Глава 6

МНОГОМЕРНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ. ПОЛЯ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

§ 37. Простейшие многомерные вариационные задачи

1. Уравнения Эйлера — Лагранжа. Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовыми координатами $x^1, \ldots, x^n$ область D с гладкой (или кусочно гладкой) границей ∂D. Рассмотрим линейное пространство F гладких вектор-функций на D: $F=\{f(x^1, \ldots, x^n);\ f=\{f^1, \ldots, f^k\}\}$. Область D мы будем называть областью изменения параметров $x^1, \ldots, x^n$. Рассмотрим гладкую функцию $L(x^\beta; p^j; q^i_\alpha)$ от трех групп переменных: x^β, $1\leqslant\beta\leqslant n$; p^j, $1\leqslant j\leqslant k$; q^i_α, $1\leqslant i\leqslant k$; $1\leqslant\alpha\leqslant n$. Функцию L назовем лагранжианом и построим функционал $I[f]$, определенный на F, следующим образом:

$$I[f]=\int_D L(x^\beta; f^j(x^\beta); f^i_{x^\alpha}(x^\beta))\, dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n,$$

где $\int_D$ обозначает кратный интеграл $\int\limits_D\ldots\int$ по n-мерной области D (для простоты будем считать, что область D ограничена в $\mathbb{R}^n$); $dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n=d^nx$ есть n-мерная форма объема в $\mathbb{R}^n$; $f^i_{x^\alpha}(x^\beta)=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(f^i(x^\beta))$. Сокращенно будем записывать $I[f]$ так: $I[f]=\int_D L(x^\beta; f^j; f^i_{x^\alpha})\, d^nx$.

Простейший случай: $n=1$ (одномерные вариационные задачи) был уже рассмотрен ранее: например, функционал длины дуги $l(\gamma)=\int_0^1\sqrt{g_{ij}(y)\dot y^i\dot y^j}\,dt$, и функционал действия пути $\gamma(t)$, $S(\gamma)=\int_0^1 g_{ij}(y)\dot y^i\dot y^j\,dt$, определенные на кусочно гладких кривых $\gamma(t)=(y^1(t), \ldots, y^k(t))$ в римановом пространстве.

Нас будут интересовать в этой главе многомерные функционалы: $n>1$. Простейшим примером служит функционал площади на двумерной поверхности, $I[f]=\iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}\,dx\,dy$, где $D\subset \subset \mathbb{R}^2(x,y)$ — область изменения параметров x, y; $f(x,y)=(u^1(x,y),\ u^2(x,y),\ u^3(x,y))$ — двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$ (u^1,u^2,u^3) с индуцированной метрикой $dl^2=E\,dx^2+2F\,dx\,dy+G\,dy^2$;

$$L(x,\ y;\ f;\ f_x,\ f_y)=L(f_x,\ f_y)=\sqrt{EG-F^2}=$$
$$=\sqrt{\langle f_x, f_x\rangle\langle f_y, f_y\rangle-\langle f_x, f_y\rangle^2}.$$

Вернемся к рассмотрению функционалов общего вида.

Рассмотрим «точку» $f\in F$ (F — область определения функционала I). Пусть η — гладкая функция, заданная на области D и являющаяся финитной, т. е. равной нулю вне открытого множества, замыкание которого целиком содержится в D. В частности, будем считать, что $\eta=0$ на границе ∂D области D. Вообще для наших целей достаточно рассматривать функции с достаточно малым носителем. Назовем такие функции возмущениями функции f, если $f+\varepsilon\eta\in F$. Здесь ε — малый параметр. Теперь строим выражение $\frac{1}{\varepsilon}(I[f+\varepsilon\eta]-I[f])$ и, переходя к пределу (по ε), получаем функцию

$$\left.\frac{dI[f+\varepsilon\eta]}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int\frac{\delta I}{\delta f}\,\delta f\,d^nx,\quad \delta f=\eta, \tag{1}$$

которую естественно назвать «производной функционала I в точке f по направлению η». Вектор $\frac{\delta I}{\delta f}=\left(\frac{\delta I}{\delta f^i}\right)$, определяемый равенством (1), называется *вариационной производной* функционала $I[f]$.

Определение 1. Функцию $f_0\in F$ мы назовем *стационарной* (или *экстремальной, критической*) функцией для функционала I, если $\frac{\delta I[f_0]}{\delta f}\equiv 0$, т. е. выражение (1) обращается в нуль для любого финитного возмущения $\eta=\delta f$ такого, что $f+\varepsilon\eta\in F$.

Перейдем к аналитическому исследованию производной $\frac{\delta I[f_0]}{\delta f}$:

$$\delta I[f]=\int\limits_D\left[L\left(x^\beta;f^j+\varepsilon\eta^j;f^i_{x^\alpha}+\varepsilon\eta^i_{x^\alpha}\right)-L\left(x^\beta;f^j;f^i_{x^\alpha}\right)\right]d^nx.$$

Разлагая подынтегральное выражение в ряд Тейлора, получим

$$\delta I[f]=\int\limits_D\left[\sum_{j=1}^k\frac{\partial L}{\partial f^j}\varepsilon\eta^j+\sum_{i=1}^k\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\varepsilon\eta^i_{x^\alpha}+o(\varepsilon)\right]d^nx=$$
$$=\varepsilon\int\limits_D\sum_{i=1}^k\left[\frac{\partial L}{\partial f^i}\eta^i+\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i_{x^\alpha}\right]d^nx+\int\limits_D o(\varepsilon)\,d^nx.$$

Проинтегрируем по частям. Получаем

$$\delta I[f] = \varepsilon \int_D \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i\right) d^n x + \\ + \varepsilon \int_D \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\right)\right)\eta^i d^n x + \int_D o(\varepsilon)\, d^n x.$$

В первом интеграле интегрирование по переменной x^α можно отделить от интегрирования по всем остальным переменным $x^1, \ldots, \widehat{x^\alpha}, \ldots, x^n$. Получаем

$$\int_D \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i\right) d^n x = \int_{x^1,\ldots,\widehat{x^\alpha},\ldots,x^n}\left[\int_P^Q \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i\right) dx^\alpha\right] d^{n-1}x$$

(P и Q зависят от $x^1, \ldots, \widehat{x^\alpha}, \ldots, x^n$; $d^{n-1}x = dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\alpha} \wedge \wedge dx^n$). Поскольку во внутреннем интервале $\int_P^Q$ на переменные $x^1, \ldots, \overline{x^\alpha}, \ldots, x^n$ можно смотреть как на параметры, то получим

$$\int_D \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i\right) d^n x = \int_{x^1,\ldots,\widehat{x^\alpha},\ldots,x^n}\left[\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i\Big|_Q - \frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i\Big|_P\right] d^{n-1}x \equiv 0,$$

так как $\eta^i(Q) = \eta^i(P) = 0$ (см. выше). Итак,

$$\delta I[f] = \varepsilon \int_D \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\right)\right]\eta^i d^n x + \int_D o(\varepsilon)\, d^n x.$$

Отсюда

$$\frac{\delta I[f]}{\delta f^i} = \frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\right) \qquad (2)$$

$\left(\text{так как } \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_D o(\varepsilon)\, d^n x = 0\right)$.

Если $f_0 \in F$ — стационарная (экстремальная) функция для $I[f]$, то для любого финитного возмущения η выполнено тождество

$$\int_D \sum_{i=1}^{k}\eta^i\left[\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\right)\right]\Bigg|_{f=f_0} d^n x = 0,$$

откуда

$$\frac{\delta I[f]}{\delta f^i}=\frac{\partial L}{\partial f^i}-\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\right)=0\quad(1\leqslant i\leqslant k). \tag{3}$$

Система дифференциальных уравнений (3) называется системой уравнений Эйлера — Лагранжа для функционала I. Оформим предыдущие результаты в виде теоремы.

Теорема 1. *Функция $f_0 \in F$ является стационарной для функционала $I[f]$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе уравнений Эйлера — Лагранжа* (3).

2. Тензор энергии-импульса. Рассмотрим функционал вида $I[f]=\int_D L\left(f^j, f^i_{x^k}\right)d^n x$, у которого лагранжиан L не зависит явно от переменных x^i, $1\leqslant i\leqslant n$. Экстремальные функции f (описывающие «движение системы») являются решениями системы уравнений Эйлера —Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial f^i}-\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^k}}\right)=0. \tag{4}$$

Поступая далее по аналогии с тем, как поступают в механике при выводе закона сохранения энергии, выполним следующие преобразования:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}=\frac{\partial L}{\partial f^k}\frac{\partial f^k}{\partial x^i}+\frac{\partial L}{\partial f^\alpha_{x^k}}\frac{\partial\left(f^\alpha_{x^k}\right)}{\partial x^i}.$$

Подставляя сюда (4), получаем

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial f^\alpha_{x^k}}\right)\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}+\frac{\partial L}{\partial f^\alpha_{x^k}}\frac{\partial\left(f^\alpha_{x^k}\right)}{\partial x^i}.$$

Так как $\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f^\alpha_{x^k}\right)=\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i\,\partial x^k}=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(f^\alpha_{x^i}\right)$, то

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial f^\alpha_{x^k}}\right)\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}+\frac{\partial L}{\partial f^\alpha_{x^k}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^k}\left(f^\alpha_{x^i}\right)=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial f^\alpha_{x^k}}f^\alpha_{x^i}\right).$$

В то же время $\frac{\partial L}{\partial x^i}=\delta^k_i\frac{\partial L}{\partial x^k}$, а потому

$$\frac{\partial L}{\partial x^k}\delta^k_i=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial f^\alpha_{x^k}}f^\alpha_{x^i}\right),$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\delta^k_i L-f^\alpha_{x^i}\frac{\partial L}{\partial f^\alpha_{x^k}}\right)=0. \tag{5}$$

Введем обозначение

$$T_i^k = f_{x^i}^\alpha \frac{\partial L}{\partial f_{x^k}^\alpha} - \delta_i^k L. \tag{6}$$

Тогда соотношение (5) примет вид

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0. \tag{7}$$

Это уравнение означает, что дивергенция тензора T_i^k во всей области D равна нулю.

Замечание. Верхние и нижние индексы в евклидовых координатах неразличимы. В псевдоевклидовом пространстве с метрикой g_{ij} можно определить тензор T_{ik} следующим образом:

$$T_{ik} = g_{kl} f_{x^i}^\alpha \frac{\partial L}{\partial f_{x^l}^\alpha} - g_{ik} L = g_{kl} T_i^l. \tag{8}$$

Определение 2. Тензор T_i^k называется *тензором энергии-импульса* данной системы (с лагранжианом $L(f, f_{x^\alpha})$).

Уравнение $\dfrac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0$ не определяет однозначно тензор энергии-импульса. В самом деле, к тензору T_i^k, определенному формулой (6) или (8), можно добавить сумму вида $\dfrac{\partial}{\partial x^l} \psi_i^{kl}$, где ψ_i^{kl} — любой тензор, кососимметрический по индексам k, l. Тогда, очевидно, новый тензор $\widetilde{T}_i^k = T_i^k + \dfrac{\partial \psi_i^{kl}}{\partial x^l}$ также удовлетворяет соотношению (7), поскольку $\dfrac{\partial^2 \psi_i^{kl}}{\partial x^k \partial x^l} = 0$.

Определенный выше тензор T_{ik}, вообще говоря, не симметричен, однако если рассматривать его с точки зрения уравнения (7), то его можно сделать симметрическим (с сохранением (7)) путем добавления соответствующего кососимметрического (по i, k) тензора вида $\sum\limits_l \dfrac{\partial}{\partial x^l}(\psi_{ikl})$. (Достаточно потребовать, чтобы кососимметрическим по i, k был тензор ψ_{ikl}, т. е. чтобы этот тензор был кососимметрическим по всем своим индексам). Однозначное определение тензора энергии-импульса как симметрического тензора играет особую роль в некоторых физических вопросах (см. об этом ниже).

В дальнейшем основные приложения понятия тензора энергии-импульса будут у нас сосредоточены вокруг вариационных задач в четырехмерном псевдоримановом пространстве — в частности, пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^4$, отнесенном к координатам x^0, x^1,

x^2, x^3, где x^0 пропорционально t (времени), а x^1, x^2, x^3 — пространственные координаты.

Введем 4-мерный вектор импульса системы с лагранжианом L. Для этого мы воспользуемся тензором энергии-импульса T_{ik}.

Пусть $dS_k = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijmk}dx^i \wedge dx^j \wedge dx^m$ — стандартные 3-формы на координатных трехмерных гиперплоскостях (см. задачу 3 к § 26).

Определение 3. Вектор $P = (P_0, P_1, P_2, P_3)$, где

$$P_i = \lambda \int\limits_{x^0=\mathrm{const}} T_i^k dS_k, \quad i = 0, 1, 2, 3, \ \lambda = \mathrm{const},$$

называется *4-вектором импульса (с нижними индексами)* системы с лагранжианом L.

Замечание. Компоненту $T_0^0 = \dot{f}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{f}^\alpha} - L$ (точка обозначает производную по $x^0 = ct$) по аналогии с формулой для энергии (31.7) следует рассматривать как *плотность энергии*. Поэтому $\int T_0^0 d^3x \,(d^3x = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$ есть полная энергия системы. Но мы имеем для временно́й компоненты P_0 из определения 3 следующее выражение: $P_0 = \lambda \int\limits_{x^0=\mathrm{const}} T_0^0 d^3x$. Обычно полагают $\lambda = 1/c$, тогда компонента P_0 совпадает с полной энергией системы, умноженной на $1/c$ (как и для 4-вектора импульса релятивистской частицы — см. § 32).

Утверждение 1. *Условие* $\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0$ *эквивалентно условию сохранения вектора импульса* P.

Доказательство. Будем считать что рассматриваемые поля f — решения уравнений Эйлера — Лагранжа — равны нулю вне достаточно большого шара трехмерного пространства (x^1, x^2, x^3) (или стремятся к нулю быстрее чем $1/r^2$, где $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$). Рассмотрим цилиндр C в пространстве Минковского, основания D_1 и D_2 которого заданы уравнениями $x^0 = x_1^0$ и $x^0 = x_2^0$, а радиус R достаточно велик. Пусть П — боковая поверхность цилиндра. Из условия $\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0$ и формулы Стокса следует, что $\int\limits_C T_i^k dS_k = 0$ при каждом i. Поэтому

$$\left(\int\limits_{D_2} - \int\limits_{D_1} + \int\limits_{\Pi}\right) T_i^k dS_k = 0.$$

Интеграл по боковой поверхности П можно не учитывать (стремится к нулю, когда радиус цилиндра R стремится к бесконечности). При $R\to\infty$ получаем

$$P_i(x_1^0)=\int\limits_{x^0=x_1^0} T_i^k dS_k=\int\limits_{x^0=x_2^0} T_i^k dS_k=P_i(x_2^0).$$

Утверждение доказано.

Лемма 1. *Вектор импульса системы не меняется при замене* T_i^k *на* $\widetilde{T}_i^k=T_i^k+\sum\limits_l \frac{\partial\psi_i^{kl}}{\partial x^l}$, *где* ψ_i^{kl} — *тензор, кососимметрический по* k, l.

Доказательство. Компоненты P_i имеют вид $\lambda\int\limits_{x^0=\text{const}} T_i^k dS_k$; следовательно, надо доказать, что $\int\frac{\partial\psi_i^{kl}}{\partial x^l}dS_k=0$. В силу косой симметричности ψ_i^{kl} по k, l имеем

$$\int\limits_S\frac{\partial\psi_i^{kl}}{\partial x^l}dS_k=\frac{1}{2}\int\limits_S\left(dS_k\frac{\partial\psi_i^{kl}}{\partial x^l}-dS_l\frac{\partial\psi_i^{kl}}{\partial x^k}\right).$$

Справа стоит интеграл вида $\int\limits_S d\omega_i^{(2)}$, где $\omega_i^{(2)}$ есть 2-форма на трехмерной поверхности S, задаваемой уравнением $x^0=\text{const}$. В силу формулы Стокса $\int\limits_S d\omega_i^{(2)}=\int\limits_{\partial S}\omega_i^{(2)}$, где ∂S — двумерная замкнутая поверхность в S (граница, «удаленная на бесконечность»), а потому $\int\limits_{\partial S}\omega_i^{(2)}=0$. Лемма доказана.

Если нам дана система с лагранжианом L, то ее тензор энергии-импульса $T^{ik}=g^{is}T_s^k$ в физически интересных примерах можно сделать симметричным тензором, не меняя вектора импульса. Пусть тензор T^{ik} симметричен.

Выведем из симметричности тензора T^{ik} так называемый «закон сохранения момента импульса».

Определение 4. *Моментом импульса* называется тензор

$$M^{ik}=\int\left(x^i dP^k-x^k dP^i\right)=\frac{1}{c}\int\limits_{x^0=\text{const}}\left(x^iT^{kl}-x^kT^{il}\right)dS_l.$$

Здесь интегрирование выполняется по трехмерной области S. Эта формула является естественным обобщением классической формулы для момента импульса, вычисленного для системы частиц (см. § 32)

$$M^{ik}=\sum\left(P^kx^i-P^ix^k\right),$$

где суммирование выполняется по всем частицам системы.

Лемма 2. *Если тензор энергии-импульса T^{ik} симметричен, то тензор M^{ik} момента импульса сохраняется* *).

Доказательство. Как и выше, мы должны доказать, что

$$M^{ik}(x_1^0) = \frac{1}{c}\int\limits_{D_1}(x^iT^{kl} - x^kT^{il})\,dS_l$$

совпадает с

$$M^{ik}(x_2^0) = \frac{1}{c}\int\limits_{D_2}(x^iT^{kl} - x^kT^{il})\,dS_l,$$

где D_1 и D_2 задаются, например, уравнениями $x^0 = x_1^0$, $x^0 = x_2^0$. В силу сделанных ранее замечаний и формулы Стокса достаточно убедиться в том, что дивергенция подынтегрального выражения в M^{ik} равна нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x^l}(x^iT^{kl} - x^kT^{il}) = 0.$$

Вычисляя производные, получим

$$\frac{\partial}{\partial x^l}(x^iT^{kl} - x^kT^{il}) = T^{ki} - T^{ik} = 0$$

в силу симметричности тензора T^{ik} и уравнения $\dfrac{\partial T^{kl}}{\partial x^l} = 0$. Лемма доказана.

Перейдем к конкретным примерам многомерных вариационных задач.

3. Уравнения электромагнитного поля. Уравнения электромагнитного поля (уравнения Максвелла) являются уравнениями Эйлера — Лагранжа для функционала действия $S = S_f + S_m + S_{mf}$, которое мы сейчас опишем. Слагаемое S_m — это та часть действия, которая определяется только самими частицами (зарядами), движущимися в поле (т. е. S_m — это действие частиц в отсутствие поля). Обычно это действие определяется так: $S_m = -\sum mc\int\limits_a^b dl$, где сумма берется по всем частицам, движущимся в поле, m — масса частицы, c — скорость света, интеграл $\int\limits_a^b dl$ берется вдоль мировой линии в $\mathbb{R}^4_{1,3}$ между двумя фиксированными событиями: нахождением частицы в начальном и ко-

*) Правильнее было бы сказать, что общефизическое определение сохраняющегося момента сведется к приведенной выше наглядной формуле, если тензор энергии-импульса симметричен.

нечном положениях в моменты времени t_1, t_2; l — длина дуги. Это действие можно представить в трехмерном виде: $S_m = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt$, где L — функция Лагранжа, $L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, v — трехмерная скорость (см. § 32).

Слагаемое S_{mf} — это та часть действия, которая обусловлена взаимодействием между частицами и полем. Обычно это действие определяется так: $S_{mf} = -\sum\limits_{(j)} \frac{e_j}{c}\int A_k^{(j)}dx^k$, где сумма берется по всем частицам j, e_j — заряды, интеграл берется вдоль мировой линии частицы (как и предыдущий интеграл). Свойства поля характеризуются 4-вектором $\{A_i\}$, который обычно называется 4-потенциалом; его компоненты A_i зависят от времени и пространственных координат. В интеграле S_{mf} значения вектора $\{A_i\}$ вычисляются в точках мировой линии частицы j, вдоль которой ведется интегрирование. Свойства частицы j с точки зрения ее взаимодействия с электромагнитным полем определяются только одним параметром — зарядом e_j, который и включен в действие S_{mf}. Итак, действие $S_m + S_{mf}$ для заряда в электромагнитном поле принимает вид

$$\int\limits_a^b \left(-mc\,dl - \frac{e}{c}A_k dx^k\right).$$

Слагаемое S_f — это та часть действия, которая зависит только от свойств самого поля; иными словами, S_f есть действие для поля в отсутствие зарядов. Слагаемое S_f несущественно, если мы интересуемся только движением зарядов в данном электромагнитном поле, но это слагаемое становится существенным, как только мы ставим задачу о нахождении уравнений, определяющих само поле.

Напомним, что три пространственные компоненты $\{A^1, A^2, A^3\}$ 4-вектора образуют трехмерный вектор $\mathbf{A}$, называемый *векторным потенциалом* поля. Временна́я компонента A^0 имеет вид $A^0 = \varphi$, где вещественная функция φ называется *скалярным потенциалом* поля. Здесь индексы поднимаются при помощи метрики Минковского.

Напомним также, что *напряженностью электрического поля* называется вектор $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}(\varphi)$ (это трехмерный вектор). Далее, *напряженностью магнитного поля* называется (по определению) трехмерный вектор $\mathbf{H} = \operatorname{rot}(\mathbf{A})$. Электромагнитное поле, у которого $\mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{H} = 0$, называется *электрическим полем*; если же $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{H} \neq 0$, то говорят о *магнитном поле*.

Как обычно, обозначим через $F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ *тензор электромагнитного поля.* Тогда действие S_f (см. выше) принимается равным

$$S_f=a\int 2\left(E^2-H^2\right)d^4x,$$

где $H^2=\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle$, $E^2=\langle \mathbf{E}, \mathbf{E}\rangle$ — скалярные квадраты трехмерных векторов; a — некоторая постоянная; интеграл берется по всем пространственным координатам и по всему трехмерному пространству, а по переменной x^0 (пропорциональной времени) — между двумя фиксированными моментами. Напомним, что $F_{ik}^2\equiv F_{ik}F^{ik}=2\left(H^2-E^2\right)$ (F_{ik} — кососимметричный тензор). Постоянная a обычно выбирается равной — $1/16c\pi$. Тогда

$$S_f=\frac{1}{16c\pi}\int 2\left(\mathbf{H}^2-\mathbf{E}^2\right)d^4x=-\frac{1}{16c\pi}\int F_{ik}^2d^4x.$$

Итак, полное действие S для электромагнитного поля с находящимися в нем зарядами имеет вид

$$S=-\sum\int mc\,dl-\sum\int\frac{e}{c}A_kdx^k-\frac{1}{16c\pi}\int F_{ik}^2d^4x.$$

До сих пор мы рассматривали заряды как точечные, однако иногда удобно считать заряд распределенным во всем пространстве непрерывным образом. Если ρ — плотность заряда, то тогда $\rho\,dV$ — заряд, находящийся в объеме $dV=d^3x$ (в трехмерном пространстве); ρ зависит от x^1, x^2, x^3 и времени t.

Рассмотрим мировые линии зарядов в $\mathbb{R}_1^4$, и пусть $\frac{dx^i}{dt}$ есть 4-вектор скорости зарядов. Тогда 4-вектор j^i, где $j^i=\rho\frac{dx^i}{dt}$, называется *4-вектором тока.*

Три пространственные компоненты j^1, j^2, j^3 этого 4-вектора образуют обычный трехмерный вектор тока $\mathbf{j}=\rho\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — скорость заряда в данной точке. Составляющая j^0 равна $c\rho$. Прямое вычисление показывает, что в терминах вектора тока j^i действие можно записать в виде

$$S=-\sum\int mc\,dl-\frac{1}{c^2}\int A_ij^id^4x-\frac{1}{16c\pi}\int F_{ik}^2d^4x$$

(проверьте!).

Теперь перейдем к нахождению уравнений поля. При этом будем считать заданным движение зарядов. Это означает, что при выводе уравнений Эйлера варьированию должны подвергаться только потенциалы поля (т. е. 4-вектор потенциала A_i).

Итак, поскольку траектории зарядов не варьируются, то $\delta S_m=0$, а в слагаемом S_{mf} не должен варьироваться ток j^i, так как $j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}$. Имеем

$$\delta S = \delta (S_{mf} + S_f) = -\int \left(\frac{1}{c^2} j^i \delta A_i + \frac{1}{16c\pi} \delta \left(F_{ik}^2 \right) \right) d^4x =$$

$$= -\int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik} \delta F_{ik} \right\} d^4x = 0.$$

Так как $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$, то

$$\delta S = -\int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik} \delta \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) \right\} d^4x =$$

$$= -\int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} (\delta A_k) - \frac{1}{8\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} (\delta A_i) \right\} d^4x.$$

Поскольку $F_{ik} = -F_{ki}$, то

$$\delta S = -\int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} j^i \delta A_i - \frac{1}{4\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} (\delta A_i) \right\} d^4x.$$

Второй интеграл преобразуем путем интегрирования по частям:

$$\delta S = -\int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{4\pi} \delta A_i \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right\} d^4x - \frac{1}{4\pi c} \int F^{ik} \delta A_i dS_k \Big|_P^Q.$$

В последнем слагаемом интегрирование выполняется по границе четырехмерной области; при этом границей области по пространственным координатам является «бесконечность», где поля аннулируются (а потому и $F^{ik} \equiv 0$); границей области по времени являются два фиксированных момента времени t_1, t_2; в этих точках аннулируются вариации потенциалов $\{\delta A_i\}$.

Таким образом, последнее слагаемое равно нулю. Итак, $\int \left(\frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right) \delta A_i d^4x = 0$. В силу произвольности вариаций δA_i получаем

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i. \tag{9}$$

Это уравнения Эйлера — Лагранжа, возникающие при варьировании потенциалов полей в действии S. Запишем полученные четыре уравнения ($i = 0, 1, 2, 3$) в трехмерной форме. Напомним явный вид тензора F^{ik}:

$$(F^{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

(тензор записан в координатах $x^0=ct$, $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$, см. § 21). Первое уравнение (при $i=1$) имеет, следовательно, вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial F^{10}}{\partial t}+\frac{\partial F^{11}}{\partial x}+\frac{\partial F^{12}}{\partial y}+\frac{\partial F^{13}}{\partial z}=-\frac{4\pi}{c}j^1.$$

Отсюда $-\frac{\partial H_z}{\partial y}+\frac{\partial H_y}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}=-\frac{4\pi}{c}j_x$. Аналогично преобразуются и уравнения для $i=2$, 3, что окончательно дает

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{10}$$

Нулевое уравнение (при $i=0$) дает

$$\frac{\partial(E_x)}{\partial x}+\frac{\partial(E_y)}{\partial y}+\frac{\partial(E_z)}{\partial z}=\frac{4\pi}{c}c\rho,$$

т. е.

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho. \tag{11}$$

Уравнения (10), (11) и образуют вторую пару уравнений Максвелла. Напомним первую пару уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \tag{12}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=0. \tag{13}$$

Уравнения (10)—(13) определяют электромагнитное поле и являются основными уравнениями электродинамики.

Найдем теперь явное выражение для тензора энергии-импульса электромагнитного поля при условии отсутствия заряда. Действие S_f имеет вид $-\frac{1}{16c\pi}\int F_{ik}^2 d^4x$, поэтому в терминах п. 2 настоящего параграфа функция L имеет вид

$$L=-\frac{1}{16c\pi}F_{ik}^2=-\frac{1}{16c\pi}\left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k}-\frac{\partial A_k}{\partial x^l}\right)^2.$$

Роль величин f^j (см. п. 2) играют здесь компоненты потенциала A_i. Следовательно, по определению тензора энергии-импульса T_j^k получаем

$$T_i^k=\frac{\partial A_l}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k}\right)}-\delta_i^k L.$$

Найдем $\dfrac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial A_l}{\partial x^k}\right)}$. Для этого вычислим дифференциал dL. Имеем

$$dL = -\frac{1}{8\pi c} F^{kl}\left(d\frac{\partial A_l}{\partial x^k} - d\frac{\partial A_k}{\partial x^l}\right) =$$

$$= -\frac{1}{8\pi c}\left(F^{kl} d\frac{\partial A_l}{\partial x^k} - F^{kl} d\frac{\partial A_k}{\partial x^l}\right) = -\frac{1}{4\pi c} F^{kl} d\frac{\partial A_l}{\partial x^k}.$$

Отсюда $\dfrac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial A_l}{\partial x^k}\right)} = -\dfrac{1}{4\pi c} F^{kl}$; следовательно,

$$T_i^k = -\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial A_l}{\partial x^i} F^{kl} + \frac{1}{16\pi c}\delta_i^k F_{lm}F^{lm}.$$

Поднимая индекс i при помощи метрики Минковского g^{ik}, получим

$$T^{ik} = -\frac{g^{im}}{4\pi c}\frac{\partial A_l}{\partial x^m} F^{kl} + \frac{1}{16\pi c} g^{ik} F_{lm}F^{lm}.$$

Полученный тензор энергии-импульса пока что не симметричен. Выше мы предъявили один из рецептов удаления кососимметричной части тензора T^{ik}. Применив этот рецепт в нашем случае, вычтем из T^{ik} сумму вида $\dfrac{1}{4\pi c}\dfrac{\partial A^i}{\partial x^l} F^{kl}$, которую можно представить как $\dfrac{\partial}{\partial x^l}(\psi^{ikl})$ (см. выше). В самом деле,

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^l} F^{kl} = \frac{\partial}{\partial x^l}(A^i F^{kl}) - A^i \frac{\partial F^{kl}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l}(A^i F^{kl}),$$

так как $\dfrac{\partial F^{kl}}{\partial x^l} = 0$ в силу уравнений Максвелла, описывающих поле в отсутствие зарядов $(j = 0)$.

Как было показано в п. 2, величина $\dfrac{\partial}{\partial x^l}(\psi^{ikl})$ может быть добавлена к тензору энергии-импульса без изменения вектора импульса системы.

Так как $\dfrac{\partial A_l}{\partial x^i} - \dfrac{\partial A_i}{\partial x^l} = F_{il}$, то окончательно для симметричного тензора энергии-импульса электромагнитного поля получаем

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi c}\left(-F^{il}F_l^k + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm}F^{lm}\right). \tag{13'}$$

Задача. Пусть плотность зарядов ρ равна нулю, вектор-потенциал электромагнитного поля A_i зависит от одной переменной x и имеет вид $A_i(x-ct)$, $i=0, 1, 2, 3$. Если $A_i(x)$ — гладкая функция, при всех x ограниченная по модулю общей константой, то все алгебраические инварианты (собственные значения) электромагнитного поля тождественно равны нулю (доказать!). Это случай электромагнитных волн, распространяющихся вдоль оси x.

4. Уравнения гравитационного поля. Пусть в M^4 задана метрика g_{ij} и Γ^i_{jk} — симметричная связность, согласованная с этой метрикой. Через x^0, x^1, x^2, x^3 обозначим криволинейные координаты в M^4. В физике квадрат элемента длины dl^2 в M^4 отождествляют с гравитационным полем, $dl^2=g_{ij}\,dx^i\,dx^j$, $g_{ij}=g_{ji}$. Пусть $g=\det(g_{ij})$. В инерциальной системе отсчета при использовании евклидовых пространственных координат $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$ и времени $x^0=ct$ получим $dl^2=(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2$ (напомним, что такие координаты называются псевдоевклидовыми). Пространство-время, в котором глобально введены такие координаты, называется *плоским*.

Мы будем в дальнейшем рассматривать в M^4, вообще говоря, переменную псевдориманову метрику (такое пространство-время M^4 иногда называют *кривым*, в отличие от плоского). Однако в каждой отдельной точке $x_0\in M^4$ можно, конечно, привести g_{ij} к диагональному виду путем соответствующего преобразования координат в некоторой окрестности точки x_0. После приведения к диагональному виду матрица метрического тензора g_{ij} имеет одно положительное и три отрицательных собственных значения, а потому $g=\det(g_{ij})<0$.

Пусть $d\Omega=\sqrt{-g}\,d^4x$ — стандартная 4-форма объема. Через $R^i{}_{jkl}$ обозначим *тензор кривизны Римана*, построенный по аффинной связности Γ^i_{jk}, согласованной с g_{ij}. Напомним (см. § 30), что после опускания верхнего индекса у тензора $R^i{}_{jkl}$ получается следующая явная формула, выражающая R_{ijkl} через g_{ij} и производные метрического тензора:

$$R_{iklm}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k\partial x^l}+\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i\partial x^l}\right)+g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im}-\Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right).$$

Для *тензора Риччи* $R_{ik}=R^q{}_{iqk}=g^{lm}R_{limk}$ легко получить следующее выражение:

$$R_{ik}=\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}+\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}-\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}$$

(проверьте!). Напомним также, что *скалярной кривизной* R называется следующий инвариант:

$$R=g^{ik}R_{ik}=g^{il}g^{km}R_{iklm}.$$

Уравнения Эйнштейна для гравитационного поля можно получить как уравнения Эйлера — Лагранжа при варьировании действия (Гильберта) этого поля. Опишем этот функционал действия S_g. Считается, что $S_g = \int R\, d\Omega$, где интеграл берется по всему трехмерному пространству (x^1, x^2, x^3) и по временной координате x^0 в пределах $x_1^0 \leqslant x^0 \leqslant x_2^0$.

Теорема 2. *Имеет место тождество*

$$\frac{\delta \int R \sqrt{|g|}\, d^4x}{\delta g^{ij}} = \left(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij}\right) \sqrt{|g|},$$

так что

$$\delta S_g = \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}\right) \delta g^{ik} \sqrt{|g|}\, d^4x.$$

Доказательство. Выражение для S_g можно несколько упростить, избавившись от вторых производных $\partial^2 g_{ik}/\partial x^p \partial x^q$, входящих в инвариант R. После этого упрощения (которое мы сейчас выполним) подынтегральное выражение будет содержать только тензор g_{ik} и символы Кристоффеля Γ^i_{jk}.

Имеем

$$R\sqrt{-g} = \sqrt{-g}\, g^{ik} R_{ik} =$$
$$= \sqrt{-g}\left(g^{ik} \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - g^{ik} \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + g^{ik} \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{lm} - g^{ik} \Gamma^m_{il} \Gamma^l_{km}\right).$$

Преобразуем первые две суммы:

$$\sqrt{-g}\, g^{ik} \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik} \Gamma^l_{ik}\right) - \Gamma^l_{ik} \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\right),$$

$$\sqrt{-g}\, g^{ik} \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik} \Gamma^l_{il}\right) - \Gamma^l_{il} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\right).$$

Полные производные (точнее, дивергенции) $\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik} \Gamma^l_{ik}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik} \Gamma^l_{il}\right)$ можно отбросить без ущерба для вариации δS_g. Дело в том, что интегралы

$$\int_D \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik} \Gamma^l_{ik}\right) d^4x, \quad \int_D \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{-g}\, g^{ik} \Gamma^l_{il}\big)\, d^4x$$

равны нулю. В самом деле, пользуясь формулой Стокса, эти интегралы можно преобразовать к интегралам по границе ∂D области D. Так как при варьировании S_g мы должны варьировать g_{ik} (рассматривая их как независимые переменные), то вариации δg_{ik} должны быть равны нулю на ∂D (см. выше вывод уравнений Эйлера — Лагранжа); следовательно, $\delta\left(\int\limits_{\partial D}\right) = 0$. Итак, можно считать, что $\delta\left(\int R\,d\Omega\right) = \delta\left(\int G\sqrt{-g}\,d^4x\right)$, где

$$G\sqrt{-g} = \Gamma^l_{il}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\right) - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\right) - \\ - \left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right)g^{il}\sqrt{-g}. \quad (14)$$

Поскольку связность Γ^i_{jk} согласована с метрикой, то имеет место тождество

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\right)$$

(проверьте!). Разделив (14) на $\sqrt{-g}$, получим

$$G = -\Gamma^l_{il}\Gamma^i_{kp}g^{kp} - \Gamma^l_{ik}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\right) - \left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right)g^{ik}.$$

Преобразуем второе слагаемое:

$$-\Gamma^l_{ik}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\right) = \Gamma^l_{ik}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial x^l}g^{ik} - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = \\ = -\Gamma^l_{ik}g^{ik}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}.$$

Здесь мы воспользовались соотношением $\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k}$. Напомним далее, что $\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\Gamma^i_{ml}g^{mk} - \Gamma^k_{ml}g^{im}$. Отсюда

$$-\Gamma^l_{ik}\Gamma^p_{lp}g^{ik} - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\Gamma^l_{ik}\Gamma^p_{lp}g^{ik} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{ml}g^{mk} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{ml}g^{im} = \\ = -\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}g^{ik} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{ml}g^{mk} + \Gamma^i_{ml}\Gamma^l_{ki}g^{km} = \\ = -\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}g^{ik} + 2\Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{ml}g^{mk}.$$

Отсюда

$$G = 2\Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{ml}g^{mk} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}g^{ik} - \Gamma^m_{im}\Gamma^i_{kl}g^{kl} - g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right) = \\ = g^{ik}\left(2\Gamma^l_{mk}\Gamma^m_{il} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{ki}\right) - g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right) = \\ = 2g^{ik}\left(\Gamma^l_{mk}\Gamma^m_{il} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right) - g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right) = \\ = g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{mk} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right).$$

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 3.

$$\delta\left(\int R\sqrt{|g|}\,d^nx\right)=\delta\left(\int g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{mk}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right)\sqrt{|g|}\,d^nx.\right.$$

Еще раз поясним, что гравитационное поле определяется метрическим тензором g_{ij}, а потому при вариации действия варьированию должны подвергаться компоненты g_{ij}, рассматриваемые как независимые переменные.

Найдем δS_g (варьированию подвергается только гравитационное поле, т. е. метрика). Имеем

$$\delta\int R\sqrt{-g}\,d^4x=\delta\int g^{ik}R_{ik}\sqrt{-g}\,d^4x=$$
$$=\int\left(R_{ik}\sqrt{-g}\,\delta g^{ik}+R_{ik}g^{ik}\delta\left(\sqrt{-g}\right)+g^{ik}\sqrt{-g}\,\delta R_{ik}\right)d^4x.$$

Найдем δg^{ik}. Если Δ^{ik} — алгебраическое дополнение элемента g_{ik} в матрице $(g_{\alpha\beta})$, то $g=\sum\limits_i g_{ik}\Delta^{ik}$ (по определению g), где суммирование происходит только по i, а k фиксировано. Ясно, что $\delta g=(\delta g_{ik})\Delta^{ik}$ (суммирование по i, k), так как дифференциал δg_{ik} каждой компоненты g_{ik} нужно умножить (при приведении подобных членов) на коэффициент при этой компоненте в выражении для g, т. е. на Δ^{ik}. Так как $g^{ik}=\frac{\Delta^{ik}}{g}$, то $\Delta^{ik}=gg^{ik}$, откуда $\delta g=gg^{ik}\delta g_{ik}$. Так как $g^{ik}g_{ik}=\delta^i_i=4$, то $(\delta g^{ik})g_{ik}+g^{ik}(\delta g_{ik})=0$, т. е. $\delta g=-gg_{ik}\delta g^{ik}$. Таким образом,

$$\delta\left(\sqrt{-g}\right)=\frac{-1}{2\sqrt{-g}}\,\delta g=\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,g\cdot g_{ik}\delta g^{ik}=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{ik}\delta g^{ik}.$$

Отсюда

$$\delta\int R\sqrt{-g}\,d^4x=$$
$$=\int\left(R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d^4x+\int g^{ik}\left(\delta R_{ik}\right)\sqrt{-g}\,d^4x.$$

Найдем теперь δR_{ik}. Предварительно заметим, что вариации $\delta\Gamma^i_{jk}$ образуют тензор (напомним, что символы Кристоффеля Γ^i_{jk} тензора не образуют). Действительно, по определению операции $\nabla_\xi=\xi^i\nabla_i$ ковариантного дифференцирования вдоль векторного поля ξ получаем $\nabla_{\partial_i}(\partial_j)=\Gamma^k_{ij}\partial_k$, где ∂_i — стандартные координатные векторные поля: $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$. Таким образом, Γ^i_{jk} — коэффициенты разложения вектора, перенесенного параллельно вдоль координатной линии. Выражение $\delta\Gamma^k_{ij}\partial_k$ является, следовательно, разностью двух векторов, полученных параллельным переносом из точки Q в точку $\tilde{Q}$ вдоль координатной линии двумя способами: при помощи исходной связности Γ^k_{ij} и при помощи проварьированной связности $\Gamma^k_{ij} + \delta\Gamma^k_{ij}$. Так как разность двух векторов, вычисленная в одной и той же точке $\tilde{Q}$, есть вектор, то величины $\delta\Gamma^k_{ij}$ образуют тензор.

Для подсчета вариации δR_{ik} фиксируем произвольную точку и введем в некоторой окрестности этой точки систему координат, инерциальную в этой точке (см. задачу 4 из § 29). Это означает, что в этой точке $\Gamma^k_{ij} = 0$, так как $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(g^{ik}) = 0$ в выбранной точке. Имеем

$$g^{ik}\delta R_{ik} = \delta\left(\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}\right) g^{ik} =$$

$$= g^{ik}\left(\frac{\partial}{\partial x^l}(\delta\Gamma^l_{ik}) - \frac{\partial}{\partial x^k}(\delta\Gamma^l_{il})\right) = g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\delta\Gamma^l_{ik}) - g^{il}\frac{\partial}{\partial x^l}(\delta\Gamma^k_{ik}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^l}\left(g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}\right) = \frac{\partial W^l}{\partial x^l},$$

$$W^l = g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}.$$

Так как $\delta\Gamma^i_{jk}$ — тензор, то величины W^l также образуют тензор (вектор), а потому его дивергенция $\frac{\partial W^l}{\partial x^l}$ в нашей специальной системе координат (инерциальной в выбранной точке) не изменится при переходе к любой другой криволинейной системе координат. При этом, конечно, следует использовать инвариантное определение $\operatorname{div} T = \nabla_i T^i$, так как величина $\frac{\partial}{\partial x^i}(T^i)$ не носит тензорного характера (относительно произвольных замен). Напомним (см. § 29), что явная формула для $\operatorname{div} T$ в произвольной системе координат относительно римановой симметричной связности) такова:

$$\nabla_i T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + T^l \frac{\partial}{\partial x^l}(\ln \sqrt{-g}) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,T^l).$$

Получаем $g^{ik}\delta R_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,W^l)$. Таким образом, интеграл $\int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}\,d^4x$ преобразован нами к следующему виду: $\int \frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,W^l)\,d^4x$. В силу формулы Стокса этот интеграл превращается в интеграл по границе четырехмерной области ∂D от W^l. Так как на ∂D вариация поля равна нулю, то этот интеграл также равен нулю. Окончательно получаем

$$\delta S_g = \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d^4x.$$

Теорема 2 доказана.

Обычно действие S_g записывают с коэффициентом λ специального вида $\lambda = \frac{c^3}{16\pi G}$, где c — скорость света, G — так называемая «гравитационная постоянная». Тогда

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d^4x.$$

Полное действие вместе с материей имеет вид $S_g + S_m = S_{\text{полное}}$.

Теперь рассмотрим вариацию δS_m. Действие S_m обычно записывается (в криволинейных координатах) в виде $\frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g}\, d^4x$, где Λ — функция, определяемая свойствами материи, зависящая от метрики и полей, определяющих материю. (Напомним, что интегрирование осуществляется по всему трехмерному пространству x^1, x^2, x^3, а по времени x^0 — между двумя фиксированными моментами, т. е. по бесконечной четырехмерной области, заключенной между двумя гиперповерхностями $x^0 = x_1^0$, $x^0 = x_2^0$; x_1^0, x_2^0 — некоторые постоянные.) Итак,

$$\frac{1}{\lambda \sqrt{|g|}} \frac{\delta S_g}{\delta g^{ik}} = R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = -\frac{8\pi G}{c^3} \frac{\delta S_m}{\delta g^{ik}} \frac{2}{c \sqrt{|g|}}. \qquad (15)$$

Это уравнение гравитационного поля, если величина $-\frac{2}{c\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{ik}}$ известна. Заметим, что эти уравнения нелинейны, а потому сумма двух решений (полей) не обязана быть решением.

В теории относительности принимается, что величина $-\frac{2}{c\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{ik}} = T_{ik}$ является тензором энергии-импульса системы. Для физически важных полей (например, электромагнитного) выражение

$$-\frac{2}{c\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{ik}} \Bigg|_{g^{ik} = g^{ik}_{\text{Минковского}}}$$

совпадает с ранее введенным симметричным тензором энергии-импульса. Действительно,

$$cS_m = \int \Lambda \sqrt{|g|}\, d^4x = \lambda \int F_{ik} F^{ik} \sqrt{|g|}\, d^4x =$$

$$= \lambda \int F_{ik} g^{ip} g^{kj} F_{pj} \sqrt{|g|}\, d^4x = \int \Lambda (g_{ab};\ F_{ik}) \sqrt{|g|}\, d^4x.$$

Очевидно, имеем (проверьте!)

$$-\frac{2}{c}\delta S_m = \int \frac{1}{4\pi c}\left(-F_i^l F_{lh} + \frac{1}{4} g_{ik} F_{lm} F^{lm}\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\, d^4x.$$

Подынтегральное выражение совпадает с выражением (13′).

В случае так называемого пустого пространства (в отсутствие материи) $T_{ik}=0$, и тогда уравнения гравитационного поля принимают вид $R_{ik}=0$. В самом деле, из (15) можно получить $g^{i\alpha}R_{ik} - \frac{1}{2} R\delta_k^\alpha = \frac{8\pi G}{c^4} g^{i\alpha}T_{ik}$, т. е. $R_k^\alpha - \frac{1}{2}R\delta_k^\alpha = \frac{8\pi G}{c^4}T_k^\alpha$. Сворачивая по (α, k), получаем $R - 2R = \frac{8\pi G}{c^4}T$, где $T = T_\alpha^\alpha$, т. е. $R = -\frac{8\pi G}{c^4}T$, и уравнения нашего поля принимают вид $R_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}T\right)$. Если $T_{ik}=0$, то и $R_{ik}=0$. Из уравнения $R_{ik}=0$ отнюдь не следует, что пустое пространство-время является плоским: равенства нулю тензора Риччи для этого недостаточно. Плоскость пространства-времени вытекала бы из равенства нулю всего тензора кривизны Римана R^i_{jkl}. Если бы пространство-время было трехмерно, то пустое пространство было бы обязательно плоским, поскольку в этом случае тензор Римана выражается через тензор Риччи (формула (30.18)). В двумерном случае из приведенных вычислений вытекает следующая

Теорема 3. *Величина* $S[g] = \int K dS$, *где* $dS = \sqrt{g}\, dx^1 \wedge dx^2$, *а* K — *гауссова кривизна, не меняется при локальном изменении метрики* g_{ij}, $i, j = 1, 2$.

Доказательство. В двумерном случае имеем $K = R/2$, $R_{ij} = \frac{1}{2}Rg_{ij} = Kg_{ij}$. Вариация функционала S равна (см. выше)

$$\delta S = \int \left(R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij}\right)\delta g^{ij} dS = 0.$$

Теорема доказана.

Для замкнутой поверхности в $\mathbb{R}^3$ локальность изменения метрики несущественна, поэтому получаем

Следствие (Гаусс — Бонне). *Интеграл от гауссовой кривизны по замкнутой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве не меняется при гладкой деформации поверхности*:

$$\int K\, dS = \text{const}.$$

Численное значение этой константы будет вычислено в части II.

5. Мыльные пленки. Рассмотрим гладкую гиперповерхность $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, заданную, например, в виде графика $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$. Пусть областью определения функции f является ограниченная область D в $\mathbb{R}^{n-1}$; рассмотрим функционал площади $S[f]$, определенный на пространстве всех таких функций f: $S[f] = \int\limits_D \sqrt{|\det A|}\, d^{n-1}x$. Здесь $A = (g_{ij}(x))$, $x \in D$,— индуцированная риманова метрика на поверхности V^{n-1}, а $d^{n-1}x = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}$, где $x^1, \ldots, x^{n-1}$ — евклидовы координаты в D. Лагранжиан $\sqrt{|\det A|}$ можно записать в явном виде через функцию f.

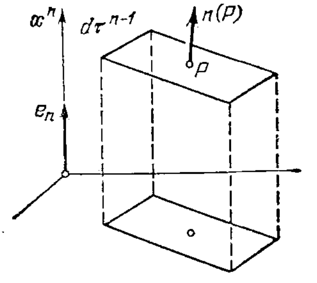

Рис. 38

Пусть $d\tau^{n-1}$ — форма $(n-1)$-мерного объема на V; тогда $S[f] = \int\limits_D d\tau^{n-1}$.

Пусть $P \in V^{n-1}$; $n(P)$ — единичная нормаль к V^{n-1} в точке P, $\alpha(P)$ — угол между $n(P)$ и $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ (рис. 38); тогда

$$S[f] = \int\limits_D d\tau^{n-1} = \int\limits_D \frac{d^{n-1}x}{\cos\alpha(P)}.$$

Далее,

$$\cos\alpha(P) = \langle e_n, n(P)\rangle = \Big\langle (0, \ldots, 0, 1),$$

$$\left(\frac{-f_{x^1}}{\sqrt{1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(f_{x^i})^2}}, \ldots, \frac{-f_{x^{n-1}}}{\sqrt{1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(f_{x^i})^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(f_{x^i})^2}}\right)\Big\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(f_{x^i})^2}}.$$

Итак, $S[f] = \int\limits_D \sqrt{1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(f_{x^i})^2}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}$.

Рассмотрим экстремальные поверхности V^{n-1} для функционала площади $S[f]$ (т. е. графики экстремальных функций $x^n = f(x)$, $x \in D$). Уравнение Эйлера — Лагранжа (здесь $k = 1$) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{f_{x^i}}{\sqrt{1+\sum\limits_{j=1}^{n-1}(f_{x^j})^2}}\right) = 0. \tag{16}$$

Определение 5. Поверхности, являющиеся экстремальными для функционала площади S, называются *минимальными поверхностями.*

Замечание. Минимальные поверхности моделируются, например, в $\mathbb{R}^3$ с помощью мыльных пленок, затягивающих замкнутый проволочный контур (в отсутствие силы тяжести).

Для двумерной минимальной поверхности, заданной в виде графика $z=f(x, y)$ в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$, уравнение (16) приобретает вид

$$\left(1+f_x^2\right) f_{yy}-2 f_{xy} f_x f_y+\left(1+f_y^2\right) f_{xx}=0$$

(проверьте!).

Уравнение минимальной поверхности V^{n-1} допускает запись на языке локальных инвариантов вложения этой поверхности в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4. *Пусть $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — гладкая гиперповерхность. Средняя кривизна H равна тождественно нулю тогда и только тогда, когда V^{n-1} можно представить в окрестности каждой своей точки в виде графика экстремальной функции для функционала площади (т. е. решения уравнения минимальной поверхности).*

Таким образом, условие $H \equiv 0$ и есть условие минимальности поверхности $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Доказательство теоремы сводится к прямому вычислению средней кривизны $H=\operatorname{Sp}\left(A^{-1} Q\right)$ для графика $x^n=f(x)$, где A, Q — матрицы первой и второй квадратичных форм соответственно, и проверке факта, что уравнение $H=0$ совпадает с уравнением Эйлера — Лагранжа (16).

Мы не будем проводить здесь это вычисление в общем случае, а рассмотрим только специальный случай: двумерная минимальная поверхность в $\mathbb{R}^3$.

Зададим поверхность $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ радиус-вектором $r=r(u, v)$ (по крайней мере локально). Тогда $S[r]=\int\limits_{D(u, v)} \sqrt{E G-F^2}\, d u\, d v$, где $\begin{pmatrix}E & F \\ F & G\end{pmatrix}$ — матрица первой квадратичной формы:

$$E=\langle r_u, r_u\rangle ; \quad F=\langle r_u, r_v\rangle ; \quad G=\langle r_v, r_v\rangle .$$

Средняя кривизна H имеет вид

$$H=\operatorname{Sp}\left(A^{-1} Q\right)=\frac{1}{E G-F^2}(G L-2 F M+E N),$$

где $\begin{pmatrix}L & M \\ M & N\end{pmatrix}$ — матрица второй квадратичной формы:

$$L=\langle r_{uu}, n\rangle, \quad M=\langle r_{uv}, n\rangle, \quad N=\langle r_{vv}, n\rangle,$$

n — единичная нормаль к поверхности.

Выберем на V^2 (локально) конформные (изотермические) координаты. Существование таких локальных координат для вещественно аналитических метрик A было доказано нами ранее (см. § 13). Для простоты будем считать, что u, v — уже конформные координаты.

В конформных координатах $F=0$ и $E=G$; следовательно,

$$S[r]=\iint\limits_D \sqrt{\langle r_u, r_u\rangle\langle r_v, r_v\rangle}\,du\,dv=$$
$$=\iint\limits_D \sqrt{\left(x_u^2+y_u^2+z_u^2\right)\left(x_v^2+y_v^2+z_v^2\right)}\,du\,dv.$$

Далее, $H=\frac{1}{E}(L+N)=\frac{1}{E}\langle r_{uu}+r_{vv}, n\rangle=\frac{1}{E}\langle\Delta r, n\rangle$, где Δ — оператор Лапласа.

Рассмотрим уравнения Эйлера — Лагранжа для $S[r]$ в координатах u, v. При этом следует иметь в виду, что возможность записать уравнение Эйлера — Лагранжа в конформных координатах следует из того, что при варьировании функционала $S[r]$ с помощью возмущения η можно считать все функции $r(u, v)+$ $+\varepsilon\eta(u, v)$ отнесенными к конформным координатам. Для этого достаточно ввести конформные координаты u_ε, v_ε на каждой поверхности $r(u, v)+\varepsilon\eta(u, v)$ (дело в том, что координаты u, v, вообще говоря, уже не конформны на возмущенной поверхности $r+\varepsilon\eta$). Координаты $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ можно считать гладко зависящими от ε.

Уравнения Эйлера — Лагранжа принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}(x_u)+\frac{\partial}{\partial v}(x_v)&=0,\\ \frac{\partial}{\partial u}(y_u)+\frac{\partial}{\partial v}(y_v)&=0,\\ \frac{\partial}{\partial u}(z_u)+\frac{\partial}{\partial v}(z_v)&=0\end{aligned}\right\}, \quad \text{т. е. } \Delta r=0.$$

Радиус-векторы r, удовлетворяющие уравнению $\Delta r=0$, называются *гармоническими*. Таким образом, в конформных координатах «минимальность радиус-вектора» (т. е. его экстремальность для функционала площади) означает его гармоничность.

Замечание. Говорить о гармоничности радиус-вектора $r(u, v)$ можно только относительно какой-либо системы координат (в данном случае эти координаты конформны). При изменении координат свойство гармоничности, вообще говоря, разрушается.

Итак, поскольку $\Delta r=0$, то $H=\frac{1}{E}\langle\Delta r, n\rangle=0$, и мы доказали интересующее нас утверждение в одну сторону.

Обратно, пусть $H \equiv 0$, мы должны доказать, что $\Delta r = 0$ (в конформных координатах). Так как $\langle \Delta r, n \rangle = 0$, то достаточно проверить еще два равенства: $\langle \Delta r, r_u \rangle = 0$, $\langle \Delta r, r_v \rangle = 0$. Отсюда будет следовать, что $\Delta r = 0$. В самом деле, векторы n, r_u, r_v образуют репер в любой регулярной точке поверхности $r(u, v)$ (по определению поверхности). В силу выбора координат $E = G$ и $F = 0$, т. е. $\langle r_u, r_u \rangle = \langle r_v, r_v \rangle$ и $\langle r_u, r_v \rangle = 0$. Дифференцируя по u и v, получаем

$$\begin{gathered} \langle r_{uu}, r_u \rangle = \langle r_{uv}, r_v \rangle, \\ \langle r_{uv}, r_u \rangle = \langle r_{vv}, r_v \rangle, \\ \langle r_{uu}, r_v \rangle + \langle r_u, r_{uv} \rangle = 0, \\ \langle r_{uv}, r_v \rangle + \langle r_u, r_{vv} \rangle = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Нам следует проверить тождества

$$\langle r_{uu}, r_u \rangle + \langle r_{vv}, r_u \rangle = 0,$$
$$\langle r_{uu}, r_v \rangle + \langle r_{vv}, r_v \rangle = 0.$$

Два последних уравнения, очевидно, вытекают из (17). Тем самым доказано

Утверждение 2. *Двумерная поверхность тогда и только тогда описывается минимальным радиус-вектором, когда $H \equiv 0$. В конформных координатах минимальный радиус-вектор становится гармоническим.*

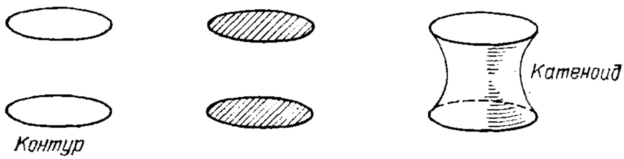

Рис. 39

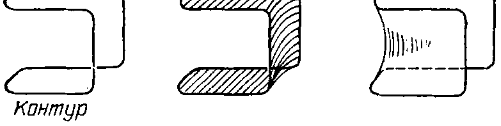

Рис. 40

Структура минимальных поверхностей $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ довольно сложна; например, если фиксирован граничный контур $S^1 \subset \mathbb{R}^3$, то, вообще говоря, на него можно натянуть много «мыльных пленок» (т. е. нет теоремы единственности решения для дифференциального уравнения $H \equiv 0$ или $\Delta r = 0$). Примеры см. на рис. 39, 40.

Решения уравнений $H=0$, $\Delta r=0$ могут иметь особенности. Пример («тройной лист Мёбиуса») см. на рис. 41, 42.

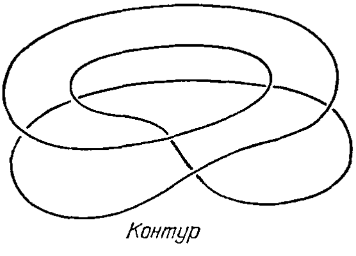

Рис. 41

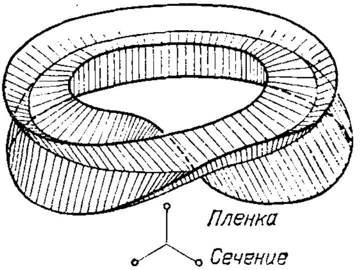

Рис. 42

Гармонические радиус-векторы являются решениями уравнения Эйлера — Лагранжа для еще одного многомерного (двумерного) функционала.

Функционал Дирихле. Рассмотрим трехмерный радиус-вектор $r(u, v)$ (координаты u, v произвольны). Функционалом Дирихле называется следующий функционал:

$$D[r]=\int\limits_{D(u,v)}\frac{E+G}{2}\,du\,dv,$$

где E, G — коэффициенты первой квадратичной формы для поверхности $r(u, v)$.

Здесь

$$L(r_u, r_v)=\frac{1}{2}\left(x_u^2+y_u^2+z_u^2+x_v^2+y_v^2+z_v^2\right),$$

а потому уравнение Эйлера — Лагранжа (в векторной записи) имеет вид $\Delta r=0$; решения — гармонические радиус-векторы.

Так как

$$\frac{E+G}{2}\geqslant\sqrt{EG-F^2},$$

то

$$D[r]\geqslant S[r]$$

для любого кусочно гладкого радиус-вектора $r(u, v)$ и равенство достигается тогда и только тогда, когда $E=G$; $F=0$, т. е. в конформной системе координат. Таким образом, любая экстремаль $D[r]$, для которой координаты u, v оказались конформными, является экстремалью $S[r]$; обратное неверно. Для того чтобы получить все экстремали функционала $S[r]$, следует рассмотреть все экстремали функционала $D[r]$ (т. е. гармонические радиус-векторы), отобрать из них только те, для которых u, v оказываются конформными координатами, а затем подвергнуть u, v произвольной регулярной замене координат.

Гармонический радиус-вектор $r(u, v)$, для которого координаты u, v не конформны, не будет описывать минимальную поверхность. Пример: $r(u, v)=(u, v, \operatorname{Re} f(u+iv))$ — график вещественной (или мнимой) части нелинейной комплексно аналитической функции $f(u+iv)$.

Связь между функционалами $D[r]$ и $S[r]$ во многом аналогична связи между функционалами длины $l_a^b[\gamma]$ и действия $S_a^b[\gamma]=\int\limits_a^b|\dot\gamma|^2\,dt$ пути γ. Ясно, что $\left(l_a^b[\gamma]\right)^2\leqslant(b-a)S_a^b[\gamma]$, и равенство достигается тогда и только тогда, когда параметр t на траектории $\gamma(t)$ пропорционален длине дуги (такие экстремали $l_a^b[\gamma]$ будут геодезическими, если параметр натуральный). Это обстоятельство связано с тем, что функционалы $l_a^b[\gamma]$ и $S[r]$ инвариантны относительно замены переменных, а функционалы $S_a^b[\gamma]$ и $D[r]$ не инвариантны.

6. Уравнение равновесия тонкой пластинки. Рассмотрим один частный случай равновесия деформируемых тел: равновесие изогнутой тонкой пластинки. Будем считать пластинку тонкой (т. е. будем предполагать, что ее толщина мала по сравнению с ее размерами в двух других направлениях). Будем считать, что в недеформированном состоянии пластинка является плоской. Деформацию будем считать малой, т. е. будем предполагать, что смещения точек пластинки малы по сравнению с ее толщиной. Уравнения равновесия пластинки получаются как уравнения Эйлера — Лагранжа при варьировании ее свободной энергии.

При изгибании пластинки в некоторых ее точках возникают растяжения, а в некоторых — сжатия. На выпуклой стороне происходит растяжение, на вогнутой — сжатие. По мере углубления в толщу пластинки растяжения и сжатия уменьшаются. Зоны растяжения и сжатия отделены друг от друга так называемой «нейтральной поверхностью», на которой растяжения или сжатия отсутствуют. Эта поверхность расположена на середине толщины пластинки.

Введем декартову систему координат x, y, z с началом в точке O на нейтральной поверхности и осью Oz, ортогональной к этой поверхности. Плоскость (x, y) совпадет с плоскостью недеформированной пластинки. Через $\zeta(x, y)$ обозначим вертикальное смещение точек нейтральной поверхности при изгибе (рис. 43).

Пусть h — толщина пластинки; тогда полная свободная энергия F изогнутой пластинки вычисляется по следующей формуле:

$$F = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)} \int\int \left\{ \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} \right] \right\} dx\,dy,$$

где интегрирование производится по всей области определения функции смещения $\zeta=\zeta(x, y)$, E — модуль растяжения (модуль Юнга), σ — коэффициент Пуассона, вычисляемые из соотношений

$$E = \frac{9K\mu}{3K+\mu}, \quad \sigma = \frac{1}{2}\,\frac{3K-2\mu}{3K+\mu},$$

в которых K и μ — модуль всестороннего сжатия и модуль сдвига; эти постоянные K и μ определяются свойствами материала, из которого изготовлена пластинка.

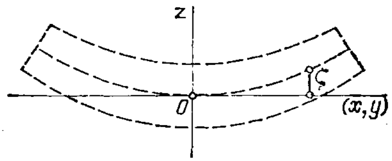

Рис. 43

Перейдем к выводу уравнений равновесия. Отметим, что ввиду малости деформаций можно считать, что $dx\,dy=dS$, где dS — элемент поверхности (на нейтральной поверхности). Проварьируем энергию F. Представим F в виде суммы двух интегралов:

$$F = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)} \left\{ \int\int (\Delta\zeta)^2\,dS + 2(1-\sigma)\int\int \left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} \right] dS \right\}$$

(здесь Δ — оператор Лапласа) и будем варьировать эти интегралы по отдельности.

$$\delta\frac{1}{2}\int\int(\Delta\zeta)^2\,dS = \int\int(\Delta\zeta)(\Delta\delta\zeta)\,dS = \int\int(\Delta\zeta)(\operatorname{div}\operatorname{grad}\delta\zeta)\,dS =$$

$$= \int\int \operatorname{div}(\Delta\zeta\operatorname{grad}\delta\zeta)\,dS - \int\int\langle\operatorname{grad}\delta\zeta, \operatorname{grad}\Delta\zeta\rangle\,dS.$$

Пусть $\gamma=\partial D$ — контур, ограничивающий область определения D функции $\zeta(x, y)$. Например, γ может быть контуром, охватывающим пластинку. Тогда интеграл $\int\int_D \operatorname{div}(\Delta\zeta\operatorname{grad}\delta\zeta)\,dS$ можно по формуле Стокса преобразовать к виду $\oint_\gamma \Delta\zeta\langle n, \operatorname{grad}\delta\zeta\rangle\,dl$, где dl — элемент длины дуги вдоль γ, n — вектор внешней нормали вдоль γ к γ. Ясно, что

$$\oint_\gamma \Delta\zeta\langle n, \operatorname{grad}\delta\zeta\rangle\,dl = \oint_\gamma \Delta\zeta\frac{\partial(\delta\zeta)}{\partial n}\,dl,$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — дифференцирование по направлению внешней нормали n к контуру γ. Аналогично

$$\iint_D \langle \operatorname{grad} \delta\zeta, \operatorname{grad}\Delta\zeta\rangle\, dS = \iint_D \operatorname{div}\left((\delta\zeta)\operatorname{grad}\Delta\zeta\right) dS - \iint_D (\delta\zeta)\,\Delta^2\zeta\, dS =$$

$$= \oint_\gamma \delta\zeta\,\langle n, \operatorname{grad}\Delta\zeta\rangle\, dl - \iint_D (\delta\zeta)\,\Delta^2\zeta\, dS =$$

$$= \oint_\gamma \delta\zeta\,\frac{\partial(\Delta\zeta)}{\partial n}\, dl - \iint_D (\delta\zeta)\,\Delta^2\zeta\, dS$$

Итак, мы преобразовали первый интеграл в выражении для δF к виду

$$\delta\frac{1}{2}\iint_D (\Delta\zeta)^2\, dS = \iint_D (\delta\zeta)\,\Delta^2\zeta dS - \oint_\gamma \delta\zeta\frac{\partial(\Delta\zeta)}{\partial n}\, dl + \oint_\gamma \Delta\zeta\,\frac{\partial(\delta\zeta)}{\partial n}\, dl.$$

Перейдем ко второму интегралу в выражении для δF:

$$\delta\iint_D \left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]\delta S =$$

$$= \iint_D \left[2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\gamma\zeta}{\partial y^2}\right] dS.$$

Подынтегральное выражение можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right) = \operatorname{div} T.$$

Отсюда

$$\delta\iint_D \left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right] dS = \oint_\gamma \langle n, T\rangle\, dl =$$

$$= \int_\gamma \left[\cos\theta\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) + \sin\theta\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)\right] dl,$$

где θ — угол между осью Ox и нормалью n (рис. 44). Выразим $\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}$ и $\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}$ через $\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n}$ и $\frac{\partial\delta\zeta}{\partial l}$, где $\frac{\partial}{\partial n} = \partial_n$. Так как $\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial n} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial l}$; $\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial n} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial l}$, то

$$\delta\iint_D \left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right] dS =$$

$$= \oint_\gamma \frac{\partial\delta\zeta}{\partial n}\left[2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \sin^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \cos^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right] dl +$$

$$+ \oint_\gamma \frac{\partial\delta\zeta}{\partial l}\left[\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right] dl.$$

Второй интеграл можно взять по частям. Так как интегрирование выполняется по замкнутому контуру, то пределы интегрирования сливаются в одну точку, а потому интеграл принимает вид

$$-\int_\gamma \delta\zeta \frac{\partial}{\partial l}\left[\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right]dl$$

(второй интеграл — интеграл от полной производной — обратился в нуль). Окончательно для вариации свободной энергии получаем

$$\delta F=\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\left\{\iint_D(\delta\zeta)\,\Delta^2\zeta\,dS-\right.$$
$$-\int_\gamma\delta\zeta\left[\frac{\partial(\Delta\zeta)}{\partial n}+(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial l}\left(\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)\right]dl+\oint\frac{\partial(\delta\zeta)}{\partial n}\left[\Delta\zeta+\right.$$
$$\left.\left.+(1-\sigma)\left(2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}-\sin^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-\cos^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\right]dl\right\}.$$

Чтобы получить уравнения равновесия пластинки (уравнения Эйлера — Лагранжа), нужно приравнять нулю сумму $\delta F+\delta U$, где U — потенциальная энергия пластинки, связанная с наличием действующих на нее внешних сил. Вариация δU равна взятой с обратным знаком работе внешних сил при смещении пластинки.

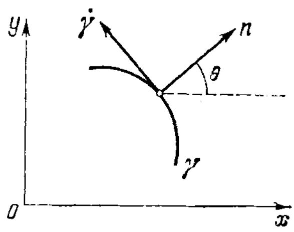

Рис. 44

Пусть P — действующая на пластинку внешняя сила, отнесенная к единице площади ее поверхности (имеется в виду нейтральная поверхность) и направленная по нормали к ней. Тогда работа, произведенная внешней силой при смещении точек пластинки на расстояние $\delta\zeta$, равна $\iint_D P\delta\zeta\,dS$. Отсюда в качестве условия минимальности (а точнее экстремальности) полной свободной энергии пластинки получаем уравнение

$$\delta F-\int P\delta\zeta\,dS=0. \qquad (18)$$

В это соотношение входят как поверхностные, так и контурные интегралы. Поскольку вариация $\delta\zeta$ произвольна и может иметь сколь угодно малый носитель (в частности, носитель $\delta\zeta$ может не затрагивать контур γ), то, следовательно, по отдельности равны нулю как поверхностный, так и контурный интегралы. Поверхностный интеграл имеет вид

$$\iint\limits_D \left(\frac{Eh^3}{12(1-\sigma)}\Delta^2\zeta - P\right)\delta\zeta dS = 0.$$

В силу произвольности $\delta\zeta$ имеем $H\Delta^2\zeta - P = 0$, где $H = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma)}$; эта величина называется *жесткостью* пластинки при изгибе (или *цилиндрической жесткостью*); H определяется свойствами материала. Итак, уравнение равновесия пластинки, изгибаемой действующими на нее внешними силами, имеет вид

$$H\Delta^2\zeta - P = 0.$$

Это уравнение нужно дополнить граничными условиями, получающими из обращения в нуль контурных интегралов в уравнении (18). Обычно при этом выделяется несколько важных частных случаев.

а) Пусть часть края пластинки $\gamma = \partial D$ свободна, т. е. на нее не действуют внешние силы. Тогда вдоль этой части границы вариации $\delta\zeta$ и $\delta\left(\frac{\partial\zeta}{\partial n}\right)$ произвольны, а потому должны аннулироваться коэффициенты при этих вариациях в соответствующих контурных интегралах. Это дает следующую систему граничных условий:

$$-\frac{\partial(\Delta\zeta)}{\partial n} + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial l}\left(\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) + \right.$$
$$\left. + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right) = 0;$$

$$\Delta\zeta + (1-\sigma)\left(2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \sin^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \cos^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) = 0.$$

б) Пусть края пластинки жестко закреплены (например, жестко заделаны в материал). В этом случае края пластинки не могут испытывать никаких вертикальных смещений, а также не может измениться направление края пластинки; следовательно, $\delta\zeta \equiv 0$ и $\delta\left(\frac{\partial\zeta}{\partial n}\right) \equiv 0$ (отсюда следует, что все контурные интегралы тождественно равны нулю); граничные условия приобретают простой вид: $\zeta = 0$, $\frac{\partial\zeta}{\partial n} = 0$. Первое означает, что края не смещаются по вертикали при деформации, а второе означает, что направление края остается при деформации горизонтальным.

Задачи. 1. Показать, что для экстремалей функционала $S(F) = \int F \wedge *F = \int F_{ik}F^{ik}d^4x$ при условии $d(F_{ik}dx^i \wedge dx^k) = 0$

справедливы уравнения Максвелла (в пустоте). Здесь F_{ik} — кососимметрический тензор в пространстве Минковского $\mathbb{R}^4_1$.

2. Доказать, что:

а) $P^i = \frac{1}{c}\int T^{i0} d^3x, \quad d^3x = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$

Вектор с составляющими $\frac{1}{c}T^{10}, \frac{1}{c}T^{20}, \frac{1}{c}T^{30}$ называется плотностью импульса системы, а величина T^{00} — плотность энергии.

б) $\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V T^{00} d^3x = -c \oint\limits_{\partial V} T^{0\alpha} d\sigma_\alpha$

(здесь $T^{0\alpha} d\sigma_\alpha = T^{01} dx^2 \wedge dx^3 + T^{02} dx^3 \wedge dx^1 + T^{03} dx^1 \wedge dx^2$).

в) $\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \frac{1}{c} T^{\alpha 0} d^3x = -\oint\limits_{\partial V} T^{\alpha\beta} d\sigma_\beta.$

Трехмерный тензор $T^{\alpha\beta}$ называется тензором напряжений (тензором плотности потока импульса).

3. Рассмотрим функционал $S[\Gamma] = \int R\sqrt{|g|}\, dV$, где $R = g^{ik}R_{ik}$, $R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}$ и метрика g_{ik} считается фиксированной. Показать, что для экстремалей $\Gamma = (\Gamma^k_{ij})$ этого функционала справедливы формулы Кристоффеля, выражающие Γ^k_{ij} через компоненты метрического тензора.

4. Чему равен тензор энергии-импульса гравитационного поля (определенный по рецептам пп. 2—4)?

5. Пусть $F = F_{ik} dx^i \wedge dx^k$, $i, k = 0, 1, 2, 3$,— тензор электромагнитного поля в четырехмерном пространстве-времени с метрикой (g_{ij}). Показать, что уравнения Максвелла имеют в этом случае вид $dF = 0$, $\delta F = \frac{4\pi j}{c}$, где j — ток, $\delta = * d *$.

6. В четномерном римановом (или псевдоримановом) пространстве рассмотрим функционал $S[g] = \int \Omega$, где форма Ω определена в задаче 9 к § 30. Показать, что

$$\frac{\delta S}{\delta g^{ij}} \equiv 0.$$

§ 38. Примеры лагранжианов

1. Рассмотрим комплексное скалярное поле $\varphi(x)$ в пространстве $\mathbb{R}^4_1$ с метрикой g_{ab} и зададим действие в виде

$$S = \mathrm{const}\cdot\int\left[\hbar^2\left\langle\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle - m^2c^2\overline{\varphi(x)}\,\varphi(x)\right]d^4x = \int \Lambda d^4x, \quad (1)$$