движется с постоянной скоростью v, равной

$$v = \frac{\sum c^2 p_i}{\sum E_i}. \tag{48}$$

Точка x есть релятивистский аналог центра масс. Если скорости частиц малы по сравнению с c, то можно приближенно положить $E_i \approx m_i c^2$, и формула (47) переходит в классическую формулу

$$x = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}.$$

Заметим, что релятивистский центр масс не инвариантен относительно выбора системы отсчета.

§ 33. Гамильтонов формализм

1. Преобразование Лежандра. Напомним, что мы ввели энергию и импульсы для лагранжиана $L(x, \dot{x})$, положив

$$E = \dot{x}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - L, \quad p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}. \tag{1}$$

Определение 1. Лагранжиан L называется *невырожденным*, если

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\alpha \partial \dot{x}^\beta}\right) \neq 0, \tag{2}$$

и называется *сильно невырожденным*, если уравнения $p_\alpha = \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^\alpha}$ можно гладко и взаимно однозначно решить в виде $\dot{x}^\alpha = v^\alpha(x, p)$ для всех x, $\dot{x}$.

Определение 2. *Гамильтонианом* $H(x, p)$ называется энергия E, выраженная через x и p (для сильно невырожденных лагранжианов).

Пространство с координатами (x, p) называется *фазовым пространством*. Переход от координат $(x, \dot{x})$ к координатам (x, p) для сильно невырожденных лагранжианов обратим. Это и есть преобразование Лежандра от $L(x, v)$ к $H(x, p)$. При этом уравнения Эйлера — Лагранжа переходят в уравнения Гамильтона.

Теорема 1. *Пусть $L(x, \dot{x})$ — сильно невырожденный лагранжиан и $H(x, p)$ — гамильтониан, $p = \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}}$, $\dot{x} = v(x, p)$. Уравнения Эйлера — Лагранжа*

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{3}$$

эквивалентны уравнениям Гамильтона, в которых x и p считаются независимыми переменными:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{4}$$

в фазовом пространстве (x, p).

Доказательство. Пусть $L = L(x, v)$, где $v = \dot{x}$,

$$H = pv - L, \quad v = v(x, p) \text{ и } p = \left.\frac{\partial L}{\partial v}\right|_{x=\text{const}}.$$

Докажем следующие равенства:

а) $\dot{x} = v = \left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_{x=\text{const}}$;

б) $\dot{p} = -\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{p=\text{const}} = \left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{v=\text{const}}$,

где $H = H(x, p)$, $L = L(x, v)$.

Доказательство равенства а):

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}(pv - L) = v + p\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p} = v,$$

так как $p = \frac{\partial L}{\partial v}$.

Доказательство равенства б):

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(pv - L) = -p\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial x} = \dot{p}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что $L = pv - H$, где $v = \frac{\partial H}{\partial p}$, или $L = p\dot{x} - H$. Действие $S = \int L\,dt$ для $L(x, \dot{x})$ записывается в виде

$$S = \int L\,dt = \int [p\dot{x} - H(x, p)]\,dt. \tag{5}$$

Если кривая γ имеет вид $x(t)$ и $p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x})$, то вдоль этой кривой выполнены «условия интегрируемости»

$$v(t) = \frac{dx}{dt}, \quad \text{где} \quad v = \frac{\partial H}{\partial p}. \tag{6}$$

Рассмотрим в фазовом пространстве (x, p) лагранжиан $L = p\dot{x} - H(x, p)$ на всех кривых $x(t)$, $p(t)$ без условий интегрируемости $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$.

Лемма 1. *Уравнения Эйлера — Лагранжа для функционала $\int [p\dot{x} - H(x, p)]\,dt$ в $2n$-мерном пространстве (x, p) совпадают* *с уравнениями Гамильтона и автоматически влекут условие интегрируемости* $v = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dx}{dt}$.

Доказательство. Пусть $\tilde{L}(y, \dot{y}) = p\dot{x} - H(x, p)$, где y — это координаты (x, p). Мы имеем

$$\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^i}\right)^{\cdot} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^i}, \quad \text{или} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

$$0 = \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{p}_i}\right)^{\cdot} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial p_i} = \dot{x}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Лемма доказана.

Замечание. Мы выводили выше уравнения Эйлера — Лагранжа для кривых, являющихся экстремалями в классе кривых с закрепленными концами. В фазовом (x, p)-пространстве этому соответствует класс вариаций, где фиксированы лишь x-координаты концов (рис. 34).

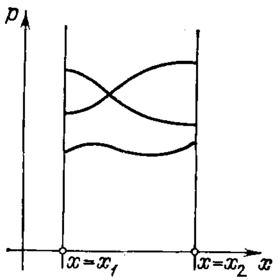

Рис. 34

2. Движущиеся системы координат. Рассмотрим теперь ситуацию, когда в $\mathbb{R}^n$ задан лагранжиан, меняющийся с течением времени: $L = L(x, \dot{x}, t)$. Выведем закон преобразования различных величин при заменах $x = x(x', t)$, $t = t'$.

Во-первых, по самому определению при таких преобразованиях величина $S = \int L dt$ не меняется, и L также не меняется (с точностью до полных производных). Поэтому имеем

$$L(x, \dot{x}, t) \to L(x(x', t), \dot{x}, t) + \frac{df(x, t)}{dt}. \tag{7}$$

Рассмотрим два случая:

1) замена не содержит времени: $x = x(x')$;

2) замена содержит время.

В первом случае

$$\dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \dot{x}^{i'} \quad \text{или} \quad v^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} v^{i'}. \tag{8}$$

Вывод. *Скорость есть вектор.*

Далее, $\tilde{L}(x', \dot{x}', t) = L(x, \dot{x}, t)$. Поэтому

$$\tilde{L}(x', \dot{x}', t) = L\left(x(x'), \frac{\partial x}{\partial x'} v', t\right),$$

$$p_{i'} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v^{i'}} = \frac{\partial L}{\partial v^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = p_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \tag{9}$$

т. е. импульс есть ковектор. Для энергии имеем $E = p_i v^i - L = p_{i'} v^{i'} - \tilde{L} = E'$. Поэтому энергия есть скаляр (не изменяется).

Перейдем теперь к заменам, содержащим время:

$$x = x(x', t), \quad t = t'. \tag{10}$$

В этом случае

$$\dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \dot{x}^{i'} + \frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \dot{x}^{i'} + a^i(x', t). \tag{11}$$

Будем считать, что в данный момент времени $t = t_0$ произведена замена (не зависящая от времени) такая, что $x = x'$ при $t = t_0$. Тогда

$$v^i = v^{i'} + \frac{\partial x^i}{\partial t} = v^{i'} + a^i(x', t_0), \quad t_0 = t. \tag{12}$$

Такую систему координат назовем мгновенной. В результате перехода к движущейся системе координат получим

$$L \to L' = L, \quad L(x, v, t) = L(x', v' + a, t);$$

$$v \to v' = v - a(x', t);$$

$$p \to p' = p, \quad \text{так как} \quad \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L'}{\partial v'};$$

$$E \to E' = p'v' - L' = p_i(v^i - a^i) - L = E - p_i a^i(x', t).$$

Таким образом, импульс не меняется, а энергия сдвигается на величину, равную $-p_i a^i = (p, v' - v)$. Итак,

$$E = H(x, p) \to E' = H(x', p') - p_i' a^i(x', t) = H'(x', p', t), \tag{13}$$

где $x = x'$ при $t = t_0$, $p = p'$, $a = \left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{t=t_0}$. Выясним, как изменяются уравнения Гамильтона. Прежде мы имели $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$, $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$. Теперь имеем $\dot{x}' = \frac{\partial H'}{\partial p'}$, $\dot{p}' = \frac{\partial H'}{\partial x'}$ (при $t = t_0$). Так как $x' = x$, $p' = p$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \frac{\partial H'}{\partial p'} = \frac{\partial H}{\partial p} - a = \dot{x} - a, \\ \dot{p}' &= -\frac{\partial H'}{\partial x'} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \dot{p}. \end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, изменение уравнений Гамильтона весьма просто. Мы доказали такое утверждение.

Теорема 2. *При переходе в движущуюся систему координат (мгновенную) координата и импульс не меняются, а энергия (гамильтониан) изменяются на величину* $-(p, a)$, *где*

$$a = \left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{t=t_0}, \quad H \to H' - (p, a), \quad a = a(x', t).$$

Рассмотрим три важных примера.

Пример 1. Поступательное движение системы координат, при котором $a=a(t)$ не зависит от x', $L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-U(x)$.

В этом случае

$$p=mv,\quad p'=p=mv=m(v'+a)=mv'+ma,$$
$$H'=H-(p',a).$$

Для уравнений Ньютона

$$(mv)^{\cdot}=f=m\dot{v}'+m\dot{a}$$

или

$$m\dot{v}'=f-m\dot{a}=f'. \qquad (15)$$

Таким образом, сила f приобретает инерционный добавок $-m\dot{a}$.

Пример 2. Вращение системы координат в $\mathbb{R}^3$, где $a=[\Omega, x']$, Ω — угловая скорость (постоянный вектор);

$$H'=H-(p',a)=H-(p',[\Omega,x']),$$
$$p'=p,\quad x'=x\quad \text{при}\quad t=t_0.$$

Уравнения имеют вид

$$\dot{p}'=-\frac{\partial H'}{\partial x'}=-\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(p',[\Omega,x])=-\frac{\partial H}{\partial x}+[p',\Omega],$$
$$\dot{x}'=\frac{\partial H'}{\partial p'}=\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{\partial}{\partial p'}(p',[\Omega,x])=\frac{\partial H}{\partial p}-[\Omega,x'].$$

Если лагранжиан имеет вид $L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-U(x)$, то

$$p=p'=m\dot{x}=m(\dot{x}'+[\Omega,x'])=m\dot{x}'+ma.$$

Имеем

$$\dot{p}'=m\ddot{x}'+m[\Omega,x']^{\cdot}=-\frac{\partial H}{\partial x}+[(m\dot{x}'+ma),\Omega].$$

Окончательно получаем: если $\dot{\Omega}=0$ (вращение постоянно), то

$$m\ddot{x}=2m[\dot{x}',\Omega]+f_{\text{старое}}+m[[\Omega,x],\Omega]. \qquad (16)$$

Последнее слагаемое есть малая сила, если скорость Ω мала, $|x|$ невелико. Сила $2m[\dot{x}',\Omega]$ называется *силой Кориолиса*. Получаем

$$m\dot{v}'=2m[v',\Omega]+f_{\text{старое}}+O(\Omega^2). \qquad (17)$$

Замечание. Если $L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-U(x)$, то переход в движущуюся систему координат имеет вид

$$H\to H-p_ia^i,\quad p_i=mv^i=p_i'=m(v^{i\prime}+a^i), \qquad (18)$$

где

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(x), \tag{19}$$

$$H' = \frac{p'^2}{2m} + U(x) - pa = \frac{(p' - ma)^2}{2m} + U(x) - \frac{ma^2}{2}.$$

Таким образом, переход в движущуюся систему координат равносилен двум операциям:

а) сдвигу импульса $p \to p' - ma$,

б) замене потенциала $U \to U_{\text{эфф}} = U(x) - \frac{ma^2}{2}$.

Пример 3 (включение электромагнитного поля). Пусть $L(x, \dot{x})$ — лагранжиан. Определим новый лагранжиан формулой $\widetilde{L} = L + \frac{e}{c} A_i \dot{x}^i$, где A_i — вектор-потенциал электромагнитного поля, e — заряд, $S = \int L\,dt$, $\widetilde{S} = \int \left(L\,dt + \frac{e}{c} A_i dx^i\right)$. Операцию добавления к лагранжиану слагаемого $\frac{e}{c} A_i \dot{x}^i$ называют «включением поля».

Если $H(x, p) = pv - L$ и $\widetilde{H}(x, \widetilde{p}) = \widetilde{p}v - \widetilde{L}$, где $p = \frac{\partial L}{\partial v}$, $\widetilde{p} = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial v}$, то

$$\begin{gathered} \widetilde{p}_i = p_i + \frac{e}{c} A_i, \quad p_i = \widetilde{p}_i - \frac{e}{c} A_i, \\ \widetilde{H}(x, \widetilde{p}) = H\left(x, \widetilde{p} - \frac{e}{c} A\right). \end{gathered} \tag{20}$$

Таким образом, включение поля равносильно сдвигу импульса в гамильтониане и этим похоже на переход к движущейся системе координат (без замены потенциала).

Заметим, что уравнения Эйлера — Лагранжа имеют вид

$$\dot{p}_i = f_i = \frac{\partial L}{\partial x^i} \quad \text{(без поля)},$$

$$\dot{p}_i = f_i + \frac{e}{c} F_{ij} \dot{x}^j \quad \text{(с полем)}, \quad p = \widetilde{p} - \frac{e}{c} A.$$

Здесь $F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}$ — тензор электромагнитного поля. В силу косой симметричности тензора F_{ij} выражение $F_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$ есть тождественный нуль, поэтому

$$\dot{p}_i \dot{x}^i = \dot{p}_i v^i = f_i v^i, \tag{21}$$

где f — сила в отсутствие поля, $f = \frac{\partial L}{\partial x}$.

Замечание. В трехмерном формализме компонента $A_0 = c\varphi$ есть электрический потенциал, и (A_1, A_2, A_3) — вектор-потенциал. В этой записи добавок к лагранжиану имеет вид $e\varphi + \frac{e}{c} A_\alpha \dot{x}^\alpha$, где $x^0 = ct$, $\alpha = 1, 2, 3$.

3. Принципы Мопертюи и Ферма. Приложения. Разберем теперь вариационные принципы Мопертюи и Ферма.

Теорема 3 (принцип Мопертюи). *Если гамильтониан $H(x, p)$ не зависит от времени и фиксирован уровень энергии, то на траекториях движения величина $S_0 = \int p\,dx$ имеет экстремум среди всех кривых $x(t)$ с данной энергией E. При этом считается, что форма $p\,dx$ выражена через x^α, dx^α.*

Доказательство. Очевидно, на поверхности $H(x, p) = E$ исходный функционал $S = \int (p\,dx - H\,dt)$ достигает экстремума на всех исходных экстремалях (решениях гамильтоновой системы), поскольку мы рассматриваем экстремальную задачу в более узком, чем прежде, классе кривых: кривых, лежащих на поверхности $H(x, p) = E$. На этой поверхности $S = \int (p\,dx - E\,dt) = \int (p\,dx - d(Et))$. Поэтому в координатах $z^1, \ldots, z^{2n-1}$ на этой поверхности (размерности $2n-1$) лагранжианы $p\dot{x} = \tilde{L}(z, \dot{z})$ и $\tilde{L}(z, \dot{z}) - \frac{d}{dt}(Et)$ имеют одинаковые уравнения экстремалей. Следовательно, все экстремали исходного функционала в (x, p)-пространстве являются и экстремалями нового (укороченного) действия $S_0 = \int p\,dx$ на поверхности $H = E$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь важные примеры.

Пример 1. $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$; $H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U(x)$. Вдоль экстремалей выполняется уравнение

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}.$$

Сузим функционал укороченного действия $S_0 = \int p\,dx$ на еще меньшее множество кривых на поверхности $H = E$, потребовав, чтобы вдоль этих кривых выполнялось соотношение $\dot{x} = p/m$. Тогда

а) $|p| = \sqrt{2m(E - U(x))}$ из условия $H(x, p) = E$;

б) $(p, \dot{x}) = p_\alpha \dot{x}^\alpha = |p| \cdot |\dot{x}|$ из условия $\dot{x} = p/m$.

Отсюда получаем

$$S_0 = \int p\,dx = \int (p, \dot{x})\,dt = \int |p|\,|\dot{x}|\,dt = \int |p|\,|dx| = \int \sqrt{2m(E - U(x))}\,|dx|.$$

Итак, доказана

Теорема 4. *Кривые $x(t)$, отвечающие решениям гамильтоновой системы с $H=p^2/2m+U(x)=E$ при фиксированной энергии E, являются (непараметризованными) геодезическими новой метрики*

$$g_{ij}=2m(E-U(x))\delta_{ij}. \qquad (22)$$

Пример 2. Пусть $H=c(x)\cdot|p|$; этот гамильтониан описывает траектории света в изотропной среде с переменной скоростью света $c(x)$.

Рассмотрим укороченное действие $S_0=\int p\,dx$ на множестве кривых таких, что

а) $H(x, p)=E$,

б) $\dot{x}=\dfrac{\partial H}{\partial p}=c(x)\dfrac{p}{|p|}$ (очевидно, $|\dot{x}|=c(x)$).

Так как $c(x)|p|=E$, то $|p|=E/c(x)$. Так как $\dot{x}=c(x)p/|p|$, то $\langle p, dx\rangle=|p|\cdot|dx|$. Поэтому

$$\int\langle p, dx\rangle=\int|p|\cdot|dx|=\int\frac{E}{c(x)}|dx|=E\int\frac{|dx|}{c(x)}=E\int\sqrt{\frac{dx^2}{c^2(x)}}.$$

Заметим, что интеграл $\displaystyle\int_\gamma\frac{|dx|}{c(x)}$ равен времени движения света вдоль пути γ. Итак, доказана

Теорема 5 (принцип Ферма). *Свет движется вдоль такой кривой, вдоль которой время движения имеет экстремум среди всех гладких кривых, соединяющих заданные точки P и Q. Эти кривые являются геодезическими новой метрики*

$$g_{ij}=\frac{1}{c^2(x)}\delta_{ij}.$$

Замечание. Обычно геодезические получаются из лагранжиана $L=g_{ij}v^iv^j$ или гамильтониана $H=g^{ij}p_ip_j$. Если взять гамильтониан $H'(x, p)=\sqrt{H}=\sqrt{g^{ij}p_ip_j}$, то он будет давать те же траектории движения, поскольку на постоянном уровне энергии $H=\text{const}$ соответствующие векторные поля гамильтонианов H и $\sqrt{H}$ будут пропорциональны с постоянным множителем, равным $\dfrac{1}{2\sqrt{H}}=\dfrac{1}{2\sqrt{E}}=\text{const}$. Действительно, $\left(\dot{p}=\dfrac{\partial H}{\partial x},\ \dot{x}=-\dfrac{\partial H}{\partial p}\right)\leftrightarrow$ $\leftrightarrow 2\sqrt{H}\left(\dot{p}=\dfrac{\partial\sqrt{H}}{\partial x},\ \dot{x}=-\dfrac{\partial\sqrt{H}}{\partial p}\right)$.

В нашем случае $H'=c(x)|p|$ или $H'=\sqrt{c^2(x)|p|^2}$. Поэтому сразу можно сказать, что метрика имеет вид $g^{ij}=c^2(x)\delta^{ij}$ или $g_{ij}=\dfrac{1}{c^2(x)}\delta_{ij}$.

В анизотропной среде тензор g_{ij} (или g^{ij}), определяющий скорость, не будет иметь конформно евклидовой формы.