеем три группы S_τ^α $(\alpha = 1, 2, 3)$, действующие в $\mathbb{R}^{3n}$ по правилу

$$S_\tau^\alpha\colon\ x_i^\alpha \to x_i^\alpha + \tau, \quad x_i^\beta \to x_i^\beta \text{ при } \beta \neq \alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad \beta = 1, 2, 3. \tag{28}$$

Векторные поля $X^{(\alpha)} = \frac{d}{d\tau} S_\tau^\alpha(x)\big|_{\tau=0}$ имеют вид

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= (1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots, 1, 0, 0), \\ X^{(2)} &= (0, 1, 0, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0), \\ X^{(3)} &= (0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots, 0, 0, 1). \end{aligned} \tag{29}$$

Получается три закона сохранения:

$$P_{\text{полн}, \alpha} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

согласно общей теореме 1.

Рассмотрим случай $n = 2$, $L = m_1(\dot{x}_1)^2 + m_2(\dot{x}_2)^2 - 2V(x_1 - x_2)$. Перейдем к равномерно движущейся системе координат, в которой $P_{\text{полн}} = 0$. Тогда имеем

$$m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = 0. \tag{30}$$

Выберем в качестве начала отсчета центр масс; тогда $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$. Следовательно,

$$x_2 = -\frac{m_1x_1}{m_2}, \quad V(x_1 - x_2) = V\left(x_1 + \frac{m_1}{m_2}x_1\right).$$

Уравнения Ньютона имеют вид

$$m_1\ddot{x}_1^\alpha = -\frac{\partial V(x_1 - x_2)}{\partial x_1^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{31}$$

Пусть $m^* = m_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$, $U(x_1) = V\left(x_1 + \frac{m_1}{m_2}x_1\right)$. Из (31) следует уравнение (в системе, связанной с центром масс)

$$m^*\ddot{x}_1^\alpha = -\frac{\partial U(x_1)}{\partial x_1^\alpha}. \tag{32}$$

Итак, имеет место

Теорема 2. *Задача о движении двух частиц с трансляционно инвариантным потенциалом в системе центра масс эквивалентна задаче о движении одной частицы с приведенной массой* $m^* = m_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$ *в поле с потенциалом* $U(x_1) = V(x_1 - x_2)$, *где* $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$.

Итак, группа трансляций приводит к сохранению полного импульса и сведению двухчастичной задачи к одночастичной.

Пример 4. Перейдем теперь к использованию группы вращений $SO(3)$.

Определения 3. Лагранжиан $L(x, \dot{x})$ называется *сферически симметричным*, если он инвариантен относительно всех вращений в $\mathbb{R}^3$.

В группе $SO(3)$ мы имеем три различных однопараметрических подгруппы:

1) вращения вокруг оси x на угол $\varphi\left(S_\varphi^{(x)}\right)$;
2) вращения вокруг оси y на угол $\varphi\left(S_\varphi^{(y)}\right)$;
3) вращения вокруг оси z на угол $\varphi\left(S_\varphi^{(z)}\right)$.

Соответствующие векторные поля в $\mathbb{R}^3$ — это найденные в § 24, п. 3 линейные векторные поля L_x, L_y, L_z:

$$L_x = (0, -z, y), \quad L_y = (z, 0, -x), \quad L_z = (-y, x, 0). \tag{33}$$

Для сферически симметричных лагранжианов согласно общей теореме 1 имеются законы сохранения следующих величин:

$$M_x = L_x^\alpha p_\alpha, \quad M_y = L_y^\alpha p_\alpha, \quad M_z = L_z^\alpha p_\alpha$$

(угловые компоненты импульса для вращения вокруг осей x, y, z). Явный вид их таков:

$$M_x = yp_z - zp_y, \quad M_y = zp_x - xp_z, \quad M_z = xp_y - yp_x; \tag{34}$$

$$(M_x)^\cdot = (M_y)^\cdot = (M_z)^\cdot = 0.$$

Таким образом, сохраняется вектор

$$M = (M_x, M_y, M_z) = [x, p], \tag{35}$$

где $x=(x, y, z)$. Вектор $[x, p]$ называется *моментом импульса*.

Пусть имеется система двух частиц, инвариантная относительно полной группы движений евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. В этом случае $L=m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2-U(x_1-x_2)$, причем $U(x_1-x_2)=U(|x_1-x_2|)=U(r)$. Действительно, из инвариантности относительно всех вращений и отражений следует, что $U(x_1-x_2)$ есть функция от $r=|x_1-x_2|$. Используя группу трансляций (результат примера 3), перейдем к задаче об одной частице с массой $m^*=m$ в поле $U(r)$ с группой симметрии $SO(3)$. При этом имеет силу закон сохранения момента $M=[x, p]$. Поскольку U не зависит от времени, то сохраняется также энергия $E=pv-L=\frac{mv^2}{2}+U(r), v=\dot{x}$.

Лемма 1. *Движение частицы происходит в плоскости, натянутой на векторы x и p.*

Доказательство. Так как момент сохраняется и $\dot{x}=p/m$, то направление вектора $[x, \dot{x}]=M/m$ неизменно. Это направление ортогонально плоскости (x, p). Лемма доказана.

Выберем направление M за ось z и перейдем к цилиндрическим координатам (z, r, φ). Получим

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-U(r)=m\left(\frac{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}{2}-U(r)\right),$$

$$p_\varphi=M=mr^2\dot{\varphi}=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\text{const}, \quad \dot{\varphi}=\frac{M}{mr^2}, \tag{36}$$

$$E=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+\frac{M^2}{m^2r^2}\right)+U(r),$$

или

$$E=\frac{m\dot{r}^2}{2}+U_{\text{эфф}}(r), \tag{37}$$

где $U_{\text{эфф}}(r)=U(r)+\frac{M^2}{2mr^2}$.

Окончательный вывод таков: движение частицы сводится к одномерной задаче (по r) с потенциалом $U_{\text{эфф}}(r)$; решение дается формулами

$$\dot{r}^2=\frac{2}{m}(E-U_{\text{эфф}}),$$

$$t-t_0=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U_{\text{эфф}})}}, \tag{38}$$

$$\varphi-\varphi_0=\int\frac{M\,dt}{mr^2}.$$

Исключая t, можно получить уравнение орбиты $\varphi=\varphi(r)$ или $r=r(\varphi)$. В двух важных известных случаях $U=\alpha/r$ и $U=\alpha r^2$ целая область пространства $(x, \dot{x})$ заполнена замкнутыми орбитами:

$$\text{область } E<0 \quad \text{для} \quad U=\frac{\alpha}{r} \text{ с } \alpha<0,$$

$$\text{область всех } E\geqslant 0 \quad \text{для} \quad U=\alpha r^2 \text{ с } \alpha>0.$$

При этом область $E<0$ для $U=\alpha/r$ есть область кеплеровских эллипсов. Замкнутость орбиты требует выполнения нетривиального равенства

$$r(\varphi+2\pi n)\equiv r(\varphi), \tag{39}$$

где n — некоторое целое число.

Для других сферически симметричных аналитических потенциалов $U(r)\neq\alpha/r$, αr^2 равенство (39) не может выполняться на целой области фазового пространства (см. книгу [44]). Вообще говоря, замкнутые орбиты заполняют множество меры нуль. Движение происходит в конечной области пространства $(x, \dot{x})$ при всех $-\infty<t<\infty$, если неравенство

$$E-U_{\text{эфф}}(r)\leqslant 0$$

выделяет конечный отрезок $0\leqslant r_{\min}\leqslant r\leqslant r_{\max}<\infty$ и начальное условие в нем содержится (здесь $U_{\text{эфф}}=U(r)+\frac{M^2}{2mr^2}$, M^2 — квадрат величины полного момента импульса).

Пример 5. Пусть в пространстве Минковского $\mathbb{R}^4$ задан лагранжиан $L(x, \dot{x})$, $x=(x^0, x^1, x^2, x^3)$, инвариантный относительно группы Лоренца $O(3, 1)$. Группе $O(3, 1)$ в $\mathbb{R}^4$ соответствуют линейные векторные поля, определяющие однопараметрические подгруппы:

$$X^i(x)=x_kA^{ki}=g^0_{kl}x^lA^{ki}, \tag{40}$$

где $g^0_{kl}=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1\end{pmatrix}$ — метрика Минковского, A^{ki} — любая постоянная кососимметрическая матрица (см. § 24). Тогда имеем закон сохранения

$$p_iX^i=p_ix_kA^{ki}=\text{const}, \tag{41}$$

где $p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$ есть 4-импульс. Ввиду косой симметричности матрицы A^{ki} выражение (41) можно переписать в виде

$$p_ix_kA^{ki}=\frac{1}{2}(p_ix_k-p_kx_i)A^{ki}=\text{const}.$$

Так как матрица A^{ki} произвольна, то мы имеем целый тензор сохраняющихся величин

$$M_{ik} = x_i p_k - x_k p_i = \text{const}. \qquad (42)$$

Этот антисимметричный тензор называется *4-тензором момента*.

Удобно рассмотреть соответствующий тензор M^{ik} с верхними индексами. Его пространственные компоненты $M^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, имеют вид

$$M^{\alpha\beta} = c\,(x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha), \qquad (43)$$

т. е. совпадают с компонентами трехмерного вектора момента

$$cM = c[x, p], \qquad (44)$$

$$M^{23} = cM_x, \quad M^{31} = cM_y, \quad M^{12} = cM_z.$$

Компоненты M^{01}, M^{02}, M^{03} образуют трехмерный вектор

$$c^2 tp - Ex = (M^{01}, M^{02}, M^{03}). \qquad (45)$$

Формулы (44), (45) сразу вытекают из вида 4-импульса

$$(p^i) = (E, cp),$$

где p — обычный трехмерный импульс.

Пусть теперь нам задана система из n релятивистских частиц $x_1, \ldots, x_n$, $x_i = \left(x_i^0, x_i^1, x_i^2, x_i^3\right)$. Пусть, далее, лагранжиан $L(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ инвариантен относительно полной группы Пуанкаре — группы движений пространства Минковского. Тогда имеем следующие законы сохранения:

$$\left(\sum_{i=1}^n E_i, \sum_{i=1}^n cp_i\right) = \text{const} \ \text{(полный 4-импульс сохраняется)},$$

$$\sum_{i=1}^n M_i^{kl} = \text{const} \ \left(M_i^{kl} \text{ — тензор момента } i\text{-й частицы}\right).$$

Из формул (45) вытекает, в частности,

$$\sum c^2 t p_i - \sum E_i x_i = \text{const}. \qquad (46)$$

Так как полная энергия $\sum E_i$ тоже сохраняется, то имеем

$$\frac{\sum E_i x_i}{\sum E_i} = t \cdot \frac{\sum c^2 p_i}{\sum E_i} + \text{const}.$$

Следовательно, точка

$$x = \frac{\sum E_i x_i}{\sum E_i} \qquad (47)$$

движется с постоянной скоростью v, равной

$$v = \frac{\sum c^2 p_i}{\sum E_i}. \tag{48}$$

Точка x есть релятивистский аналог центра масс. Если скорости частиц малы по сравнению с c, то можно приближенно положить $E_i \approx m_i c^2$, и формула (47) переходит в классическую формулу

$$x = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}.$$

Заметим, что релятивистский центр масс не инвариантен относительно выбора системы отсчета.

§ 33. Гамильтонов формализм

1. Преобразование Лежандра. Напомним, что мы ввели энергию и импульсы для лагранжиана $L(x, \dot{x})$, положив

$$E = \dot{x}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - L, \quad p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}. \tag{1}$$

Определение 1. Лагранжиан L называется *невырожденным*, если

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\alpha \partial \dot{x}^\beta}\right) \neq 0, \tag{2}$$

и называется *сильно невырожденным*, если уравнения $p_\alpha = \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^\alpha}$ можно гладко и взаимно однозначно решить в виде $\dot{x}^\alpha = v^\alpha(x, p)$ для всех x, $\dot{x}$.

Определение 2. *Гамильтонианом* $H(x, p)$ называется энергия E, выраженная через x и p (для сильно невырожденных лагранжианов).

Пространство с координатами (x, p) называется *фазовым пространством*. Переход от координат $(x, \dot{x})$ к координатам (x, p) для сильно невырожденных лагранжианов обратим. Это и есть преобразование Лежандра от $L(x, v)$ к $H(x, p)$. При этом уравнения Эйлера — Лагранжа переходят в уравнения Гамильтона.

Теорема 1. *Пусть $L(x, \dot{x})$ — сильно невырожденный лагранжиан и $H(x, p)$ — гамильтониан, $p = \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}}$, $\dot{x} = v(x, p)$. Уравнения Эйлера — Лагранжа*

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{3}$$