§ 34. Геометрическая теория фазового пространства

1. Градиентные системы. В любом пространстве $\mathbb{R}^m$ с координатами $(y^1, \ldots, y^m)$ и «метрикой» g^{ij} можно определить скалярное произведение ковекторов и поднятие индексов (см. § 19).

Градиент ∇f функции $f(y^1, \ldots, y^m)$ имеет вид

$$(\nabla f)^i = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial y^j}. \tag{1}$$

При этом тензор g^{ij} не предполагается симметричным. Векторному полю ∇f соответствует система уравнений (см. § 23)

$$\dot y^i = (\nabla f)^i. \tag{2}$$

Система вида (2) называется *градиентной*. Имеет место простая

Лемма 1. *Для любой функции $h(y)$ ее производная в силу градиентной системы* (2) *имеет вид*

$$\dot h = \langle \nabla h, \nabla f\rangle = g^{ij}\frac{\partial h}{\partial y^i}\frac{\partial f}{\partial y^j}. \tag{3}$$

Доказательство. По определению

$$\dot h = \frac{\partial h}{\partial y^i}\dot y^i = \frac{\partial h}{\partial y^i}(\nabla f)^i = \frac{\partial h}{\partial y^i}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial y^j}.$$

Лемма доказана.

Нас здесь будут интересовать невырожденные кососимметрические «метрики» g^{ij}, задаваемые формой

$$2\Omega = g_{ij}dy^i \wedge dy^j, \tag{4}$$

где g_{ij} — обратная матрица, $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$, $g_{ij} = -g_{ji}$, $\det g_{ij} = g \neq 0$. Очевидно, размерность пространства четна, $i, j = 1, \ldots, 2n$.

Лемма 2. *Имеет место формула*

$$\frac{1}{n!}\underbrace{\Omega \wedge \ldots \wedge \Omega}_{n} = \sqrt{g}\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^{2n}; \tag{5}$$

таким образом, $\sqrt{g}$ — многочлен от g_{ij}; он называется «пфаффианом».

Доказательство. Равенство (5) достаточно доказать в каждой точке отдельно. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $g_{ij} = \mathrm{const}$. Выберем новые координаты:

$$(x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n) = (z^1, \ldots, z^{2n}), \tag{6}$$

такие, что $g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$. В этом случае

$$\Omega = \sum_i dx^i \wedge dp_i, \tag{7}$$

$$\Omega \wedge \ldots \wedge \Omega = n!\, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^{2n}.$$

Таким образом, в данной системе координат лемма доказана, так как $\sqrt{g}=1$. Ввиду инвариантности формулы (5) лемма доказана в любой системе координат.

Замечание. Таким образом, условие невырожденности метрики g_{ij}, т. е. условие $g\neq 0$, равносильно условию $\Omega^n\neq 0$.

Определение 1. Пространство с кососимметрической метрикой g_{ij}, допускающее координаты (x, p) такие, что $g_{ij}\equiv\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, называется *фазовым пространством*. Координаты (x, p), в которых метрика имеет вид (7), назовем каноническими. Градиентные системы в этой метрике назовем *гамильтоновыми*.

Гамильтоновы системы в канонических координатах имеют вид

$$\dot{y}^i=(\nabla H)^i, \quad i=1, \ldots, 2n,$$

или

$$\dot{x}^i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial x^i}, \qquad i=1, \ldots, n. \tag{8}$$

Из леммы 1 вытекает

Лемма 3. *Производная любой функции* $f(x, p, t)$ *в силу гамильтоновой системы* (8) *имеет вид*

$$\dot{f}=\frac{\partial f}{\partial t}+\langle\nabla f, \nabla H\rangle, \tag{9}$$

где

$$\langle\nabla f, \nabla H\rangle=g^{ij}\frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial f}{\partial y^j}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right). \tag{10}$$

В частности, если $f=H=H(x, p, t)$, *то*

$$\dot{E}=\dot{H}=\frac{\partial H}{\partial t},$$

так как $\langle\nabla H, \nabla H\rangle=-\langle\nabla H, \nabla H\rangle=0$.

Важность класса гамильтоновых систем определяется доказанной в предыдущем параграфе теоремой об эквивалентности уравнений Эйлера — Лагранжа (для сильно невырожденных лагранжианов) и уравнений Гамильтона в фазовом пространстве.

Рассмотрим теперь систему $H=H(x, p, t)$, явно зависящую от времени t. Имеем уравнения Гамильтона

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{11}$$

их следствие $\dot{E}=\frac{\partial H}{\partial t}$ и очевидное равенство $\dot{t}=1$. Рассмотрим расширенное фазовое пространство с координатами (x, p, t, E), где $x^{n+1}=t$, $p_{n+1}=E$, и кососимметрической метрикой

$$\widehat{g}_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & -1 & 0 & & \\ & 0 & & & & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

которой соответствует форма

$$\widehat{\Omega}=\sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dp_i - dt \wedge dE. \tag{13}$$

Рассмотрим гамильтониан $\widetilde{H}(x, p, t, E)=H(x, p, t)-E$ и градиентную систему (Гамильтона), которая имеет вид

$$\dot{x}=\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p}, \quad \dot{p}=-\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x}, \quad \dot{t}=-\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial E}, \quad \dot{E}=\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t}. \tag{14}$$

Из этих уравнений вытекает

Следствие. *Уравнения Гамильтона в расширенном фазовом пространстве* (x, p, t, E) *с метрикой* $\widehat{g}_{ij}$ *(или формой* $\widehat{\Omega}$*) с гамильтонианом* $\widetilde{H}=H(x, p, t)-E$ *на поверхности* $\widetilde{H}=0$ *совпадают с исходными уравнениями Гамильтона в пространстве* (x, p), *к которым добавлены соотношения* $\dot{t}=1$, $\dot{E}=\partial H/\partial t$.

Если исходный гамильтониан H не зависит явно от времени, $\partial H/\partial t=0$, то время $t=x^{n+1}$ является циклической координатой, и соответствующий импульс $p_{n+1}=E$ сохраняется.

2. Скобка Пуассона. Определение 2. *Скобкой Пуассона (или коммутатором)* двух функций $f(x, p)$ и $g(x, p)$ в фазовом пространстве с кососимметрической метрикой $g_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ называется скалярное произведение их градиентов

$$\{f, g\}=\langle \nabla f, \nabla g\rangle = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial g}{\partial y^j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}, \tag{15}$$

где $(\nabla f)^i = g^{ij}\dfrac{\partial f}{\partial y^j}$ и т. д. Имеет место следующая

Теорема 1. *Скобка Пуассона обладает следующими свойствами:*

1) $\{f, g\}=-\{g, f\}$, $\{\lambda f_1+\mu f_2, g\}=\lambda\{f_1, g\}+\mu\{f_2, g\}$,

где λ, μ *— константы;*

2) $$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0 \tag{16}$$

(тождество Якоби);

3) $$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}; \tag{17}$$

4) $$\nabla\{f, g\} = -[\nabla f, \nabla g],$$

где $[\ ,\ ]$ — *коммутатор векторных полей.*

Доказательство. Свойства 1) и 3) очевидны, а свойство 2) эквивалентно свойству 4). Докажем свойство 4). В координатах (x, p) имеем

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial p}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial p}, -\frac{\partial g}{\partial x}\right).$$

Вычислим коммутатор этих векторных полей. Напомним (см. § 23), что коммутатор полей X и Y в координатах y^j определяется формулой

$$[X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial y^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial y^j}.$$

Используя это равенство для первой x-координаты коммутатора $[\nabla f, \nabla g]$, получаем

$$[\nabla f, \nabla g]^1 = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right) - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right) - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) + \\ + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right) - \\ - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x}\right) = (-\nabla\{f, g\})^1$$

здесь мы использовали равенства

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Для p-координаты равенство 4) доказывается аналогично. Теорема доказана.

Следствие. *Функции $f(x, p)$ на фазовом пространстве образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона.*

Заметим, что в силу утверждения 4) теоремы 1 эта алгебра Ли изоморфна алгебре Ли градиентных векторных полей в кососимметрической метрике g_{ij}.

Пусть теперь g_{ij} — произвольная кососимметрическая метрика (невырожденная); $\Omega = g_{ij}dy^i \wedge dy^j$. Определим скобку Пуассона $\{f, g\}$ прежней формулой

$$\{f, g\} = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial g}{\partial y^j} \quad (g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j). \tag{18}$$

При каком условии на Ω гладкие функции образуют алгебру Ли относительно коммутатора $\{\ ,\ \}$? Ответ дает следующая

Теорема 2. *Гладкие функции составляют алгебру Ли относительно скобки Пуассона* (18) *в том и только в том случае, если форма Ω замкнута*: $d\Omega = 0$.

Доказательство. Нужно проверить лишь справедливость тождества Якоби. Оно эквивалентно (см. доказательство теоремы 1) тождеству

$$\nabla\{f, g\} = -[\nabla f, \nabla g]. \tag{19}$$

Левая часть равенства (19) имеет вид (k-я координата):

$$\nabla\{f, g\}^k = g^{kl}\frac{\partial g^{ij}}{\partial y^l}\frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial g}{\partial y^j} + g^{kl}g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^l \partial y^i}\frac{\partial g}{\partial y^j} + \frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial^2 g}{\partial y^l \partial y^j}\right);$$

правая часть:

$$-[\nabla f, \nabla g]^k = g^{il}\frac{\partial g^{kj}}{\partial y^i}\frac{\partial g}{\partial y^l}\frac{\partial f}{\partial y^j} -$$

$$- g^{ij}\frac{\partial g^{kl}}{\partial y^i}\frac{\partial f}{\partial y^j}\frac{\partial g}{\partial y^l} + g^{ij}g^{kl}\frac{\partial g}{\partial y^j}\frac{\partial^2 f}{\partial y^l \partial y^i} - g^{ij}g^{kl}\frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial^2 g}{\partial y^j \partial y^l}.$$

Приравнивая эти выражения, получим после сокращения и переобозначения индексов суммирования: равенство (19) эквивалентно равенству

$$\left(g^{ki}\frac{\partial g^{jl}}{\partial y^i} + g^{li}\frac{\partial g^{kj}}{\partial y^i} + g^{ij}\frac{\partial g^{kl}}{\partial y^i}\right)\frac{\partial f}{\partial y^j}\frac{\partial g}{\partial y^l} = 0.$$

Ввиду произвольности величин $\dfrac{\partial f}{\partial y^j}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y^l}$ это равенство эквивалентно такому равенству:

$$g^{ki}\frac{\partial g^{jl}}{\partial y^i} + g^{li}\frac{\partial g^{kj}}{\partial y^i} + g^{ij}\frac{\partial g^{kl}}{\partial y^i} = 0; \quad j, l, k = 1, \ldots, 2n. \tag{20}$$

Умножая равенство (20) на $g_{rk}g_{pj}g_{ql}$ и используя соотношение

$$g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial y^l} = -g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^l},$$

получаем

$$\frac{\partial g_{pq}}{\partial y^r} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial y^p} + \frac{\partial g_{rp}}{\partial y^q} = 0,$$

а это и есть условие замкнутости формы Ω. Теорема доказана.

Выясним теперь вопрос: в каком случае невырожденную форму Ω 2-го ранга (т. е. такую, что $\Omega^n \neq 0$) можно привести заменой координат к каноническому виду (7)? Так как форма (7) замкнута, то условие замкнутости формы Ω необходимо для такого приведения. Достаточность вытекает из следующего утверждения, которое мы приводим без доказательства.

Теорема 3 (Дарбу). *Пусть Ω — дифференциальная форма 2-го ранга, причем $\Omega^n = \Omega \wedge \ldots \wedge \Omega \neq 0$. Если форма Ω замкнута, то существуют локальные координаты $x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n$, в которых форма Ω принимает канонический вид*:

$$\Omega = \sum_i dx^i \wedge dp_i.$$

Пусть мы имеем в фазовом пространстве гамильтонову систему с гамильтонианом H. Тогда производная любой функции $f = f(x, p)$ вдоль этой системы имеет вид

$$\dot{f} = \{f, H\}. \tag{21}$$

В частности, $\dot{x}^i = \{x^i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\partial H/\partial x^i$.

Вывод. *Функция $f(x, p)$ является интегралом гамильтоновой системы (интегралом движения), если она коммутирует с гамильтонианом H: $\{f, H\} = 0$. Совокупность интегралов гамильтоновой системы образует алгебру Ли, замкнутую также относительно перемножения функций.*

Предположим, что гамильтониан $H(x, p)$ не зависит явно от времени: $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Тогда энергия $E = H(x, p)$ сохраняется, и все траектории гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(x, p)$ лежат на поверхностях уровня $H(x, p) = E$. Пусть $f = f(x, p)$ — интеграл этой системы, $\{f, H\} = 0$. Но тогда и $\{H, f\} = 0$, т. е. функция $H(x, p)$ постоянна вдоль траекторий градиентной системы ∇f. Следовательно, векторное поле ∇f касается поверхности уровня $H(x, p) = E$. Так как векторные поля, касающиеся данной поверхности, образуют подалгебру алгебры Ли всех векторных полей (см. § 24, п. 1), то имеет смысл говорить об алгебре Ли интегралов гамильтоновой системы на данном уровне энергии $H(x, p) = E$.

Пример 1. Пусть лагранжиан $L(x, \dot{x})$ сферически симметричен. Как мы видели выше, трем однопараметрическим подгруппам в $SO(3)$ соответствуют три интеграла M_x, M_y, M_z (интегралы момента), где

$$M_x = L_x^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}, \quad M_y = L_y^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}, \quad M_z = L_z^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}, \tag{22}$$

L_x, L_y, L_z — соответствующие линейные векторные поля. Коммутаторы этих полей имеют вид (см. § 24)

$$[L_x, L_y] = L_z, \quad [L_y, L_z] = L_x, \quad [L_z, L_x] = L_y. \tag{23}$$

Из утверждения 4 теоремы 1 вытекает, что скобки Пуассона компонент момента вычисляются по формулам

$$\{M_x, M_y\} = -M_z, \quad \{M_y, M_z\} = -M_x, \quad \{M_z, M_x\} = -M_y. \qquad (24)$$

Вывод. *Функции M_x, M_y, M_z на фазовом пространстве сферически симметричной системы образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона, изоморфную алгебре Ли $so(3)$.*

Пример 2. В кеплеровой задаче гамильтониан $H(x, p)$ в $\mathbb{R}^6$ имеет вид

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha}{|x|}, \quad \alpha < 0. \qquad (25)$$

В силу сферической симметричности здесь имеются три интеграла момента

$$M = (M_1, M_2, M_3) = [x, p] = \mathrm{const}. \qquad (26)$$

Оказывается, в этой задаче имеется еще три интеграла

$$W = (W_1, W_2, W_3) = \left[\frac{p}{m}, M\right] + \frac{\alpha x}{|x|} = \mathrm{const} \qquad (27)$$

(вектор Лапласа — Рунге — Ленца). Вычислим скобки Пуассона $\{M_i, W_j\}$, $\{W_i, W_j\}$. Для этого используем следующие выражения для скобок Пуассона функций $\{p_i, M_j\}$:

$$\{p_i, M_i\} = 0, \quad \{p_1, M_2\} = p_3, \quad \{p_1, M_3\} = -p_2, \{p_2, M_1\} = -p_3, \qquad (28)$$
$$\{p_2, M_3\} = p_1, \quad \{p_3, M_1\} = p_2, \{p_3, M_2\} = -p_1$$

(проверьте!). Имеем

$$M_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2,$$

$$W_1 = \frac{1}{m}(p_2 M_3 - p_3 M_2) + \frac{\alpha x_1}{|x|}, \quad W_2 = \frac{1}{m}(p_3 M_1 - p_1 M_3) + \frac{\alpha x_2}{|x|}.$$

Используя свойства 1), 3) из теоремы 1, получаем

$$\{M_1, W_1\} = \frac{1}{m}\{M_1, p_2 M_3 - p_3 M_2\} + \alpha\left\{M_1, \frac{x_1}{|x|}\right\} =$$
$$= \frac{1}{m}[\{M_1, p_2\} M_3 + \{M_1, M_3\} p_2 - \{M_1, p_3\} M_2 -$$
$$- \{M_1, M_2\} p_3] + \frac{\alpha}{|x|}\{M_1, x_1\} + \alpha x_1 \left\{M_1, \frac{1}{|x|}\right\} =$$
$$= \frac{1}{m}\{p_3 M_3 - M_2 p_2 + p_2 M_2 - p_3 M_3\} = 0,$$

$$\{M_1, W_2\} = \frac{1}{m}\{M_1, p_3 M_1 - p_1 M_3\} + \alpha\left\{M_1, \frac{x_2}{|x|}\right\} =$$
$$= \frac{1}{m}[\{M_1, p_3\} M_1 - \{M_1, M_3\} p_1] + \frac{\alpha}{|x|}\{M_1, x_2\} =$$
$$= \frac{1}{m}[-p_2 M_1 + p_1 M_2] + \frac{\alpha x_3}{|x|} = W_3.$$

Точно так же вычисляются остальные скобки $\{M_i, W_j\}$. Получаем следующую таблицу скобок Пуассона:

$\{M_i, W_j\}$	W_1	W_2	W_3
M_1	0	W_3	$-W_2$
M_2	$-W_3$	0	W_1
M_3	W_2	$-W_1$	0

(29)

Аналогичное, но более длинное вычисление позволяет найти попарные скобки вида $\{W_i, W_j\}$ при постоянном уровне энергии $H(x, p) = E$. Будем иметь

$$\{W_1, W_2\} = -\frac{2E}{m} M_3, \quad \{W_2, W_3\} = -\frac{2E}{m} M_1,$$
$$\{W_3, W_1\} = -\frac{2E}{m} M_2. \tag{30}$$

Видно, что структура алгебры Ли функций W_i, M_j при постоянном уровне энергии $H = E$ существенно зависит от этого уровня энергии (см. задачу 3 ниже).

3. Канонические преобразования. Пусть имеется произвольная гамильтонова система с гамильтонианом $H(x, p)$:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Теорема 4. *Форма* $\Omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dp_i$ *сохраняется в силу гамильтоновой системы:*

$$\dot{\Omega} = 0. \tag{31}$$

Доказательство. Чтобы вычислить производную формы Ω вдоль векторного поля ∇H (т. е. производную Ли $\dot{\Omega} = L_{\nabla H}\Omega$), нужно воспользоваться следующими фактами (см. § 23, п. 2):

$$(\Omega_1 \wedge \Omega_2)^{\cdot} = \dot{\Omega}_1 \wedge \Omega_2 + \Omega_1 \wedge \dot{\Omega}_2, \tag{32}$$

$$(dx^i)^{\cdot} = d\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\, \partial x^j} dx^j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\, \partial p_j} dp_j, \tag{33}$$

$$(dp_i)^{\cdot} = -d\left(\frac{\partial H}{\partial x^i}\right) = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^i\, \partial x^j} dx^j - \frac{\partial^2 H}{\partial x^i\, \partial p_j} dp_j. \tag{34}$$

Поэтому

$$\left(\sum_i dx^i \wedge dp_i\right)^{\boldsymbol\cdot} = \sum_{i,j}\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial x^j}dx^j \wedge dp_i + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial p_j}dp_j \wedge dp_i - \right.$$

$$\left. - dx^i \wedge \frac{\partial^2 H}{\partial x^i\,\partial x^j}dx^j - dx^i \wedge \frac{\partial^2 H}{\partial x^i\,\partial p_j}dp_j\right\} = 0,$$

так как внешнее произведение кососимметрично. Теорема доказана.

Следствие (Лиувилль). *Фазовый объем любой области в (x, p)-пространстве сохраняется гамильтоновой системой.*

Доказательство. Так как $\dot\Omega = 0$, то из формулы (32) вытекает, что $(\Omega \wedge \ldots \wedge \Omega)^{\boldsymbol\cdot} = 0$. Согласно лемме 2 элемент объема в фазовом пространстве как раз имеет вид n-кратного внешнего произведения формы Ω на себя. Следствие доказано.

Определение 3. Преобразование $\Phi\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ фазового пространства (x, p) в себя называется *каноническим*, если оно сохраняет кососимметрическое скалярное произведение (т. е. если форма Ω переходит в себя).

Другими словами, канонические преобразования — это движения кососимметрической метрики. В силу теоремы 4 сдвиг вдоль траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(x, p)$ дает однопараметрическую группу канонических преобразований. Верно и обратное. Пусть дана произвольная локальная однопараметрическая группа канонических преобразований $\Phi_t(x, p) = (x(t), p(t))$, и пусть $X = \left.\frac{d\Phi_t}{dt}\right|_{t=0}$ — соответствующее векторное поле.

Теорема 5. *Найдется локально однозначная гладкая функция Гамильтона $H(x, p)$, по отношению к которой векторное поле X гамильтоново, т. е. имеет вид*

$$X = \left(\frac{\partial H}{\partial p},\ -\frac{\partial H}{\partial x}\right).$$

Доказательство. Пусть в координатах (x, p) поле X имеет вид $X = (A^i, B_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим сдвиг на малое время Δt. Имеем

$$\Phi_{\Delta t}\colon \begin{cases} x^i \to x^i + A^i(x, p)\,\Delta t + O(\Delta t^2) = x^{i\prime}, \\ p_i \to p_i + B_i(x, p)\,\Delta t + O(\Delta t^2) = p_i'. \end{cases}$$

Условия теоремы требуют сохранения кососимметрической метрики:

$$\sum_i dx^{i\prime} \wedge dp_i' = \sum_i dx^i \wedge dp_i.$$

Поэтому

$$(dx^i + (dA^i)\Delta t) \wedge (dp_i + (dB_i)\Delta t) = dx^{i'} \wedge dp_i' =$$
$$= dx^i \wedge dp_i + \Delta t\left[\frac{\partial A^i}{\partial x^j} dx^j \wedge dp_i + \frac{\partial A^i}{\partial p_j} dp_j \wedge dp_i + \frac{\partial B_i}{\partial p_j} dx^i \wedge dp_j + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial B_i}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j\right] + O(\Delta t^2).$$

Отсюда

1) $\dfrac{\partial A^i}{\partial p_j} dp_i \wedge dp_j = 0 \leftrightarrow \dfrac{\partial A^i}{\partial p_j} = \dfrac{\partial A^j}{\partial p_i}$;

2) $\dfrac{\partial B_i}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0 \leftrightarrow \dfrac{\partial B_i}{\partial x^j} = \dfrac{\partial B_j}{\partial x^i}$;

3) $\dfrac{\partial A^i}{\partial x^j} dx^j \wedge dp_i = -\dfrac{\partial B_i}{\partial p_j} dx^i \wedge dp_j \leftrightarrow \dfrac{\partial A^i}{\partial x^j} = -\dfrac{\partial B^i}{\partial p_j}$.

Если $A^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, $B_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x^i}$, то эти условия выполнены. Обратно, из этих условий видно, что форма $A^i dp_i - B_i dx^i$ является полным дифференциалом (по теореме Грина), и можно положить $H(x, p) = \int\limits_{(x_0, p_0)}^{(x, p)} (-B_i dx^i + A^i dp_i)$. Теорема доказана.

Замечание. Явно зависящие от времени гамильтонианы $H(x, p, t)$ дают однопараметрические семейства Φ канонических преобразований, но не группу $(\Phi_{t_1+t_2} \neq \Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2})$.

При $n = 1$ сохранение формы $\Omega = dx \wedge dp$ равносильно сохранению площади в (x, p)-плоскости. Поэтому класс канонических преобразований здесь сводится к классу преобразований, сохраняющих площадь. При $n > 1$ канонических преобразований меньше, чем сохраняющих объем (может оказаться, что форма $\Omega \wedge \ldots \wedge \Omega$ сохраняется, а форма Ω не сохраняется).

Линейные канонические преобразования фазового (x, p)-пространства $\mathbb{R}^{2n}$ называются *симплектическими*. При $n = 1$ группа всех симплектических преобразований совпадает с $SL(2, \mathbb{R})$. Линейные канонические преобразования мы получим, если $H(x, p)$ — квадратичная форма:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} x^i x^j + b_{ij} x^i p_j + c_{ij} p_i p_j). \tag{35}$$

Соответствующая этой форме симметрическая матрица имеет вид $\begin{pmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & C \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, где матрицы A и B симметричны. Если $y=(x, p)$, то гамильтонова система имеет вид

$$\dot{y} = Ky, \quad K = \begin{pmatrix} B & C \\ -A & -B^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Таким образом, матрицы K из алгебры Ли группы симплектических преобразований имеют вид (36). Эта алгебра Ли совпадает с алгеброй Ли квадратичных гамильтонианов (35) относительно скобки Пуассона. Простейший пример квадратичного гамильтониана дает гармонический осциллятор, где $H = \frac{p^2}{2m} + m\omega^2 x^2$, ω — частота. Поэтому квадратичные гамильтонианы называют также обобщенными осцилляторами.

Задачи. 1. Векторному полю X на конфигурационном пространстве поставим в соответствие функцию F_X на фазовом пространстве, полагая $F_X = p_i X^i$. Показать, что $\{F_X, F_Y\} = -F_{[X, Y]}$.

2. Пусть функция $f = f(x)$ на фазовом пространстве не зависит от импульсов p. Показать, что

$$\{f, F_X\} = \partial_X f.$$

3. Доказать, что в кеплеровой задаче алгебра Ли интегралов W_i, M_j при фиксированной энергии E изоморфна:

а) при $E < 0$ — $so(4)$,

б) при $E = 0$ — алгебре Ли группы движений в $\mathbb{R}^3$,

в) при $E > 0$ — $so(1, 3)$.

4. Пусть $\Omega = g_{ik} dy^i \wedge dy^k$ — симплектическая метрика, $X = (X^k)$ — векторное поле. Проверить, что форма $g_{ik} X^k dy^i$ замкнута, если и только если производная Ли вдоль поля X формы Ω равна нулю: $L_X \Omega = 0$.

5. Пусть M_x, M_y, M_z — определенные в п. 2 интегралы момента, $M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$. Проверить, что

$$\{M^2, M_x\} = \{M^2, M_y\} = \{M^2, M_z\} = 0.$$

6. Пусть $M = (M_1, M_2, M_3) = [x, p]$. Показать, что функции p_i, M_j образуют относительно скобки Пуассона алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли группы движений трехмерного евклидова пространства (см. задачу 9 к § 24).

7. Пусть $g_{ij} = -g_{ji}$ — невырожденная кососимметрическая матрица, задающая кососкалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Показать, что размерность линейного подпространства в $\mathbb{R}^{2n}$ с нулевым ограничением этого кососкалярного произведения не превосходит n.

8. Пусть в фазовом пространстве с каноническими координатами $x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n$ введены новые координаты $X^1, \ldots, X^n, P_1, \ldots, P_n$ так, что $p_i = \frac{\partial S(x, X)}{\partial x^i}$, $P_i = -\frac{\partial S(x, X)}{\partial X^i}$, $i = 1, \ldots, n$,

где $S(x, X)$ — некоторая гладкая функция переменных x^i, X^i (пусть $\det(\partial^2 S/\partial x^i \partial X^j) \neq 0$). Доказать, что новые координаты также канонические. (Функция $S(x, X)$ называется *производящей функцией* канонического преобразования $(x, p) \mapsto (X, P)$.)

§ 35. Лагранжевы поверхности

1. Пучки траекторий и уравнение Гамильтона — Якоби. Для различных целей существенно знать свойства не индивидуальной траектории гамильтоновой системы, а целого пучка траекторий. Более точно, постановка вопроса такова: рассмотрим при $t = 0$ поверхность Γ размерности n в $2n$-мерном фазовом пространстве (x, p), заданную как график:

$$p_i = f_i(x^1, \ldots, x^n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Каждая точка поверхности Γ будет двигаться вдоль траекторий системы с гамильтонианом $H(x, p, t)$; в момент времени $t > 0$ получится сдвинутая поверхность Γ_t, а $\Gamma_0 = \Gamma$. Удобно рассматривать совокупность поверхностей Γ_t как $(n+1)$-мерную поверхность в расширенном фазовом пространстве (x, p, t, E); точки $(x(t), p(t), E(t), t)$, $E = H(x, p, t)$, дадут поверхность Γ^{n+1}, сечение которой уровнем $t = 0$ есть Γ и которая состоит целиком из траекторий, начавшихся в Γ. Нам, однако, понадобится несколько более широкий класс подобных поверхностей.

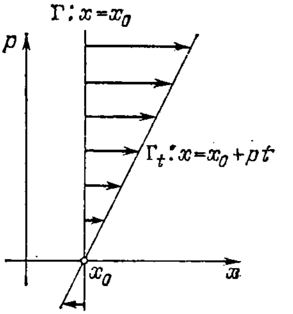

Рис. 35

Например: пусть $\Gamma = \Gamma_0$ есть поверхность $x = x_0$ (импульсы любые, рис. 35); мы получим в качестве Γ^{n+1} пучок всех траекторий, расходящихся из точки x_0 во все стороны. При $t = 0$ поверхность Γ_0 не задается как график функции $p = f(x)$, но при $t > 0$ она может быть таким графиком (хотя бы локально).

Определение 1. Поверхность Γ в фазовом пространстве (x, p) называется *лагранжевой*, если для всех кривых γ на поверхности Γ, начинающихся в любой точке $Q \in \Gamma$, укороченное действие $S = \int_\gamma p\,dx$ является локально однозначной функцией, зависящей лишь от конечной точки пути γ.

Определение 1′. Поверхность Γ^{n+1} в расширенном фазовом пространстве называется лагранжевой, если для всех путей γ на Γ^{n+1} с началом в точке Q действие $S = \int_\gamma (p\,dx - E\,dt)$ (где $E = H(x, p, t)$ на поверхности Γ^{n+1}) является локально однозначной функцией конечной точки.