мы, как и для разобранного примера поверхности Γ_{x_0}, выделяем внутри Γ^n часть $H(x, p)=E_0$, обозначаемую S^{n-1}. Согласно лемме 2 мы можем выпустить пучок траекторий из S^{n-1} и получить лагранжеву поверхность $\widetilde{\Gamma}^n = \bigcup\limits_{-\infty<t<\infty} S^{n-1}(t)$ на поверхности уровня $H(x, p)=E_0$, целиком состоящую из траекторий. Поверхность $\widetilde{\Gamma}^n$ уже может иметь (локально) вид $p_i = \dfrac{\partial S_0(x)}{\partial x^i}$. Для функции $S_0(x)$ имеем укороченное уравнение Гамильтона — Якоби

$$E_0 = H\left(x, \frac{\partial S_0(x)}{\partial x}\right). \tag{8}$$

Эту операцию можно сделать, если гамильтониан не зависит от времени.

Поскольку поверхность Γ^n является конической, то форма $p\,dx$ равна нулю на S^{n-1}. Следовательно, эта форма равна нулю также на каждой поверхности $S^{n-1}(t)$ (в силу теоремы 3). Поэтому функция $S_0(P) = \int\limits_{P_0}^{P} p\,dx$, задающая лагранжеву поверхность $\widetilde{\Gamma}^n$, постоянна на поверхности $S^{n-1}(t)$ с любым t. Кроме того, $\widetilde{\Gamma}^n$ лежит на уровне энергии $H=E_0$. Поэтому $E_0 = H\left(x, \dfrac{\partial S_0}{\partial x}\right)$.

Таким образом, поверхности уровня $S_0(x)=\text{const}$ точно совпадают с проекциями поверхностей $S^{n-1}(t)$ в x-пространство. Итак, доказана

Теорема 4. *Поверхности уровня $S_0(x)=\text{const}$ определенной выше укороченной функции действия S_0 совпадают с поверхностями фронта волны.*

Задача. Пусть в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ заданы n независимых функций $f_1(x, p), \ldots, f_n(x, p)$, которые попарно коммутируют: $\{f_i, f_j\}=0$. Показать, что поверхность, задаваемая в $\mathbb{R}^{2n}$ системой уравнений $f_1=0, \ldots, f_n=0$, лагранжева.

§ 36. Вторая вариация для уравнения геодезических

1. Формула второй вариации. Мы вывели в § 31 уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\delta S}{\delta x^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

для экстремалей функционала

$$S[\gamma] = \int\limits_{\gamma} L(x, \dot{x})\,dt; \tag{2}$$

выполнение этих уравнений является необходимым условием того, что вдоль некоторой кривой γ функционал $S[\gamma]$ имеет минимум среди всех кривых, начинающихся в точке P и кончающихся в точке Q. Как найти условие того, что кривая γ: $\{x^i = x^i(t)\}$ действительно дает минимум, если она удовлетворяет уравнениям Эйлера — Лагранжа?

Как мы знаем, для функций многих переменных $f(x^1, \ldots, x^N)$ необходимым условием для того, чтобы точка P была минимумом, является условие

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_P = 0, \quad i = 1, \ldots, N,$$

а достаточным, при соблюдении предыдущего условия,— положительная определенность квадратичной формы $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j$ в той же точке P. Поэтому для нахождения минимума для $S[\gamma]$, где γ удовлетворяет уравнениям Эйлера — Лагранжа, необходимо вычислить аналогичную второму дифференциалу билинейную форму (вторую вариацию)

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial\lambda\,\partial\mu} S[\gamma + \lambda\xi + \mu\eta]\right|_{\substack{\lambda=0\\ \mu=0}} = G_\gamma(\xi, \eta) = G_\gamma(\eta, \xi), \tag{3}$$

где η, ξ — векторные поля, заданные на кривой $\gamma(t)$ и обращающиеся в нуль в точках $\gamma(a) = P$ и $\gamma(b) = Q$.

Лемма 1. *Если* γ: $\{x^i = x^i(t)\}$ *удовлетворяет уравнениям Эйлера — Лагранжа, то имеет место формула*

$$G_\gamma(\xi, \eta) = \left.-\frac{\partial^2 S[\gamma + \lambda\xi + \mu\eta]}{\partial\lambda\,\partial\mu}\right|_{\substack{\lambda=0\\ \mu=0}} = -\int_a^b (J_{ij}\xi^j)\,\eta^i dt, \tag{4}$$

где

$$J_{ij}\xi^j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\dot{\xi}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j}\xi^j\right) - \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j}\dot{\xi}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}\xi^j. \tag{5}$$

Доказательство. Используя формулу первой вариации (см. § 31), имеем

$$\left.\frac{\partial^2 S[\gamma + \lambda\xi + \mu\eta]}{\partial\lambda\,\partial\mu}\right|_{\substack{\lambda=0\\ \mu=0}} = \left.\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left.\left(\frac{\partial}{\partial\mu} S[\gamma + \lambda\xi + \mu\eta]\right)\right|_{\mu=0}\right]\right|_{\lambda=0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\lambda}\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\eta^i dt\,\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}\xi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j}\dot{\xi}^j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j}\xi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\dot{\xi}^j\right)\right)\eta^i dt.$$

Лемма доказана.

Определение 1. Линейный оператор J, действующий на векторные поля $\xi(t)$, заданные вдоль кривой γ, называется *оператором Якоби.*

Мы разберем только один пример, когда уравнения Эйлера — Лагранжа совпадают с уравнениями геодезических. Здесь удобно брать действие в виде

$$S = \int_a^b \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j dt \tag{6}$$

(а не функционал длины $l = \int \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}\, dt$, хотя они и имеют одинаковые экстремали). Имеет место

Теорема 1. *Билинейная форма* $\left.\dfrac{\partial^2 S[\gamma + \lambda\xi + \mu\eta]}{\partial\lambda\, \partial\mu}\right|_{\substack{\lambda=0\\ \mu=0}} = G_\gamma(\xi, \eta)$ *для* $S = \int_a^b \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j dt$ *и любой геодезической* γ: $x^i = x^i(t)$ *имеет вид*

$$G_\gamma(\xi, \eta) = -\int_a^b \left(\nabla^2_{\dot{x}} \xi^i + \dot{x}^j \dot{x}^k \xi^l R^i{}_{jkl}\right) \eta^m g_{im} dt, \tag{7}$$

или

$$G_\gamma(\xi, \eta) = -\int_a^b \langle J\xi, \eta \rangle\, dt, \tag{8}$$

где

$$(J\xi)^i = \nabla^2_{\dot{x}} \xi^i + \dot{x}^j \dot{x}^k \xi^l R^i{}_{jkl}, \tag{9}$$

$R^i{}_{jkl}$ *— тензор кривизны, t — натуральный параметр вдоль геодезической* γ.

Доказательство. Для лагранжиана $L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$ формула первой вариации имеет вид (см. § 31)

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} S[\gamma + \lambda\xi]|_{\lambda=0} = -\int_a^b (\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) g_{kl} \xi^l dt = -\int_a^b \left\langle \nabla_{\dot{x}} \dot{x}, \xi \right\rangle dt.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda\, \partial\mu} S[\gamma + \lambda\xi + \mu\eta]|_{\substack{\lambda=0\\ \mu=0}} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\lambda} \int_a^b \left\langle \nabla_{\dot{x}} \dot{x}, \eta \right\rangle dt \Big|_{\lambda=0} = -\int_a^b \left\{ \left\langle \nabla_\xi \nabla_{\dot{x}} \dot{x}, \eta \right\rangle dt + \left\langle \nabla_{\dot{x}} \dot{x}, \nabla_\xi \eta \right\rangle \right\} dt.$$

Второе слагаемое под интегралом есть нуль на кривой γ в силу уравнения геодезических: $\nabla_{\dot{x}} \dot{x} = 0$. Преобразуем первое слагаемое. Имеем

$$\nabla_\xi \nabla_{\dot{x}} - \nabla_{\dot{x}} \nabla_\xi = R(\dot{x}, \xi), \quad \nabla_\xi \dot{x} = \nabla_{\dot{x}} \xi$$

в силу симметричности связности. Окончательно получаем

$$\nabla_\xi \nabla_{\dot{x}} \dot{x} = \nabla^2_{\dot{x}} \xi + R(\dot{x}, \xi)\, \dot{x},$$

откуда и вытекает наша теорема.

Пример. Рассмотрим двумерный случай. Введем около геодезической $\gamma(t)$ специальную систему координат (x, y), $x = x^1$, $y = x^2$, такую, что:

а) линия $(x, 0)$ есть сама геодезическая γ и x — натуральный параметр;

б) координата y ортогональна к геодезической, причем $g_{ij}(x, 0) = \delta_{ij}$.

В этом случае билинейная форма $G_\gamma(\xi, \eta)$ для пары полей $\xi(t)$, $\eta(t)$, нормальных к $\gamma(t)$, имеет вид

$$G_\gamma(\xi, \eta) = -\int_a^b \left(\frac{d^2}{dt^2}\xi^i + K(t)\xi^i\right)\eta_i dt, \tag{10}$$

где K — гауссова кривизна. Заметим, что $G_\gamma(\xi, \eta) \equiv 0$, если хотя бы одно из полей пропорционально касательному вектору $\dot{x}(t)$ с постоянным множителем.

Замечание. Формулу второй вариации можно обобщить и на случай «ломаных векторных полей», для которых производная $\nabla_{\dot{x}} \xi$ может иметь разрыв.

Задача. Докажите, что в случае ломаных векторных полей билинейная форма $G_\gamma(\xi, \eta)$ имеет вид

$$G_\gamma(\xi, \eta) = -\sum_{P_i} \langle \eta, \Delta_{P_i}(\nabla_{\dot{x}} \xi)\rangle - \int_a^b \langle J\xi, \eta\rangle\, dt, \tag{11}$$

где $\Delta_P(\nabla_{\dot{x}} \xi)$ — скачок ковариантной производной в точке P и суммирование ведется по всем точкам P_i разрыва величины $\nabla_{\dot{x}} \xi$.

2. Сопряженные точки и условие минимальности. Предположим, что метрика g_{ij} риманова. Условие минимальности геодезической γ состоит в том, что квадратичная форма $G_\gamma(\xi, \xi)$ положительно определена на векторных полях, обращающихся в нуль на концах геодезической γ. Выясним сначала, когда билинейная форма $G_\gamma(\xi, \eta)$ невырождена.

Определение 2. Векторное поле ξ вдоль экстремали γ, идущей из P в Q, называется *якобиевым*, если оно есть решение уравнения Якоби $J\xi=0$ и обращается в нуль в концах P и Q. В частности, для изучаемого случая $S=\int\langle\dot{x},\dot{x}\rangle\,dt$ имеем

$$J\xi^i=\nabla^2_{\dot{x}}\xi^i+\dot{x}^j\dot{x}^k\xi^l R^i_{jkl}=0,\quad t=1,\ldots,n. \tag{12}$$

Определение 3. Точки P и Q называются *сопряженными* вдоль геодезической γ, идущей из P в Q, если существует ненулевое якобиево поле ξ вдоль кривой γ.

Лемма 2. *Билинейная форма $G_\gamma(\xi,\eta)$ невырождена тогда и только тогда, когда концевые точки P и Q геодезической γ не сопряжены вдоль γ.*

Доказательство. Напомним, что билинейная форма $G_\gamma(\xi,\eta)$ называется невырожденной, если не существует такого векторного поля ξ, что $G_\gamma(\xi,\eta)=0$ для любого η (поля ξ и η обращаются в нуль на концах P и Q). Если поле ξ якобиево, то $G_\gamma(\xi,\eta)=0$ при любом η. Наоборот, пусть форма G_γ вырождена на векторе ξ, т. е. $G_\gamma(\xi,\eta)=0$ для любого η. Рассмотрим $\eta=\alpha(t)J\xi$, где функция $\alpha(t)$ неотрицательна и обращается в нуль на концах (при $t=a$ и $t=b$). Тогда из формулы второй вариации будем иметь

$$G_\gamma(\xi,\eta)=-\int_a^b\alpha(t)\langle J\xi,J\xi\rangle\,dt\equiv 0.$$

Отсюда следует $J\xi=0$. Поэтому концы сопряжены. Лемма доказана.

Докажем теперь следующее важное необходимое условие минимальности.

Теорема 2. *Если геодезическая γ, идущая из точки P в точку Q, содержит внутри себя пару сопряженных точек P', Q', то эта геодезическая γ не минимальна.*

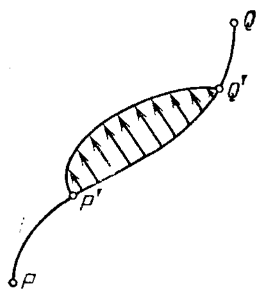

Рис. 37

Доказательство (для случая, когда точки P и Q не сопряжены вдоль γ). Тогда билинейная форма $G_\gamma(\xi,\eta)$ не вырождена. Поэтому для минимальной геодезической квадратичная форма $G_\gamma(\xi,\xi)$ должна быть положительно определенной: $G_\gamma(\xi,\xi)>0$, если ξ не есть тождественный нуль. Покажем, что при наличии сопряженных точек это требование не выполняется. Пусть $\bar{\xi}$ — поле Якоби, отвечающее точкам P', Q'. Построим «ломаное поле» ξ между P и Q, равное $\bar{\xi}$ между P' и Q' и нулю вне отрезка $P'Q'$ (рис. 37). Тогда в силу формулы (11)

$$G_\gamma(\xi,\xi)=0.$$

Это противоречит положительности формы G_γ. Теорема доказана.

Теорема 3. *На достаточно малом интервале длин геодезические дают минимум функционала действия $S[\gamma]$ среди всех гладких кривых, соединяющих те же точки. Поэтому каждая достаточно короткая геодезическая локально реализует кратчайшее расстояние между точками.*

Доказательство. Условие минимальности геодезической $\gamma(t)$ состоит в том, что квадратичная форма $G_\gamma(\xi, \xi)$ положительна для всех векторных полей ξ, обращающихся в нуль на концах. В силу формулы (8)

$$G_\gamma(\xi, \xi) = -\int_a^b [\langle \nabla_{\dot{x}}^2 \xi, \xi\rangle + \langle R(\dot{x}, \xi)\dot{x}, \xi\rangle]\, dt =$$

$$= \int_a^b [\langle \nabla_{\dot{x}} \xi, \nabla_{\dot{x}} \xi\rangle - \langle R(\dot{x}, \xi)\dot{x}, \xi\rangle]\, dt$$

(интегрирование по частям с учетом равенств $\xi(a) = \xi(b) = 0$). Для достаточно малого интервала длин Δl имеет место оценка

$$\left|\int_a^b \langle R(\dot{x}, \xi)\dot{x}, \xi\rangle\, dt\right| < c(\Delta l)\int_a^b \langle \nabla_{\dot{x}} \xi, \nabla_{\dot{x}} \xi\rangle\, dt, \tag{13}$$

где $c(\Delta l)$ — некоторая константа, зависящая от метрики g_{ij} и длины Δl, причем $c(\Delta l)$ стремится к нулю при $\Delta l \to 0$. Поскольку

$$\int_a^b \langle \nabla_{\dot{x}} \xi, \nabla_{\dot{x}} \xi\rangle\, dt > 0,$$

из этого вытекает наше утверждение.

Задача. Доказать неравенство (13). *Указание.* Если $\xi(a) = \xi(b) = 0$, то $|\xi| < \mathrm{const}\cdot\max\limits_{[a,b]}|\nabla_{\dot{x}}\xi|\,\Delta l$, где $\Delta l = |b - a|$.