Задачи. 1. Проверьте сохранение тока $\frac{\partial J^a}{\partial x^a} = 0$ в силу уравнений Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{\varphi}} = 0, \quad \frac{\delta S}{\delta \varphi} = 0 \leftrightarrow (\Box + m^2)\varphi = 0. \tag{16}$$

2. Проверьте, что при отсутствии дополнительных условий (13) на векторное поле энергия $\int T^{00} d^3x$ не будет, вообще говоря, положительной величиной.

Включение электромагнитного поля производится снова по правилу

$$i\frac{\partial}{\partial x^a} \to i\frac{\partial}{\partial x^a} + eA_a \quad (\hbar = c = 1). \tag{17}$$

Решения типа плоской волны $\operatorname{const} e^{i\langle k, x\rangle}$ обладают (при $\hbar = c = 1$) свойством $\langle k, k\rangle = m^2$ (проверьте!). Тем самым k — импульс, лежащий на массовой поверхности.

Полный лагранжиан (вместе с электромагнитным полем) инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\varphi \to e^{i\alpha(x)}\varphi, \quad \bar{\varphi} \to e^{-i\alpha(x)}\bar{\varphi}, \quad A_a \to A_a + \frac{\partial\alpha(x)}{\partial x^a}. \tag{18}$$

Особый случай представляет собой уже встречавшееся ранее векторное поле нулевой массы $m = 0$ (например, электромагнитное поле). В этом случае, если поле φ вещественно, лагранжиан эквивалентен лагранжиану электромагнитного поля:

$$\Lambda = \operatorname{const} F_{ab}F^{ab}, \quad \text{где } F_{ab} = \frac{\partial\varphi_a}{\partial x^b} - \frac{\partial\varphi_b}{\partial x^a}, \tag{19}$$

который инвариантен относительно калибровочной группы:

$$\varphi_a \to \varphi_a - \frac{\partial\alpha(x)}{\partial x^a}, \quad S \to S. \tag{20}$$

Позднее (см. § 40) будет рассмотрен еще важный класс «спинорных» полей, где значения поля φ лежат в пространстве спиноров.

§ 39. Простейшие понятия общей теории относительности

1. Напомним сначала некоторые элементы специальной теории относительности Эйнштейна (СТО; интересно, что в создании этой теории кроме общеизвестных физиков — Эйнштейна и Лоренца — участвовали также крупнейшие геометры своего времени — Пуанкаре и Минковский). Согласно СТО «событию», происшедшему в одной точке пространства в некоторый момент времени, сопоставляется точка четырехмерного пространства-време-

ни $\mathbb{R}^4_1$ с метрикой Минковского $dl^2=(dx^0)^2-\sum\limits_{\alpha=1}^{3}(dx^\alpha)^2$ в псевдоевклидовых координатах x^a, $a=0, 1, 2, 3$, где $x^0=ct$, t — время, c — скорость света в пустоте ($c\approx 299793$ км/с). Определялись времениподобные, световые (или изотропные) и пространственноподобные векторы ξ, для которых соответственно $\langle\xi,\xi\rangle>0$, $\langle\xi,\xi\rangle=0$ или $\langle\xi,\xi\rangle<0$, а также кривые $\gamma(\tau)$ времениподобные, световые или пространственноподобные, у которых по определению вектор скорости $v=\frac{d\gamma}{d\tau}$ (в каждой точке) таков, что $\langle v, v\rangle>0$, либо $\langle v, v\rangle=0$, либо $\langle v, v\rangle<0$ соответственно. Мировая линия массивной частицы (масса $m>0$) времениподобна, а мировая линия безмассовой частицы (масса $m=0$) световая. При изложении СТО можно пользоваться одним из двух лагранжианов свободной массивной частицы:

$$S^{(1)}=\int\limits_{\gamma(\tau)}L^{(1)}_{\text{св}}d\tau=\alpha\int\limits_{\gamma(\tau)}\langle v, v\rangle\, d\tau \quad\text{или}\quad S^{(2)}=\int\limits_{\gamma(\tau)}L^{(2)}_{\text{св}}d\tau=$$
$$=\beta\int\limits_{\gamma(\tau)}\sqrt{\langle v,v\rangle}\, d\tau.$$

Здесь $\gamma(\tau)$ — мировая линия частицы в пространстве Минковского $\mathbb{R}^4_1$, $v=\frac{d\gamma(\tau)}{d\tau}$ — вектор 4-скорости, α и β — константы, значение которых $\alpha=\frac{1}{2}mc$, $\beta=-mc$ (см. § 32). Обычно в физической литературе используют лагранжиан $L^{(2)}_{\text{св}}=\beta\sqrt{\langle v, v\rangle}$, для которого действие $S^{(2)}=\int L^{(2)}_{\text{св}}d\tau$ пропорционально четырехмерной длине мировой линии $\gamma(\tau)$. Функционал l или $S^{(2)}$ не зависит от параметра τ. Поэтому можно выбрать $\tau=\frac{x^0}{c}=t$ (мировое время). Окончательно получаем лагранжиан в трехмерном формализме, удобный для сопоставления с классической механикой:

$$L^{(2)}_{\text{св}}=\beta\langle v, v\rangle^{1/2}=\beta c\sqrt{1-\frac{|w|^2}{c^2}}, \tag{1}$$

где $v=\frac{d\gamma}{dt}$ или $v^a=\frac{dx^a}{d(x^0/c)}=c\frac{dx^a}{dx^0}$,

$$v^0=c,\quad v^\alpha=\frac{dx^\alpha}{dt}=w^\alpha,\quad \alpha=1, 2, 3$$

(w^α — компоненты так называемого вектора трехмерной скорости $w=\left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right)$ в $\mathbb{R}^3$). Если $|w|\ll c$ (нерелятивистский случай), то

$$L^{(2)}_{\text{св}}=\beta\langle v, v\rangle^{1/2}=\beta c\sqrt{1-\frac{|w|^2}{c^2}}\approx\beta c\left(1-\frac{w^2}{2c^2}+O\left(\frac{w^4}{c^4}\right)\right). \tag{2}$$

Полагая $\beta = -mc$, мы приходим при $|w|/c \to 0$ к лагранжиану свободной частицы в классической механике с точностью до членов $O(w^4/c^4)$.

Энергия и импульс имеют вид для свободной частицы

$$E = w\frac{\partial L^{(2)}_{\text{св}}}{\partial w} - L^{(2)}_{\text{св}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-w^2/c^2}}, \quad p_\alpha = -\frac{mw^\alpha}{\sqrt{1-w^2/c^2}} = \frac{\partial L^{(2)}_{\text{св}}}{\partial w^\alpha}. \tag{3}$$

Полагая $E/c = p_0$, мы получим 4-вектор $p = (p^a)$, где $p^a = g^{ab}p_b$, g^{ab} — метрика Минковского. Непосредственно проверяется равенство, которому удовлетворяет 4-импульс свободной частицы массы m:

$$p^a p^b g_{ab} = \langle p, p\rangle = (p_0)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3}(p_\alpha)^2 = m^2c^2. \tag{4}$$

Уравнение (4) задает массовую поверхность в линейном (кокасательном) пространстве импульсов (p^a) с метрикой g_{ab}. Это — пространство Лобачевского (см. § 10), на котором элемент объема имеет вид $d\sigma = d^3p/p_0$.

При использовании лагранжиана $L^{(2)}_{\text{св}} = \alpha\langle v, v\rangle$ мы из результатов § 31 получаем: формальная величина $v\frac{\partial L^{(1)}_{\text{св}}}{\partial v} - L^{(1)}_{\text{св}} = L^{(1)}_{\text{св}} = \alpha\langle v, v\rangle$ сохраняется вдоль экстремалей (в силу уравнения Эйлера — Лагранжа). Поэтому $\langle v, v\rangle = \text{const}$; тем самым параметр τ на кривой $\gamma(\tau)$ должен быть натуральным: $dl = d\tau\,\text{const}$. Пусть $d\tau = dl/c$ (собственное время). Определим 4-вектор энергии-импульса $p_a = \frac{\partial L^{(1)}_{\text{св}}}{\partial v}$, где $v^a = \frac{dx^a}{\partial \tau}$, τ — натуральный параметр, $d\tau = dl/c$. Выбирая $\alpha = m/2$, получим то же самое значение 4-импульса $(p_0, p_\alpha) = p$, что и для лагранжиана $L^{(2)}_{\text{св}}$ (выше). Отсюда следует, в частности, что p^a — действительно 4-вектор при преобразованиях в $\mathbb{R}^4_1$. Величина $\langle v, v\rangle$ вдоль траекторий постоянна; при $d\tau = dl/c$ имеем $\langle v, v\rangle = c^2$. Величина v для параметра $\tau = l/c$ и называется обычно инвариантной 4-скоростью (v^a), в отличие от 3-скорости $\mathbf{w} = (w^1, w^2, w^3)$. Соответствие таково:

$$w^\alpha = c\frac{v^\alpha}{v^0}, \quad \langle v, v\rangle = (v^0)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3}(v^\alpha)^2 = c^2. \tag{5}$$

Если в пространстве $\mathbb{R}^4_1$ имеется электромагнитное поле с вектор-потенциалом $A_a(x)$, то лагранжиан частицы во внешнем поле имеет вид

$$L^{(1)} = L^{(1)}_{\text{св}} + \frac{e}{c}A_a\frac{dx^a}{d\tau}, \quad \tau = \frac{l}{c}, \tag{6}$$

или

$$L^{(2)} = L^{(2)}_{\text{св}} + \frac{e}{c} A_\alpha \frac{dx^\alpha}{dt} + eA_0, \quad t = \frac{x^0}{c}. \tag{7}$$

Таким образом, включение внешнего поля $A_a(x)$ равносильно сдвигу 4-импульса (см. § 33)

$$p_a \to p_a + \frac{e}{c} A_a(x). \tag{8}$$

В гамильтоновом формализме гамильтониан свободной частицы имеет вид $H = E(p) = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} = cp_0$, где $p^2 = \sum\limits_{\alpha=1}^{3} (p_\alpha)^2$. При включении поля $A_a = (A_0, A_\alpha)$ имеем

$$E(p) \to H(x, p) = c\sqrt{\sum_\alpha \left(p_\alpha + \frac{e}{c} A_\alpha\right)^2 + m^2c^2} + eA_0(x) \tag{9}$$

(см. § 33). Тензор напряженности имеет вид $F_{ab} = \frac{\partial A_b}{\partial x^a} - \frac{\partial A_a}{\partial x^b}$, где $F_{0\alpha} = E_\alpha$ (электрическое поле) и $F_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}$ (магнитное поле). Действие самого поля имеет вид

$$S\{A\} = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ab} F^{ab} d^4x. \tag{10}$$

При этом должны выполняться уравнения

1) $d\left(F_{ab}dx^a \wedge dx^b\right) = \left(\frac{\partial F_{ab}}{\partial x^c} - \frac{\partial F_{ac}}{\partial x^b} + \frac{\partial F_{bc}}{\partial x^a}\right) dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c = 0$ (первая пара уравнений Максвелла),

2) при отсутствии частиц мы имеем $\frac{\partial F^{ab}}{\partial x^b} = 0$ (вторая пара уравнений Максвелла).

Если имеется набор частиц с зарядами $e_1, \ldots, e_N$, массами $m_1, \ldots, m_N$, мировыми линиями $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ в $\mathbb{R}^4_1$ и поле $A_a(x)$, то полное действие системы частиц и поля таково (два варианта):

$$S^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} \alpha \int\limits_{\gamma_i} \langle v_i, v_i \rangle d\tau + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\gamma_i} \frac{e_i}{c} \left(A_a(x) v_i^a\right) d\tau - \frac{1}{16\pi c} \int F_{ab} F^{ab} d^4x; \tag{11}$$

$$S^{(2)} = -\sum_{i=1}^{N} m_i c^2 \int\limits_{\gamma_i} \sqrt{1 - \frac{w_i^2}{c^2}}\, dt + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\gamma_i} \left[\frac{e_i}{c} A_\alpha(x) w_i^\alpha dt + e_i A_0(x)\, dt\right] - \frac{1}{16\pi c} \int F_{ab} F^{ab} d^4x, \tag{12}$$

где $\gamma_i(\tau) = x_i^a(\tau)$ — координаты i-й частицы, w_i и v_i — скорости

i-й частицы. Из вида лагранжиана частицы во внешнем поле (11) следует, что параметр вдоль экстремали во внешнем поле совпадает с натуральным параметром (или собственным временем):

$$v\frac{\partial L^{(1)}}{\partial v}-L^{(1)}=v\frac{\partial L^{(1)}_{\text{св}}}{\partial v}-L^{(1)}_{\text{св}}=\text{const}\cdot\langle v,v\rangle,\quad \frac{d}{d\tau}\langle v,v\rangle=0.$$

2. Включение гравитационных сил в СТО по указанной схеме невозможно. Точнее: чисто формально можно попытаться ввести «вектор-потенциал» гравитационных сил A^G_a, где заряды e_i заменены массами m_i («масса частицы есть ее гравитационный заряд»); вектор-потенциал $A^G_a(x)$ естественно взять таким, что в специальной системе координат, в которой мы определяли экспериментально гравитационные силы, он должен иметь вид $A^G=(\varphi, 0, 0, 0)$, где φ — обычный гравитационный потенциал, удовлетворяющий уравнению Даламбера вместо уравнения Лапласа. В этом случае движение частицы во внешнем поле A^G можно получить из лагранжиана (11), где A заменено на A^G и e на m. Однако (на это указал еще Пуанкаре) для смещения перигелия Меркурия получится неправильная поправка к закону Ньютона, численно не совпадающая с наблюдаемой (хотя и имеющая правильный порядок величины). Таким образом, следует искать другого пути для соединения гравитационного поля с теорией относительности. Основная гипотеза общей теории относительности Эйнштейна (ОТО) такова: гравитационное поле есть просто метрика g_{ab} сигнатуры $(+---)$ в четырехмерном пространстве-времени M^4 с координатами (x^0, x^1, x^2, x^3); при этом метрика g_{ab}, вообще говоря, имеет ненулевую кривизну (величина кривизны и характеризует степень нетривиальности гравитационного поля). Пробная частица во внешнем гравитационном поле — это просто «свободная частица в пространстве с метрикой g_{ab}», которая движется по времениподобной геодезической $\gamma(\tau)=\{x^a(\tau)\}$, задаваемой лагранжианом (здесь $m\neq 0$)

$$L^{(1)}_{\text{св}}=m\langle v,v\rangle=m\frac{dx^a}{d\tau}\frac{dx^b}{d\tau}g_{ab}. \tag{13}$$

Если $m=0$, то частица движется по световой геодезической в метрике g_{ab}.

Собственное время вдоль линии $\gamma(\tau)$ — это $l/c=\tau$, $dl/c=d\tau$, $|v|=\text{const}$. Включение электромагнитного поля с вектор-потенциалом $A_a(x)$ производится как выше, только метрика Минковского заменяется метрикой g_{ab}:

$$S=\int\limits_{\gamma(\tau)}L^{(1)}d\tau=\int\limits_{\gamma(\tau)}L^{(1)}_{\text{св}}d\tau+\frac{e}{c}\int\limits_{\gamma(\tau)}A_a(x)\,dx^a. \tag{14}$$

Действие самого поля имеет вид

$$S_{\text{поля}} = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{ab}F^{ab}\sqrt{-g}\,d^4x, \quad F_{ab} = \frac{\partial A_b}{\partial x^a} - \frac{\partial A_a}{\partial x^b}, \tag{15}$$

где $d\sigma = \sqrt{-g}d^4x$ — элемент объема, $g = \det(g_{ab})$, $F^{ab} = g^{ac}g^{bd}F_{cd}$ — результат поднятия индексов у тензора F_{ab} в метрике g_{ab}. Уравнения Максвелла в метрике g_{ab} таковы:

$$\begin{gathered} \frac{\delta S_{\text{поля}}}{\delta A_a} = 0 \text{ (в отсутствие зарядов)}, \\ d\left(F_{ab}dx^a \wedge dx^b\right) = 0 \text{ (1-я пара)}, \\ \nabla_b F^{ab} = 0 \text{ (2-я пара)}. \end{gathered} \tag{16}$$

Не обсуждая пока уравнений для самого гравитационного поля g_{ab}, укажем одно простое следствие гипотезы Эйнштейна. Рассмотрим достаточно слабое гравитационное поле — метрику g_{ab} (пока мы не уточняем термин «слабое») и «медленную» массивную частицу в этом поле, движущуюся по геодезической

$$\ddot{x}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{x}^b\dot{x}^c = 0, \quad a, b, c = 0, 1, 2, 3, \tag{17}$$

где Γ^a_{bc}—символы Кристоффеля (коэффициенты связности, порожденной метрикой g_{ab},— см. § 29). За время здесь взято собственное время вдоль геодезической — натуральный параметр $\tau = l/c$. Пусть $t = x^0/c$, как и в СТО. Будем предполагать, что «слабая» метрика g_{ab} представлена в виде формального ряда по $1/c$, причем $1/c$ считается малым параметром:

$$g_{ab} = g^{(0)}_{ab} + c^{-2}g^{(2)}_{ab} + c^{-3}g^{(3)}_{ab} + \ldots = g^{(0)}_{ab} + O(1/c^2) \tag{18}$$

(здесь предполагается, что $g^{(1)}_{ab} = 0$, а $g^{(0)}_{ab}$ — метрика Минковского). Мы считаем частицу медленной, т. е. $\frac{dx^\alpha}{dt} \ll c$ $\Big($величина $\frac{1}{c}\frac{dx^\alpha}{dt}$ имеет порядок $O(1/c)$ по определению «медленности»$\Big)$. Для собственного времени τ или натурального параметра имеем

$$d\tau = \frac{dl}{c} = \sqrt{\frac{1}{c^2}\frac{dx^a}{dt}\frac{dx^b}{dt}g_{ab}}\,dt \quad \left(t = \frac{x_0}{c}\right) \tag{19}$$

или

$$d\tau = \sqrt{1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)}\,dt = \left[1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right]dt. \tag{20}$$

Для символов Кристоффеля имеем (см. § 29)

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}\left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{cd}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d}\right). \tag{21}$$

Так как $x^0 = ct$ и t — конечная величина, то в силу (18) производные вида $\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^0}$ в формуле для Γ^a_{bc} имеют порядок $O\left(\frac{1}{c^3}\right)$ (метрика Минковского $g^{(0)}_{ab}$ постоянна).

Производные вида $\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^\alpha}$ имеют порядок $O\left(\frac{1}{c^2}\right)$ при $\alpha = 1, 2, 3$, так как величины x^α считаются конечными. В уравнении (17) можно в силу (20) с той же точностью заменить $d\tau$ на dt; из слагаемых с символами Кристоффеля в этом уравнении при $a = 1, 2, 3$ наибольший порядок будет иметь $\Gamma^\alpha_{00}\dot{x}^0\dot{x}^0 \approx \Gamma^\alpha_{00}c^2 + O\left(\frac{1}{c}\right)$ так как величины $\dot{x}^\alpha$ при $\alpha = 1, 2, 3$ имеют порядок $O(1)$. Для Γ^α_{00} в силу (18) имеем

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha}\left(-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}\right) + O\left(\frac{1}{c^3}\right),$$

или

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} + O\left(\frac{1}{c^3}\right). \tag{22}$$

Уравнение (17) приобретает вид

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\Gamma^\alpha_{00}c^2 + O\left(\frac{1}{c}\right), \tag{23}$$

где $\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}$. Для медленных частиц в слабом поле уравнение (23) должно совпадать с уравнением Ньютона частицы в классическом гравитационном поле с потенциалом $\varphi(x)$ с точностью до величин порядка $O\left(\frac{1}{c}\right)$. Поскольку $c^2\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}c^2 + O\left(\frac{1}{c}\right)$, то коэффициент метрики g_{00} должен иметь вид

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi(x)}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \tag{24}$$

где φ — ньютоновский гравитационный потенциал. В этом случае уравнение (23) приобретет вид уравнения Ньютона

$$\ddot{x}^\alpha = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} + O\left(\frac{1}{c}\right). \tag{25}$$

Таким образом имеет место

Утверждение. *Если справедлива гипотеза Эйнштейна, то коэффициент метрики g_{00} должен зависеть от гравитационного потенциала (в слабом поле) так:*

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi(x)}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right).$$

В частности, собственное время $d\tau = dl/c$ отличается от мирового времени dt; для неподвижной частицы с мировой линией $x^\alpha = \text{const}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ получим

$$\begin{gathered} c d\tau = \sqrt{g_{00}\left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2}\, dt = c\sqrt{g_{00}}\, dt, \\ d\tau \cong dt\left(1 + \frac{\varphi(x)}{c^2}\right). \end{gathered} \tag{26}$$

Так как всегда $\varphi \leqslant 0$, мы имеем следствие: в слабом гравитационном поле время между двумя событиями уменьшается (для неподвижной частицы):

$$\tau < t, \quad \text{если} \quad \varphi < 0$$

(имеется в виду временной интервал между двумя событиями $\left(x^0 = x_1^0,\ x^\alpha = 0\right)$ и $\left(x^0 = x_2^0,\ x^\alpha = 0\right)$ вдоль мировой линии $x^\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$).

3. Рассмотрим теперь гравитационное поле (g_{ab}), т. е. метрику сигнатуры $(+---)$ в области четырехмерного пространства, где нет никаких других полей и частиц. Мы примем гипотезу, что теория гравитационного поля должна быть, как говорят, «общековариантной», т. е. уравнения самого гравитационного поля должны иметь одинаковый вид во всех системах координат и выражаться через тензор кривизны $R^a{}_{bcd}$ метрики g_{ab}. Не входя в детальное обсуждение этого вопроса, укажем уравнение Эйнштейна для гравитационного поля в пустоте через кривизну Риччи $R_{bc} = R^a{}_{bac}$:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 0 \tag{27}$$

$\left(\text{или } R_{ab} = 0, \text{ так как } \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R_a^a\right)$. Оператор Эйнштейна $R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}$ обладает важным свойством для любой метрики g_{ab}:

$$\nabla_a \left(R_b^a - \frac{1}{2} R \delta_b^a\right) \equiv 0 \tag{28}$$

(следствие тождеств Бьянки — см. § 30). Уравнение (27) на метрику g_{ab} обладает следующими свойствами:

1. Это уравнение имеет второй порядок.

2. Для слабых полей, где $g_{00} = 1 + 2\varphi(x)/c^2 + O(1/c^3)$, это уравнение приводит к уравнению Пуассона для потенциала φ:

$$\Delta\varphi = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{(\partial x^\alpha)^2} = 0 \tag{29}$$

(это будет показано ниже).

3. Это уравнение может быть записано как уравнение Эйлера — Лагранжа. Действие и лагранжиан (указанный Гильбертом) имеют вид

$$S = \int R \sqrt{-g}\, d^4x, \quad g = \det(g_{ab}), \quad R = R^a_a. \tag{30}$$

Вариация δS и вариационная производная $\frac{\partial S}{\partial g^{ab}}$ вычислялись в § 37 и имеют вид

$$\delta S = \int \left(R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}\right) \delta g^{ab} \sqrt{-g}\, d^4x, \tag{31}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial S}{\partial g^{ab}} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}.$$

Задача. Покажите, что операторы вида $R_{ab} - \gamma R g_{ab}$ являются вариационными производными тогда и только тогда, когда $\gamma = 1/2$; в лагранжевом случае должно быть выполнено тождество (28).

Замечание. Требованиям 1—3 удовлетворяют также уравнения вида

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \lambda g_{ab}. \tag{32}$$

До настоящего времени нет оснований считать, что $\lambda \neq 0$ (λ называют «космологической постоянной»; пока считается, что $\lambda = 0$; по космологическим оценкам $\lambda < 10^{-56}$ см$^{-2}$).

Простейшим нетривиальным решением уравнения Пуассона $\Delta\varphi = 0$ (вне создающих поле масс) является стационарное сферически симметричное решение

$$\varphi = \frac{\text{const}}{r}, \quad r^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} (x^\alpha)^2, \tag{33}$$

причем константа может быть отождествлена с суммарной массой тела, создающего поле φ (тело сферически симметрично),

$$\varphi = -G\frac{M}{r}, \tag{34}$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ см^3/г $\cdot$ с^2 — гравитационная постоянная Ньютона. Найдем аналог ньютоновского потенциала $-G\frac{M}{r}$ в ОТО. Рассмотрим сферически симметричную метрику g_{ab}, не зависящую от времени $t = x^0/c$. Будем искать метрику в виде (пусть $c = 1$)

$$dl^2 = c^2dt^2 g_{00} + g_{11}dr^2 - r^2 d\Omega^2, \tag{35}$$

где $g_{00} = e^\nu$, $g_{11} = -e^\lambda$, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$ — элемент длины на единичной сфере в сферических координатах (θ, φ). При этом из стационарности и сферической симметричности следует, что $g_{00}=g_{00}(r)$ и $g_{11}=g_{11}(r)$. Для коэффициентов Γ^a_{bc}, согласно формулам Кристоффеля (см. § 29) ($x^0=ct$, $x^1=r$, $x^2=\theta$, $x^3=\varphi$), имеем $\left(a'=\frac{\partial a}{\partial r},\ \dot{a}=\frac{\partial a}{\partial t}\right)$

$$\Gamma^1_{11}=\frac{\lambda'}{2},\quad \Gamma^0_{10}=\frac{\nu'}{2},\quad \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma^0_{11}=\frac{\dot{\lambda}}{2}e^{\lambda-\nu},\quad \Gamma^1_{22}=-re^{-\lambda},\quad \Gamma^1_{00}=\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda},$$

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^3_{23}=\operatorname{ctg}\theta,\quad \Gamma^0_{00}=\frac{\dot{\nu}}{2},$$

$$\Gamma^1_{10}=\frac{\dot{\lambda}}{2},\quad \Gamma^1_{33}=-r\sin^2\theta e^{-\lambda}.$$

Составляя уравнения Эйнштейна $R_{ab}=0$, окончательно получаем: $\dot{\lambda}=0$, $e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}=0$, $e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=0$. Имеем интеграл $\lambda+\nu=f(t)$. Заменой $t'=\psi(t)$ можно сделать функцию f нулевой. Решение имеет вид

$$g_{00}=1-\frac{a}{r},\ g_{11}=\frac{1}{1-(a/r)},$$

где a — некоторая константа.

Это — *метрика Шварцшильда*

$$dl^2=\left(1-\frac{a}{r}\right)c^2dt^2-\frac{1}{1-(a/r)}dr^2-r^2d\Omega^2. \tag{36}$$

При $r\to\infty$ метрика становится слабой, и мы имеем

$$g_{ab}\approx g^{(0)}_{ab}+\frac{1}{c^2}g^{(2)}_{ab}+O\left(\frac{1}{c^3}\right), \tag{37}$$

где

$$g^{(2)}_{00}=-\frac{ac^2}{r}. \tag{38}$$

Отсюда получаем: $a=\frac{2MG}{c^2}$, где M — масса тела, создающего поле, G и c — константы. Величину $a=\frac{2GM}{c^2}$ для тела массы M называют *гравитационным радиусом Шварцшильда* (для массы Земли $a=0{,}44$ см, для массы Солнца $a=3$ км). Если тело столь плотно, что его размер порядка (или меньше чем) a, то из формулы (36) видно возникновение некоторых особенностей при $r\to a$. Более детально об этих особенностях будет сказано далее, в § 30 части II. Пока можно утверждать только, что формула (36) корректна в области $r>a$.

Ранее мы указали, что коэффициент g_{00} определяется потенциалом φ (с точностью до $O(1/c^3)$). Этого было достаточно для сопоставления уравнения медленных времениподобных геодезических с классическим уравнением Ньютона частицы в поле φ (см. выше). Зная метрику поля полностью, мы можем изучить также поправки к движению быстрых частиц при больших r, в частности безмассовых частиц. Уравнение световых геодезических в метрике (36) имеет вид

$$\frac{d^2x^a}{d\eta^2}+\Gamma^a_{bc}\frac{dx^a}{d\eta}\frac{dx^b}{d\eta}=0,\quad a=0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{39}$$

где $g_{ab}\dfrac{dx^a}{d\eta}\dfrac{dx^b}{d\eta}\equiv 0$. Не решая уравнения, мы приведем здесь формулу для световой геодезической в сферически симметричной метрике Шварцшильда (геодезическая лежит в плоскости с координатами r, φ). Уравнение световой геодезической имеет вид

$$\varphi=\int\frac{dr}{r^2\sqrt{\dfrac{1}{\rho^2}-\dfrac{1}{r^2}\left(1-\dfrac{a}{r}\right)}},\quad \rho=\text{const}. \tag{40}$$

При $a\to 0$ в качестве предела получаем прямую $r\cos\varphi=\rho$. При малых a можно вычислить поправку к прямолинейности для светового луча, вытекающую из формулы для $\varphi(r)$.

4. С точки зрения ОТО предполагается, что взаимодействие всех видов полей и частиц (всех полей, кроме гравитационного!) с метрикой g_{ab} (гравитационным полем) происходит через так называемый тензор энергии-импульса T_{ab} следующим образом: полное уравнение Эйнштейна имеет вид

$$R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}=\text{const}\cdot T_{ab} \tag{41}$$

или

$$R^b_a-\frac{1}{2}R\delta^b_a=\text{const}\cdot T^b_a. \tag{42}$$

При этом константа предполагается универсальной. Для уточнения ее значения следует рассмотреть слабую метрику вида (36) и тензор энергии-импульса пылевидного облака, где давление равно нулю и скорости вещества равны нулю. Тензор T_{ab} в этом случае имеет вид

$$T_{ab}=\begin{pmatrix}\rho c^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & & & \\ 0 & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{43}$$

где ρ — плотность массы. Мы знаем, что $g_{00}=1+2\varphi/c^2+O(1/c^3)$, где φ — гравитационный потенциал, и выполнено уравнение

Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho. \tag{44}$$

Заметим, что $T_0^0 = \rho c^2$ и $T_a^a = \rho c^2$ для тензора (43). Нетривиальные по модулю $O(1/c^3)$ величины Γ_{bc}^a, нужные для вычисления R_0^0, таковы (см. выше):

$$\Gamma_{00}^{\alpha} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}} + O\left(\frac{1}{c^3}\right),$$

$$R_0^0 = \frac{1}{c^2}\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^{\alpha})^2}\right) + O\left(\frac{1}{c^3}\right) = \frac{1}{c^2}\Delta\varphi + O\left(\frac{1}{c^3}\right).$$

Уравнение Эйнштейна имеет вид

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R\delta_0^0 = \mathrm{const}\, T_0^0,$$

или

$$R_0^0 = \mathrm{const}\left(T_0^0 - \frac{1}{2}T_a^a\right) = \mathrm{const}\cdot\frac{\rho c^2}{2}. \tag{45}$$

Для тензора энергии-импульса (43) имеем $R_0^0 = \Delta\varphi/c^2 = \mathrm{const}\cdot\rho c^2/2$. Требование, что уравнение Эйнштейна (45) превращается в уравнение Пуассона (44), когда тензор энергии-импульса имеет вид (43), позволяет сделать вывод:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}, \tag{46}$$

предполагая размерную константу универсальной $\left(\mathrm{const} = \frac{8\pi G}{c^4}\right)$. Из соотношения (46) следует тождество

$$\nabla_b T_a^b = 0, \tag{47}$$

заменяющее в ОТО законы сохранения.

Укажем виды тензора энергии-импульса, которые у нас уже встречались и важны в первую очередь.

1. *Тензор энергии-импульса электромагнитного поля* (см. выше)

$$T^{ab} = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{ac}F_c^b + \frac{1}{4}g^{ab}F_{cd}F^{cd}\right) \quad (c = 1). \tag{48}$$

2. *Тензор энергии-импульса изотропной сплошной среды (гидродинамический тензор энергии-импульса)*

$$T_{ab} = (p + \varepsilon)u_a u_b - pg_{ab}, \tag{49}$$

где p и ε — давление и плотность энергии среды в «сопутствующей» системе координат (в данной точке), в которой среда покоится (или $u_0 = 1$, $u_\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$). Здесь $u = v/c$ — вектор

4-скорости среды $\langle u, u\rangle = u_a u_b g^{ab} = 1$. В указанной сопутствующей системе отсчета T_{ab} имеет вид

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} \varepsilon & & & 0 \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix}. \qquad (50)$$

Для замыкания уравнений Эйнштейна необходимо знать уравнение состояния — связь между p и ε. Для пылевидного вещества $p = 0$, $\varepsilon = \rho c^2$. Для так называемого «ультрарелятивистского» уравнения состояния $p = \varepsilon/3$ или $T_a^a \equiv 0$.

Задача. Докажите, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет вид

$$\frac{1}{2} T_{ab} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}},$$

где

$$S = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ab} F_{cd} g^{ac} g^{bd} \sqrt{-g}\, d^4x, \quad g = \det(g_{ab}).$$

Замечание. В изложении ОТО обычно определяют симметричный тензор энергии-импульса вещества T_{ab} следующим образом:

$$\frac{\delta S_{\text{материи}}}{\delta g^{ab}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g}\, T_{ab}, \qquad (51)$$

где действие для полей материи предполагается заданным явно в виде функционала как от полей материи, так и от метрики гравитационного поля.

Например, для лагранжианов скалярного и векторного полей (см. § 38) метрика явно входит в виде скалярного произведения градиента в лагранжиан. Для спинорного поля (см. § 40) дело обстоит сложнее. Введение спиноров в ОТО обсуждается в § 41. Тензор энергии-импульса сплошной среды, указанный в этом параграфе, содержит метрику очевидным образом. Полное действие гравитационного поля и материи имеет вид

$$S_{\text{полное}} = \int \left(R \sqrt{-g}\, d^4x + S_{\text{материи}}\right). \qquad (52)$$

Например, если «материей» является электромагнитное поле F_{ab}, то

$$S_{\text{полное}} = \int \left(R \sqrt{-g}\, d^4x + \text{const}\, F_{ab} F^{ab} \sqrt{-g}\, d^4x\right). \qquad (53)$$

Полная система уравнений (Максвелла и Эйнштейна) имеет вид

$$\frac{\delta S_{\text{полное}}}{\delta A_a} = 0, \quad \frac{\delta S_{\text{полное}}}{\delta g^{ab}} = 0. \qquad (54)$$

Замечание. Многократно обсуждался вопрос о том, имеет ли точный смысл плотность энергии самого гравитационного поля (и весь тензор энергии-импульса как общековариантная величина). Из сказанного выше, принимая определение (51) как единственное общефизически верное, видим, что в этом отношении гравитационное поле отличается от всех остальных физических типов полей материи, у которых тензор энергии-импульса определяется по отношению к заданной метрике (конечно, считая верной основную гипотезу Эйнштейна, что гравитационное поле есть метрика, следствия которой сейчас уже успешно выдержали ряд экспериментальных проверок). Как итог всех обсуждений представляется наиболее вероятным, что никакого общековариантного тензора энергии-импульса, кроме правой части уравнений Эйнштейна, не существует. Имеется один важный случай, когда имеет смысл понятие «глобальной гравитационной энергии» (не плотности!): пусть рассматривается «локализованный» чисто гравитационный пакет на фоне метрики Минковского. Из сопоставления с классической нерелятивистской гравитацией следует, что компоненты метрики (точнее, их отклонение от метрики Минковского) должны убывать достаточно регулярно со скоростью порядка r^{-1} по пространственным направлениям при $r \to \infty$ (не быстрее!). В этом случае определяется полная «масса поля» через его асимптотику на пространственной бесконечности по рецепту, соответствующему определению массы тела через асимптотику потенциала в классической гравитации. Эта величина как функционал от трехмерной метрики и ее временных производных оказывается гамильтонианом системы и поэтому может рассматриваться как физическая энергия локализованного гравитационного пакета. Положительность этой величины лишь недавно строго доказана геометрами и физиками. Эта «гравитационная энергия» инвариантна относительно произвольных (внутри) замен координат, которые, однако, для корректности и однозначности этого определения должны достаточно быстро затухать на пространственной бесконечности. Уместно заметить, что в этом случае локализованный «гравитационный пакет» рассматривается по определению как новый объект на фоне метрики Минковского, и его энергия определяется согласно тем же общефизическим рецептам, но уже по отношению к метрике Минковского. На сегодня ни одного такого «локализованного» точного решения (без особенностей метрики, в отсутствие других сортов материи) не известно, хотя их существование, по-видимому, неэффективно можно извлечь из имеющихся в литературе математических теорем; такие «локализованные нелинейные гравитационные волны» не наблюдались пока и вряд ли скоро будут обнаружены; однако этот вопрос представляет собой большой формальный интерес и интенсивно обсуждается в современной литературе. Еще один случай представляет теория малых колебаний метрики около любого фона, которая рассматривается как теория поля, энергия которого определяется по отношению к фоновой метрике (хотя при построении такой теории необходимо быть осторожным и ввести соглашение о правиле устранения координатного произвола).

Эти вопросы в рамках данной книги подробно не рассматриваются.

§ 40. Спинорное представление групп $SO(3)$ и $O(3, 1)$. Уравнение Дирака и его свойства

1. Автоморфизмы алгебры матриц. Рассмотрим полную матричную алгебру $M(n, \mathbb{C})$ в n-мерном пространстве $\mathbb{C}^n$. Построение спинорного представления указанных групп основано на следующем свойстве матричной алгебры.

Лемма 1. *Любой автоморфизм ассоциативной алгебры $M(n, \mathbb{C})$ является внутренним* (напомним, что автоморфизмом $h\colon M(n, \mathbb{C}) \to M(n, \mathbb{C})$ алгебры называется ее изоморфизм на себя; внутренним автоморфизмом алгебры $M(n, \mathbb{C})$ называется автоморфизм вида $h(x) = gxg^{-1}$, где g — матрица из группы $GL(n, \mathbb{C})$).

Доказательство. Напомним, что элемент P алгебры $M(n, \mathbb{C})$ называется *проектором*, если $P^2 = P$. Проекторы P, Q называются *ортогональными*, если $PQ = QP = 0$; очевидно, образы ортогональных проекторов имеют нулевое пересечение. Проектор P называется *одномерным*, если $P(\mathbb{C}^n)$ есть одномерное пространство. Одномерными попарно ортогональными проекторами являются, в частности, матрицы $P_1, \ldots, P_n$, определяемые формулой

$$(P_i)_l^k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = l = i, \\ 0, & \text{если } k \neq i \text{ или } l \neq i. \end{cases} \tag{1}$$

Имеем

$$P_i^2 = P_i, \quad P_iP_j = 0 \text{ при } i \neq j, \quad P_1 + \ldots + P_n = 1. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь автоморфизм $h\colon M(n, \mathbb{C}) \to M(n, \mathbb{C})$ и положим $h(P_i) = P_i'$. Так как, очевидно, $h(1) = 1$, соотношения (2) превращаются под действием h в соотношения

$$(P_i')^2 = P_i', \quad P_i'P_j' = 0 \text{ при } i \neq j, \quad P_1' + \ldots + P_n' = 1. \tag{3}$$

Таким образом, P_i' — проекторы; эти проекторы нетривиальны и попарно ортогональны, и $P_1'(\mathbb{C}^n) + \ldots + P_n'(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^n$. Поэтому все эти проекторы одномерны. Положим $P_i'(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}_i'$.

Обозначим через t_{ij}, где $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, элемент алгебры $M(n, \mathbb{C})$, у которого $(t_{ij})_l^k = 1$ при $i = k$, $j = l$ и $(t_{ij})_l^k = 0$ для остальных значений k, l; иначе говоря, $t_{ij}(e_j) = e_i$ и $t_{ij}(e_r) = 0$