где $S(x, X)$ — некоторая гладкая функция переменных x^i, X^i (пусть $\det(\partial^2 S/\partial x^i \partial X^j) \neq 0$). Доказать, что новые координаты также канонические. (Функция $S(x, X)$ называется *производящей функцией* канонического преобразования $(x, p) \mapsto (X, P)$.)

§ 35. Лагранжевы поверхности

1. Пучки траекторий и уравнение Гамильтона — Якоби. Для различных целей существенно знать свойства не индивидуальной траектории гамильтоновой системы, а целого пучка траекторий. Более точно, постановка вопроса такова: рассмотрим при $t = 0$ поверхность Γ размерности n в $2n$-мерном фазовом пространстве (x, p), заданную как график:

$$p_i = f_i(x^1, \ldots, x^n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Каждая точка поверхности Γ будет двигаться вдоль траекторий системы с гамильтонианом $H(x, p, t)$; в момент времени $t > 0$ получится сдвинутая поверхность Γ_t, а $\Gamma_0 = \Gamma$. Удобно рассматривать совокупность поверхностей Γ_t как $(n+1)$-мерную поверхность в расширенном фазовом пространстве (x, p, t, E); точки $(x(t), p(t), E(t), t)$, $E = H(x, p, t)$, дадут поверхность Γ^{n+1}, сечение которой уровнем $t = 0$ есть Γ и которая состоит целиком из траекторий, начавшихся в Γ. Нам, однако, понадобится несколько более широкий класс подобных поверхностей.

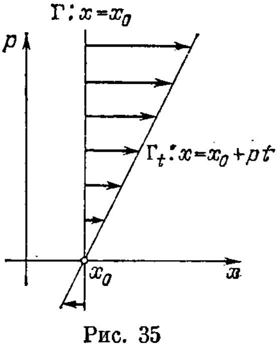

Рис. 35

Например: пусть $\Gamma = \Gamma_0$ есть поверхность $x = x_0$ (импульсы любые, рис. 35); мы получим в качестве Γ^{n+1} пучок всех траекторий, расходящихся из точки x_0 во все стороны. При $t = 0$ поверхность Γ_0 не задается как график функции $p = f(x)$, но при $t > 0$ она может быть таким графиком (хотя бы локально).

Определение 1. Поверхность Γ в фазовом пространстве (x, p) называется *лагранжевой*, если для всех кривых γ на поверхности Γ, начинающихся в любой точке $Q \in \Gamma$, укороченное действие $S = \int_\gamma p\,dx$ является локально однозначной функцией, зависящей лишь от конечной точки пути γ.

Определение 1′. Поверхность Γ^{n+1} в расширенном фазовом пространстве называется лагранжевой, если для всех путей γ на Γ^{n+1} с началом в точке Q действие $S = \int_\gamma (p\,dx - E\,dt)$ (где $E = H(x, p, t)$ на поверхности Γ^{n+1}) является локально однозначной функцией конечной точки.

Лемма 1. *Поверхность* Γ^n (*соответственно* Γ^{n+1}), *имеющая вид графика* $p_i = f_i(x)$, *где* $i = 1, \ldots, n$ (*или* $i = 0, 1, \ldots, n$ *для* Γ^{n+1}, $p_0 = E$, $x^0 = t$), *является лагранжевой в том и только в том случае, если*

$$\frac{\partial S(x)}{\partial x^i} = p_i \quad (\textit{для } \Gamma^n), \tag{2}$$

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x^i} = p_i \quad \textit{и} \quad \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = -H(x,p,t) \tag{3}$$

или

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = -H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) \quad (\textit{для } \Gamma^{n+1}).$$

Доказательство. Пусть S — локально однозначная функция. Так как $S = \int p\,dx - H(x,p,t)\,dt$ по определению, то $dS = p\,dx - H\,dt$. Отсюда следует $p = \frac{\partial S}{\partial x}$, $-H = \frac{\partial S}{\partial t}$. Обратно, если $p = \frac{\partial S}{\partial x}$, $-H = \frac{\partial S}{\partial t}$, то функция S локально однозначна по теореме Грина. Лемма доказана.

Действие $S(x, t)$ мы назовем действием пучка траекторий, а уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) = 0 \tag{4}$$

— *уравнением Гамильтона — Якоби.*

Если функция $S(x, t)$ известна, то поверхность Γ^{n+1} задается уравнениями $p = \frac{\partial S}{\partial x}$, $E = -\frac{\partial S}{\partial t}$, а ее сечение $t = t_0$ есть поверхность Γ^n_t, получающаяся из $\Gamma = \Gamma_0$ движением по времени вдоль траекторий гамильтоновой системы $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$, $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$.

Дадим теперь другое определение лагранжевой поверхности в фазовом пространстве (x, p) (или в расширенном фазовом пространстве (x, p, E, t)).

Определение 2. Поверхность Γ размерности n в фазовом пространстве называется лагранжевой, если кососимметрическое скалярное произведение любых ее касательных векторов равно нулю (т. е. ограничение формы $\Omega = \sum_i dx^i \wedge dp_i$ на Γ равно нулю).

Это определение лагранжевой поверхности геометрически инвариантно и не требует, чтобы она была представлена в виде графика функции $p_i = f_i(x^1, \ldots, x^n)$.

Простейшие лагранжевы поверхности имеют вид:

а) $\Gamma_{x_0} = \{x = x_0$, импульсы любые$\}$;

б) $\Gamma_{p_0} = \{p = p_0$, координаты любые$\}$.

Очевидно, при канонических преобразованиях лагранжевы поверхности переходят в лагранжевы. Таково, например, преобразование $x \to p$, $p \to -x$:

$$\Omega = dx^i \wedge dp_i \to -dp_i \wedge dx^i = dx^i \wedge dp_i = \Omega.$$

При этом поверхности Γ_{x_0} и Γ_{p_0} поменяются местами.

Теорема 1. *Если лагранжева поверхность в смысле определения 2 задана в виде графика $p_i = f_i(x)$, то найдется функция $S(x)$ такая, что $f_i = \dfrac{\partial S(x)}{\partial x^i}$, и обратно.*

Доказательство. Если поверхность Γ задана уравнениями $p_i = f_i(x)$, то ограничение формы Ω на Γ имеет вид

$$\Omega|_\Gamma = \sum dx^i \wedge dp_i(x) = \sum_{i,j} dx^i \wedge \frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^j.$$

Поэтому $\Omega|_\Gamma = \sum\limits_{i<j} \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x^j} - \dfrac{\partial f_j}{\partial x^i}\right) dx^i \wedge dx^j$. Если $\Omega|_\Gamma \equiv 0$, то $\dfrac{\partial f_i}{\partial x^j} \equiv \dfrac{\partial f_j}{\partial x^i}$. Это условие необходимо и достаточно для того, чтобы интеграл $S(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f_i(x)\, dx^i$ давал функцию, не зависящую от пути (формула Грина). Отсюда и следует наше утверждение.

Аналогичное утверждение, очевидно, имеет место и для расширенного фазового пространства (x, p, E, t).

Пусть $H = H(x, p)$ не зависит явно от времени. Тогда имеет место

Теорема 2. а) *Вектор* $\nabla H = \left(\dfrac{\partial H}{\partial p}, -\dfrac{\partial H}{\partial x}\right) = (\dot{x}, \dot{p})$ *касается поверхности* $H = E_0 = \text{const}$;

б) *вектор* ∇H *имеет нулевое скалярное произведение со всеми векторами, касательными к уровню энергии* $H = E_0$;

в) *любая n-мерная лагранжева поверхность, лежащая на уровне энергии* $H(x, p) = E_0$, *имеет вектор* ∇H *своим касательным вектором во всех своих точках. В частности, она целиком содержит траектории гамильтоновой системы с гамильтонианом* H, *имеющие с ней хотя бы одну общую точку.*

Доказательство. Необходимое и достаточное условие касания вектора ξ к поверхности $H = E_0$ дается уравнением $\xi^i \dfrac{\partial H}{\partial y^i} = 0$, $y = (x, p)$. Поэтому

$$\langle \xi, \nabla H \rangle = \xi^i g_{ij} (\nabla H^j) = \xi^i g_{ij} g^{jk} \frac{\partial H}{\partial y^k} = \xi^i \frac{\partial H}{\partial y^i} = 0.$$

Утверждения а), б) доказаны. Докажем утверждение в). Пусть P — точка лагранжевой поверхности Γ (размерности n), лежащей целиком на уровне энергии $H(x, p)=E_0$, и $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — базис касательного пространства к поверхности Γ в точке P. По условию лагранжевости имеем $\langle \xi_i, \xi_k\rangle = 0$. Рассмотрим вектор ∇H в точке P. Из б) следует, что $\langle \nabla H, \xi_i\rangle = 0$, $i=1, \ldots, n$. Скалярное произведение $\langle , \rangle$ невырождено $(\det g_{ij} \neq 0)$. Поэтому $\nabla H = \sum\limits_i \lambda_i \xi_i$. (Напомним, что линейное пространство с нулевым скалярным произведением имеет размерность не более n.) Следовательно, ∇H касается Γ. Это верно во всех точках поверхности Γ. Поэтому траектории гамильтониана H во всех точках из Γ ее касаются (и, значит, на ней лежат). Теорема доказана.

Следствие. *Рассмотрим любую лагранжеву поверхность S^{n-1} размерности $n-1$ на уровне $H(x, p)=E_0$. Из всех ее точек проведем траектории гамильтоновой системы в (x, p)-пространстве. Предположим, что получающаяся поверхность будет n-мерной. Тогда эта n-мерная поверхность Γ^n будет лагранжевой и будет лежать на уровне энергии E_0. Если (локально) поверхность Γ^n задается уравнением*

$$p_i = f_i(x) = \frac{\partial S_0}{\partial x^i}, \tag{5}$$

то функция $S_0(x)$ удовлетворяет укороченному уравнению Гамильтона — Якоби

$$E_0 = H\left(x, \frac{\partial S_0}{\partial x}\right). \tag{6}$$

При этом функция $S(x, t) = \int p\,dx - H\,dt$ имеет вид

$$S(x, t) = -E_0 t + S_0(x), \quad -\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right).$$

2. Случай гамильтонианов, являющихся однородными функциями первого порядка от импульсов. Следует отдельно остановиться на особенностях гамильтонова формализма для гамильтонианов $H(x, p)$, являющихся однородными функциями первого порядка от импульсов:

$$H(x, \lambda p) = \lambda H(x, p), \quad \lambda > 0. \tag{7}$$

Например, для лучей света в изотропной среде мы имели гамильтониан $H(x, p)=c(x)|p|$. Такие гамильтонианы определены лишь при $p \neq 0$, и достаточно знать лишь траектории при одном уровне энергии $H=E_0$ (например, $E_0=1$). Остальные траектории получаются из них подобием $p \to \lambda p$, $H \to \lambda H$.

Заметим также, что геодезические в метрике $g_{ij}(x)$ мы обычно получали из лагранжиана $L = g_{ij}v^i v^j$, которому отвечает гамильтониан $H = g^{ij}p_i p_j$, но они получаются также из гамильтониана $H' = \sqrt{H} = \sqrt{g^{ij}p_ip_j}$ (на уровне энергии $H = \text{const}$ соответствующие уравнения Гамильтона пропорциональны с постоянным множителем). Здесь также $H'(x, \lambda p) = \lambda H'(x, p)$, $\lambda > 0$.

Теорема 3. *Если (локальная) однопараметрическая группа преобразований Φ_t получена из гамильтониана $H(x, p)$ такого, что $H(x, \lambda p) = \lambda H(x, p)$ при $\lambda > 0$, то все преобразования Φ_t сохраняют форму $p\,dx = p_i\,dx^i$.*

Доказательство. Рассмотрим преобразования $\Phi_{\Delta t}$ при малых Δt. Имеем

$$p_i \to p_i' = p_i - \frac{\partial H}{\partial x^i}\Delta t, \quad x^i \to x^{i'} = x^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\Delta t,$$

$$dx^i \to dx^{i'} = dx^i + \Delta t\, d\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right).$$

Эти равенства верны с точностью до $O(\Delta t^2)$, так как (с той же точностью)

$$\Phi_{\Delta t}(p_i) = p_i' = p_i + \dot{p}_i \Delta t,$$

$$\Phi_{\Delta t}(x^i) = x^{i'} = x^i + \dot{x}^i \Delta t.$$

Для формы $p\,dx$

$$p_i' dx^{i'} = \left(p_i - \Delta t\,\frac{\partial H}{\partial x^i}\right)\left(dx^i + \Delta t\, d\left(\frac{\partial H}{\partial p^i}\right)\right) =$$

$$= p_i dx^i + \Delta t\left[-\frac{\partial H}{\partial x^i}dx^i + p_i d\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\right] + O(\Delta t^2).$$

Так как $p_i d\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = d\left(p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) - \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i$, то

$$p_i' dx^{i'} = p_i dx^i + \Delta t\left[-dH + d\left(p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\right] + O(\Delta t^2)$$

или

$$p'\,dx' = p\,dx + \Delta t\,df + O(\Delta t_2),$$

где $f = p\frac{\partial H}{\partial p} - H = L$. Если $H(x, \lambda p) = \lambda H(x, p)$, то

$$p\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H(x, \lambda p)}{\partial \lambda} = H(x, p).$$

Таким образом, $p'\,dx' = p\,dx + O(\Delta t^2)$; это показывает, что производная Ли $\frac{d}{dt}(p\,dx)$ равна нулю, т. е. форма $p\,dx$ не меняется с течением времени. Теорема доказана.

Определение 3. Поверхность Γ в фазовом пространстве называется *конической лагранжевой поверхностью*, если ограничение формы $p\,dx$ на поверхность Γ тождественно равно нулю.

Из теоремы 3 вытекает

Следствие. *Гамильтоновы системы, у которых* $H(x, \lambda p) = \lambda H(x, p)$, *сохраняют класс конических лагранжевых поверхностей.*

Поверхность Γ_{x_0} ($x = x_0$, импульсы любые) является конической, так как на ней $p\,dx = 0$. Наоборот, поверхность Γ_{p_0} ($p = p_0 \neq 0$, координаты любые) не является конической ($p\,dx \neq 0$).

Для любого гамильтониана, удовлетворяющего соотношению $H(x, \lambda p) = \lambda H(x, p)$, с поверхностью Γ_{x_0} связывается важный пучок траекторий, выходящих из одной точки. Рассмотрим $(n-1)$-мерную поверхность $H = E_0$ внутри Γ_{x_0}; эту поверхность размерности $n-1$ мы обозначим через $S_{x_0}^{n-1}$. Рассмотрим все траектории с началом только в точках из $S_{x_0}^{n-1}$. В любой момент $t > 0$ получим поверхность $S_{x_0}^{n-1}(t)$.

Определение 4. *Фронтом волны* в момент $t > 0$ для пучка траекторий, выпущенного при $t = 0$ из точки x_0, называется проекция фазовой поверхности $S_{x_0}^{n-1}(t)$ в x-пространство (это — поверхность размерности $n-1$ в x-пространстве, зависящая от времени t).

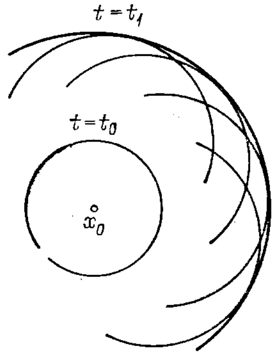

Рис. 36

Очевидно, в момент $t = 0$ проекция поверхности $S_{x_0}^{n-1}(0)$ в x-пространство есть одна точка x_0 (по определению).

Для поверхностей фронта волны имеет место «принцип Гюйгенса», позволяющий получить поверхность фронта при $t_1 > t_0 > 0$ из поверхности фронта в момент t_0. Оказывается, для этого нужно взять поверхность фронта при $t = t_0$; далее, с центрами (или началами) во всех ее точках нужно рассмотреть поверхности фронтов, отвечающие времени $t_1 - t_0$. Огибающая всех этих поверхностей и есть фронт волны в момент t_1 (рис. 36).

Пусть теперь имеется произвольная коническая поверхность Γ^n, т. е. поверхность, для которой $p\,dx|_{\Gamma^n} = 0$.

Лемма 2. *Проекция поверхности* Γ^n *в* x*-пространство имеет размерность* $\leqslant n-1$.

Доказательство. x-компоненты касательных векторов на Γ связаны линейным соотношением $p\,dx = 0$. Поэтому размерность касательного пространства к проекции не превосходит $n-1$. Лемма доказана.

Таким образом, поверхность Γ^n нельзя даже локально задать в виде графика $p_i = f_i(x)$ и связать с ней функцию $S(x)$. Поэтому мы, как и для разобранного примера поверхности Γ_{x_0}, выделяем внутри Γ^n часть $H(x, p)=E_0$, обозначаемую S^{n-1}. Согласно лемме 2 мы можем выпустить пучок траекторий из S^{n-1} и получить лагранжеву поверхность $\widetilde{\Gamma}^n = \bigcup\limits_{-\infty<t<\infty} S^{n-1}(t)$ на поверхности уровня $H(x, p)=E_0$, целиком состоящую из траекторий. Поверхность $\widetilde{\Gamma}^n$ уже может иметь (локально) вид $p_i = \frac{\partial S_0(x)}{\partial x^i}$. Для функции $S_0(x)$ имеем укороченное уравнение Гамильтона — Якоби

$$E_0 = H\left(x, \frac{\partial S_0(x)}{\partial x}\right). \tag{8}$$

Эту операцию можно сделать, если гамильтониан не зависит от времени.

Поскольку поверхность Γ^n является конической, то форма $p\,dx$ равна нулю на S^{n-1}. Следовательно, эта форма равна нулю также на каждой поверхности $S^{n-1}(t)$ (в силу теоремы 3). Поэтому функция $S_0(P) = \int\limits_{P_0}^{P} p\,dx$, задающая лагранжеву поверхность $\widetilde{\Gamma}^n$, постоянна на поверхности $S^{n-1}(t)$ с любым t. Кроме того, $\widetilde{\Gamma}^n$ лежит на уровне энергии $H=E_0$. Поэтому $E_0 = H\left(x, \frac{\partial S_0}{\partial x}\right)$.

Таким образом, поверхности уровня $S_0(x)=\mathrm{const}$ точно совпадают с проекциями поверхностей $S^{n-1}(t)$ в x-пространство. Итак, доказана

Теорема 4. *Поверхности уровня $S_0(x)=\mathrm{const}$ определенной выше укороченной функции действия S_0 совпадают с поверхностями фронта волны.*

Задача. Пусть в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ заданы n независимых функций $f_1(x, p), \ldots, f_n(x, p)$, которые попарно коммутируют: $\{f_i, f_j\}=0$. Показать, что поверхность, задаваемая в $\mathbb{R}^{2n}$ системой уравнений $f_1=0, \ldots, f_n=0$, лагранжева.

§ 36. Вторая вариация для уравнения геодезических

1. Формула второй вариации. Мы вывели в § 31 уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\delta S}{\delta x^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

для экстремалей функционала

$$S[\gamma] = \int\limits_{\gamma} L(x, \dot{x})\,dt; \tag{2}$$

выполнение этих уравнений является необходимым условием того,