справедливы уравнения Максвелла (в пустоте). Здесь $F_{ik}$ — кососимметрический тензор в пространстве Минковского $\mathbb{R}^4_1$.

2. Доказать, что:

а) $P^i = \frac{1}{c}\int T^{i0}d^3x$, $d^3x = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

Вектор с составляющими $\frac{1}{c}T^{10}, \frac{1}{c}T^{20}, \frac{1}{c}T^{30}$ называется плотностью импульса системы, а величина $T^{00}$ — плотность энергии.

б) $\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V T^{00}d^3x = -c\oint\limits_{\partial V} T^{0\alpha}d\sigma_\alpha$

(здесь $T^{0\alpha}d\sigma_\alpha = T^{01}dx^2 \wedge dx^3 + T^{02}dx^3 \wedge dx^1 + T^{03}dx^1 \wedge dx^2$).

в) $\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \frac{1}{c}T^{\alpha 0}d^3x = -\oint\limits_{\partial V} T^{\alpha\beta}d\sigma_\beta$.

Трехмерный тензор $T^{\alpha\beta}$ называется тензором напряжений (тензором плотности потока импульса).

3. Рассмотрим функционал $S[\Gamma] = \int R\sqrt{|g|}\,dV$, где $R = g^{ik}R_{ik}$, $R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}$ и метрика $g_{ik}$ считается фиксированной. Показать, что для экстремалей $\Gamma = (\Gamma^k_{ij})$ этого функционала справедливы формулы Кристоффеля, выражающие $\Gamma^k_{ij}$ через компоненты метрического тензора.

4. Чему равен тензор энергии-импульса гравитационного поля (определенный по рецептам пп. 2—4)?

5. Пусть $F = F_{ik}dx^i \wedge dx^k$, $i, k = 0, 1, 2, 3$,— тензор электромагнитного поля в четырехмерном пространстве-времени с метрикой $(g_{ij})$. Показать, что уравнения Максвелла имеют в этом случае вид $dF = 0$, $\delta F = \frac{4\pi j}{c}$, где $j$ — ток, $\delta = * d *$.

6. В четномерном римановом (или псевдоримановом) пространстве рассмотрим функционал $S[g] = \int \Omega$, где форма $\Omega$ определена в задаче 9 к § 30. Показать, что

$$\frac{\delta S}{\delta g^{ij}} \equiv 0.$$

## § 38. Примеры лагранжианов

1. Рассмотрим комплексное скалярное поле $\varphi(x)$ в пространстве $\mathbb{R}^4_1$ с метрикой $g_{ab}$ и зададим действие в виде

$$S = \mathrm{const}\cdot\int\left[\hbar^2\left\langle\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle - m^2c^2\overline{\varphi(x)}\,\varphi(x)\right]d^4x = \int \Lambda d^4x, \quad (1)$$

где черта обозначает комплексное сопряжение, $\hbar$ — постоянная Планка (размерности действия), $c$ — скорость света. Здесь $m \geqslant 0$ называется *массой* частицы, описываемой полем $\varphi$, $\Lambda = \Lambda\left(\varphi, \bar{\varphi}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}\right)$ — лагранжиан; формально $\bar{\varphi}$ и $\varphi$ считаются независимыми переменными. Уравнения Эйлера — Лагранжа принимают вид «уравнения Клейна — Гордона»:

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = 0, \quad \frac{\delta S}{\delta \bar{\varphi}} = 0, \quad (\hbar^2 \Box + m^2 c^2)\, \varphi = 0,$$
$$\Box = \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{(\partial x^\alpha)^2} \tag{2}$$

($\delta\varphi$ и $\delta\bar{\varphi}$ считаются независимыми).

Тензор энергии-импульса имеет вид (см. § 37)

$$T^{ba} = T^{ab} = g^{ac} g^{bd} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^c} \frac{\partial \varphi}{\partial x^d} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^c} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^d} \right) - g^{ab} \Lambda. \tag{3}$$

Здесь $g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ — метрика Минковского. Плотность энергии такова:

$$T^{00} = \sum_c \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^c} \frac{\partial \varphi}{\partial x^c} + m^2 \bar{\varphi} \varphi. \tag{4}$$

Действие (1) инвариантно относительно группы преобразований

$$\varphi \to e^{i\alpha} \varphi, \qquad \bar{\varphi} \to e^{-i\alpha} \bar{\varphi} \qquad (\alpha = \text{const}). \tag{5}$$

Эта группа порождает сохраняющийся ток

$$J^a = i g^{ab} \left( \bar{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x^b} - \varphi \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^b} \right). \tag{6}$$

Задача. Выведите равенство $\frac{\partial J^a}{\partial x^a} = 0$ из уравнений Эйлера — Лагранжа.

Величина $\int\limits_{t=\text{const}} J^0 d^3x = Q$ называется «зарядом» поля $\varphi$.

Включение внешнего электромагнитного поля производится по правилу $p \to p + \frac{e}{c} A$, где $p = i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$:

$$i \frac{\partial}{\partial x^a} \to i \frac{\partial}{\partial x^a} + \frac{e}{c\hbar} A_a(x), \tag{7}$$

где $A_a(x)$ — вектор-потенциал электромагнитного поля, $e$ — заряд,

$c$ и $\hbar$ — универсальные постоянные. Полный лагранжиан имеет вид (полагаем $\hbar = 1$)

$$\Lambda(\varphi, \bar{\varphi}, A) = \left\langle \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^a} + \frac{ie}{c} A_a \bar{\varphi}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^a} - \frac{ie}{c} A_a \varphi \right\rangle - m^2 c^2 \bar{\varphi} \varphi - \frac{1}{16\pi c} F_{ab} F^{ab}. \tag{8}$$

Задача. Проверьте инвариантность этого действия относительно «калибровочных преобразований» ($\hbar = c = 1$)

$$\varphi \to e^{i\alpha}\varphi, \quad \bar{\varphi} \to e^{-i\alpha}\bar{\varphi}; \quad A_a \to A_a + \frac{\partial \alpha}{\partial x^a}, \quad \alpha = \alpha(x), \quad S \to S. \tag{9}$$

Действительное скалярное поле является, как говорят, «нейтральным» ($\bar{\varphi} \equiv \varphi$); здесь

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle - m^2 c^2 \varphi^2, \quad (\Box + m^2 c^2)\varphi = 0, \tag{10}$$

вектор тока (6) обращается в нуль, $J^a = 0$. Включение электромагнитного поля невозможно, так как решения уравнений Эйлера — Лагранжа не будут вещественными.

Решения свободного уравнения (2) или (10) вида $\mathrm{const} \cdot e^{i\langle k, x\rangle}$ обладают свойством

$$\langle k, k \rangle = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}. \tag{11}$$

Считается, что такое решение изображает свободную частицу массы $m$ с импульсом $p = \hbar k$, пропорциональным вектору $k$. Поэтому импульс лежит на массовой поверхности $\langle p, p \rangle = m^2 c^2$.

2. Лагранжиан комплексного векторного поля $\varphi$ с массой $m \neq 0$ в пространстве $\mathbb{R}^4_1$ имеет вид (пусть $\hbar = c = 1$)

$$\begin{gathered} -g^{bd} g^{ac} \frac{\partial \bar{\varphi}_a}{\partial x^b} \frac{\partial \varphi_c}{\partial x^d} + m^2 g^{ab} \bar{\varphi}_a \varphi_b = \Lambda, \\ \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad S = \int \Lambda d^4 x, \end{gathered} \tag{12}$$

причем наложены дополнительные условия на поле:

$$\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^a} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}^a}{\partial x^a} = 0. \tag{13}$$

Тензор энергии-импульса имеет вид

$$T^{ab} = T^{ba} = -g^{ac} g^{bd} g^{kl} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial x^c} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x^d} + \frac{\partial \bar{\varphi}_l}{\partial x^d} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^c} \right) - g^{ab} \Lambda. \tag{14}$$

Группа $\varphi \to e^{i\alpha}\varphi$, $\bar{\varphi} \to e^{-i\alpha}\bar{\varphi}$ порождает сохраняющийся ток

$$J^a = -i g^{ab} g^{cd} \left( \frac{\partial \varphi_c}{\partial x^b} \bar{\varphi}_d - \frac{\partial \bar{\varphi}_c}{\partial x^b} \varphi_d \right). \tag{15}$$

**Задачи.** 1. Проверьте сохранение тока $\frac{\partial J^a}{\partial x^a} = 0$ в силу уравнений Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{\varphi}} = 0, \quad \frac{\delta S}{\delta \varphi} = 0 \leftrightarrow (\Box + m^2)\,\varphi = 0. \tag{16}$$

2. Проверьте, что при отсутствии дополнительных условий (13) на векторное поле энергия $\int T^{00} d^3x$ не будет, вообще говоря, положительной величиной.

Включение электромагнитного поля производится снова по правилу

$$i\frac{\partial}{\partial x^a} \to i\frac{\partial}{\partial x^a} + eA_a \quad (\hbar = c = 1). \tag{17}$$

Решения типа плоской волны $\operatorname{const} e^{i\langle k,\, x\rangle}$ обладают (при $\hbar = c = 1$) свойством $\langle k,\, k\rangle = m^2$ (проверьте!). Тем самым $k$ — импульс, лежащий на массовой поверхности.

Полный лагранжиан (вместе с электромагнитным полем) инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\varphi \to e^{i\alpha(x)}\varphi, \quad \bar{\varphi} \to e^{-i\alpha(x)}\bar{\varphi}, \quad A_a \to A_a + \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x^a}. \tag{18}$$

Особый случай представляет собой уже встречавшееся ранее векторное поле нулевой массы $m = 0$ (например, электромагнитное поле). В этом случае, если поле $\varphi$ вещественно, лагранжиан эквивалентен лагранжиану электромагнитного поля:

$$\Lambda = \operatorname{const} F_{ab}F^{ab}, \quad \text{где } F_{ab} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial x^b} - \frac{\partial \varphi_b}{\partial x^a}, \tag{19}$$

который инвариантен относительно калибровочной группы:

$$\varphi_a \to \varphi_a - \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x^a}, \quad S \to S. \tag{20}$$

Позднее (см. § 40) будет рассмотрен еще важный класс «спинорных» полей, где значения поля $\varphi$ лежат в пространстве спиноров.

## § 39. Простейшие понятия общей теории относительности

1. Напомним сначала некоторые элементы специальной теории относительности Эйнштейна (СТО; интересно, что в создании этой теории кроме общеизвестных физиков — Эйнштейна и Лоренца — участвовали также крупнейшие геометры своего времени — Пуанкаре и Минковский). Согласно СТО «событию», происшедшему в одной точке пространства в некоторый момент времени, сопоставляется точка четырехмерного пространства-време-