баний метрики около любого фона, которая рассматривается как теория поля, энергия которого определяется по отношению к фоновой метрике (хотя при построении такой теории необходимо быть осторожным и ввести соглашение о правиле устранения координатного произвола).

Эти вопросы в рамках данной книги подробно не рассматриваются.

## § 40. Спинорное представление групп $SO(3)$ и $O(3, 1)$. Уравнение Дирака и его свойства

**1. Автоморфизмы алгебры матриц.** Рассмотрим полную матричную алгебру $M(n, \mathbb{C})$ в $n$-мерном пространстве $\mathbb{C}^n$. Построение спинорного представления указанных групп основано на следующем свойстве матричной алгебры.

Лемма 1. *Любой автоморфизм ассоциативной алгебры* $M(n, \mathbb{C})$ *является внутренним* (напомним, что автоморфизмом $h\colon M(n, \mathbb{C}) \to M(n, \mathbb{C})$ алгебры называется ее изоморфизм на себя; внутренним автоморфизмом алгебры $M(n, \mathbb{C})$ называется автоморфизм вида $h(x) = gxg^{-1}$, где $g$ — матрица из группы $GL(n, \mathbb{C})$).

Доказательство. Напомним, что элемент $P$ алгебры $M(n, \mathbb{C})$ называется *проектором*, если $P^2 = P$. Проекторы $P$, $Q$ называются *ортогональными*, если $PQ = QP = 0$; очевидно, образы ортогональных проекторов имеют нулевое пересечение. Проектор $P$ называется *одномерным*, если $P(\mathbb{C}^n)$ есть одномерное пространство. Одномерными попарно ортогональными проекторами являются, в частности, матрицы $P_1, \ldots, P_n$, определяемые формулой

$$(P_i)_l^k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = l = i, \\ 0, & \text{если } k \neq i \text{ или } l \neq i. \end{cases} \tag{1}$$

Имеем

$$P_i^2 = P_i, \quad P_iP_j = 0 \text{ при } i \neq j, \quad P_1 + \ldots + P_n = 1. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь автоморфизм $h\colon M(n, \mathbb{C}) \to M(n, \mathbb{C})$ и положим $h(P_i) = P_i'$. Так как, очевидно, $h(1) = 1$, соотношения (2) превращаются под действием $h$ в соотношения

$$(P_i')^2 = P_i', \quad P_i'P_j' = 0 \text{ при } i \neq j, \quad P_1' + \ldots + P_n' = 1. \tag{3}$$

Таким образом, $P_i'$ — проекторы; эти проекторы нетривиальны и попарно ортогональны, и $P_1'(\mathbb{C}^n) + \ldots + P_n'(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^n$. Поэтому все эти проекторы одномерны. Положим $P_i'(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}_i'$.

Обозначим через $t_{ij}$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, элемент алгебры $M(n, \mathbb{C})$, у которого $(t_{ij})_l^k = 1$ при $i = k$, $j = l$ и $(t_{ij})_l^k = 0$ для остальных значений $k$, $l$; иначе говоря, $t_{ij}(e_j) = e_i$ и $t_{ij}(e_r) = 0$

при $r \neq j$, где $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис пространства $\mathbb{C}^n$. Очевидно,

$$t_{ii} = P_i, \quad t_{ij}t_{rs} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq s, \quad t_{ij}t_{ri} = t_{rj}. \tag{4}$$

Полагая $h(t_{ij}) = t'_{ij}$ и применяя $h$ к соотношениям (3), получаем соотношения

$$t'_{ii} = P'_i, \quad t'_{ij}t'_{rs} = 0 \text{ при } i \neq s, \quad t'_{ij}t'_{ri} = t'_{rj}. \tag{5}$$

Поскольку $P_k t'_{ij} = 0$ при $k \neq j$, образ $t'_{ij}(\mathbb{C}^n)$ одномерен и совпадает с $\mathbb{C}'_j$, более того, $t'_{ij}$ изоморфно отображает $\mathbb{C}'_i$ на $\mathbb{C}'_j$.

Зафиксируем произвольный ненулевой вектор $e'_1 \in \mathbb{C}'_1$ и положим $e'_i = t'_{1i}(e'_1)$. Векторы $e'_1, \ldots, e'_n$ отличны от нуля и лежат в $\mathbb{C}'_1, \ldots, \mathbb{C}'_n$; поэтому они составляют базис пространства $\mathbb{C}^n$. Определим преобразование $g$: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ формулой

$$g(e_i) = e'_i \tag{6}$$

и покажем, что для любого $x \in M(n, \mathbb{C})$

$$h(x) = gxg^{-1}. \tag{7}$$

Прежде всего заметим, что

$$t'_{ij}(e'_i) = t'_{ij}t'_{1i}(e'_1) = t'_{1j}(e'_1) = e'_j,$$
$$t'_{ij}(e'_r) = t'_{ij}t'_{rr}(e'_r) = 0 \text{ при } r \neq i.$$

Из этого видно, что $t'_{ij}(e'_r) = gt_{ij}g^{-1}(e'_r)$ для любого $r$, т. е. что

$$h(t_{ij}) = gt_{ij}g^{-1}$$

при любых $i$, $j$. Но тогда $h(x) = gxg^{-1}$ при любом $x$, поскольку любая матрица $x$ представляется как линейная комбинация матриц вида $t_{ij}$.

Лемма 1 доказана.

Далее нам будут важны некоторые специальные реализации матричных алгебр $M(2, \mathbb{C})$ и $M(4, \mathbb{C})$ с помощью образующих специального вида — так называемых матриц Паули и Дирака.

**2. Спинорное представление группы $SO$ (3).** Выберем в алгебре $M(2, \mathbb{C})$ следующую систему образующих:

$$1, \ \sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Матрицы $\sigma_j$ ($j = 1, 2, 3$) называются матрицами Паули (см. § 14); вместе с матрицей 1 они дают аддитивный базис в алгебре $M(2, \mathbb{C})$ как линейном (четырехмерном) пространстве, поскольку они линейно независимы. Они связаны соотношениями:

1) $\sigma_q\sigma_l - \sigma_l\sigma_q = 2i\sigma_k$, где $(q, l, k)$ — четная перестановка;
2) $\sigma_q\sigma_l + \sigma_q\sigma_l = 2\delta_{ql}$.

Мы записываем их так:

1) $[\sigma_q, \sigma_l] = 2i\sigma_k$,
2) $\{\sigma_q, \sigma_l\} = 2\delta_{ql}$.

Соотношения 1) означают просто, что матрицы $\frac{i}{2}\sigma_j$ реализуют представление алгебры Ли группы $SO(3)$ (или $SU(2)$). Отметим важное свойство соотношений 2). Реализуем трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ $(x^1, x^2, x^3)$ как пространство бесследных $2\times 2$-матриц с евклидовым базисом $\sigma_j$,

$$(x^1, x^2, x^3) \mapsto x^\alpha\sigma_\alpha.$$

Пусть $\Lambda \in O(3)$ — ортогональное преобразование

$$\Lambda\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x^{\alpha'} = \lambda^\alpha_\beta x^\beta. \tag{9}$$

Положим

$$\sigma'_q = \lambda^\alpha_q\sigma_\alpha. \tag{10}$$

Оказывается, соотношения 2) сохраняются при ортогональных преобразованиях вида (10)

$$\{\sigma'_q, \sigma'_l\} = 2\delta_{ql}.$$

Это очевидным образом выводится из определения ортогональности матрицы $\Lambda$.

Для соотношений 1) имеем

$$[\sigma'_\alpha, \sigma'_\beta] = [\lambda^\gamma_\alpha\sigma_\gamma, \lambda^\delta_\beta\sigma_\delta] = \lambda^\gamma_\alpha\lambda^\delta_\beta[\sigma_\gamma, \sigma_\delta] = 2i\left(\lambda^\gamma_\alpha\lambda^\delta_\beta\varepsilon^t_{\gamma\delta}\sigma_t\right),$$

где

$$\varepsilon^t_{\gamma\delta} = \varepsilon_{\gamma\delta t} = \begin{cases} 1, & \text{если } (\gamma, \delta, t) \text{ — четная перестановка,} \\ -1, & \text{если } (\gamma, \delta, t) \text{ — нечетная перестановка,} \\ 0, & \text{если среди чисел } \gamma, \delta, t \text{ имеются совпадения.} \end{cases}$$

Окончательно имеем

$$[\sigma'_\alpha, \sigma'_\beta] = 2i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma'_\gamma, \text{ если } \Lambda \in SO(3).$$

Таким образом, соотношения 1) также сохраняются при преобразованиях вида (10) для ортогональной матрицы $\Lambda$ в $\mathbb{R}^3$ с определителем $+1$. Соотношения 1) и 2) полностью определяют матричную алгебру $M(2, \mathbb{C})$. Действительно, в силу этих соотношений все произведения $\sigma_i\sigma_j$ выражаются линейно через $1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Отсюда вытекает

Теорема 1. *Преобразование* (10) *для* $\Lambda$ *из* $SO(3)$ *задает автоморфизм* $h(\Lambda)\colon M(2, \mathbb{C}) \to M(2, \mathbb{C})$. *Следовательно, по лем-*

*ме 1 найдется преобразование* $g = g(\Lambda)$: $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *такое, что* $h(x) = gxg^{-1}$ *для любой матрицы* $x$.

Определение 1. Сопоставление $\Lambda \mapsto g(\Lambda)$ называется *спинорным представлением* группы $SO(3)$ в группу $GL(2, \mathbb{C})$.

Это представление многозначно: матрица $g(\Lambda)$ определена с точностью до ненулевого множителя $\lambda \in \mathbb{C}$. Эту многозначность можно уменьшить, если потребовать, чтобы $g(\Lambda) \in SL(2, \mathbb{C})$. Тогда представление делается двузначным, и два значения $g(\Lambda)$ получаются одно из другого умножением на $-1$.

Задача. Показать, что образ последнего двузначного представления лежит в $SU(2)$ и что композиция этого двузначного представления с проекцией $SU(2) \to SU(2)/(\pm 1)$ осуществляет изоморфизм (см. §§ 13, 14)

$$SO(3) \to SU(2)/(\pm 1).$$

Проверьте, что вращению на угол $\varphi$ вокруг оси с направляющим вектором $n = (n_x, n_y, n_z)$, $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$, соответствует преобразование

$$g(n, \varphi) = \exp\left\{-i\frac{\varphi}{2}(n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z)\right\}.$$

**3. Спинорное представление группы Лоренца.** Перейдем к алгебре $M(4, \mathbb{C})$. Выберем в этой алгебре образующие $1$, $\gamma^0$, $\gamma^1$, $\gamma^2$, $\gamma^3$, удовлетворяющие соотношениям

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2g^{ab}\cdot 1, \tag{11}$$

где $g^{ab}$ — метрика Минковского. Для этого достаточно положить

$$\begin{gathered}\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}\end{gathered} \tag{12}$$

(это — $4 \times 4$-матрицы, записанные как блочные $2 \times 2$-матрицы с $2 \times 2$-блоками).

Лемма 2. *Все* $4 \times 4$*-матрицы* $1$, $\gamma^a$, $\gamma^a\gamma^b$ $(a < b)$, $\gamma^a\gamma^b\gamma^c$ $(a < b < c)$ *и* $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ *линейно независимы; алгебра над полем* $\mathbb{C}$ *с образующими* $\gamma^0$, $\gamma^1$, $\gamma^2$, $\gamma^3$ *и соотношениями* (11) *изоморфна матричной алгебре* $M(4, \mathbb{C})$.

Доказательство. Из соотношений (11) следует, что любое произведение элементов $\gamma^a$ можно свести к линейным комбинациям элементов, указанных в лемме 2. Кроме того, число этих элементов равно 16, как и размерность $M(4, \mathbb{C})$. Таким образом, все утверждения леммы 2 будут доказаны, если проверить линейную независимость указанных в лемме произведений для матриц $\gamma^0$, $\gamma^1$, $\gamma^2$, $\gamma^3$, заданных формулами (12). Мы предлагаем читателю выписать все эти 16 матриц и проверить непосредственно их линейную независимость (здесь сложных вычислений нет).

Перейдем теперь к построению спинорного представления группы $O(3, 1)$, используя лемму 1. Рассмотрим пространство Минковского $\mathbb{R}^4$ $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ и матрицу $\Lambda \in O(3, 1)$, $\Lambda = (\lambda^a_b)$. Определим матрицы

$$\gamma'^a = \lambda^a_b \gamma^b. \tag{13}$$

Из соотношений (11) и из того, что матрица $\Lambda$ сохраняет метрику Минковского $g_{ab}$, следует, что матрицы $\gamma'^a$ будут удовлетворять тем же соотношениям

$$\{\gamma'^a, \gamma'^b\} = 2g^{ab} \cdot 1.$$

В силу леммы 2 это показывает, что отображение $h = h(\Lambda)$: $M(4, \mathbb{C}) \to M(4, \mathbb{C})$, действующее по формулам $1 \mapsto 1$, $\gamma^a \mapsto \gamma'^a$, является автоморфизмом полной линейной алгебры $M(4, \mathbb{C})$. Поэтому существует такое $g = g(\Lambda) \in GL(4, \mathbb{C})$, что $h(x) = gxg^{-1}$. Сопоставление $\Lambda \mapsto g(\Lambda)$ называется *спинорным представлением* группы $O(3, 1)$ в группу $GL(4, \mathbb{C})$. Это представление многозначно: матрицы $g$ и $\lambda g$, где $\lambda$ — отличное от нуля комплексное число, соответствуют одному и тому же $\Lambda \in O(3, 1)$. Переходя к группе $SL(4, \mathbb{C})$, получим двузначное представление

$$\Lambda \mapsto \pm g(\Lambda) \in SL(4, \mathbb{C}).$$

Определение 2. Четырехмерное пространство $\mathbb{C}^4$, на котором действует спинорное представление, называется *пространством спиноров* (4-компонентных). Элемент этого пространства $\psi \in \mathbb{C}^4$ называется спинором (пишется как столбец). По построению (см. формулы (12)) пространство $\mathbb{C}^4$ разложено в сумму: $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$,

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{C}^2, \quad \chi \in \mathbb{C}^2. \tag{14}$$

Очевидно, ограничение спинорного представления группы $O(3, 1)$ на подгруппу $SO(3)$ распадается в сумму двух изоморфных неприводимых (спинорных) представлений, описанных выше.

Замечание. Выбирая базис $\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0$, $\tilde{\gamma}^a = -i\gamma^a$, получим соотношение

$$\{\tilde{\gamma}^a, \tilde{\gamma}^b\} = 2\delta^{ab} \cdot 1. \tag{15}$$

С их помощью можно построить спинорное представление группы $SO(4)$, аналогичное спинорному представлению группы $O(3, 1)$.

Задачи. 1. Для вращений из $SO(3) \subset O(3, 1)$ на угол $\varphi$ вокруг единичного вектора $n = (n_1, n_2, n_3)$ в $\mathbb{R}^3$ спинорное представление имеет вид

$$g(\varphi, n) = \exp\left\{-i\,\frac{\varphi}{2}\,(n_1\Sigma_1 + n_2\Sigma_2 + n_3\Sigma_3)\right\},$$

где $\Sigma_j = \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix}$.

2. Для гиперболического вращения на мнимый угол $i\varphi$ в плоскости $(x^0, n)$, где $n$ — трехмерный единичный вектор (элементарного преобразования Лоренца), спинорное представление имеет вид

$$g(\varphi, n) = \exp\left\{-\frac{\varphi}{2}(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3)\right\},$$

где $\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}$.

3. Докажите, что представление пространственного отражения $P(x^0, x) = (x^0, -x)$, где $x$ — трехмерный вектор, имеет вид

$$g(P) = \eta_P\gamma^0, \quad \text{где} \quad \eta_P = \pm i \quad \text{или} \quad \eta_P = \pm 1.$$

4. Покажите, что оператор отражения времени $T(x^0, x) = (-x^0, x)$ представляется в виде

$$g(T) = \eta_T\gamma^0\gamma^1\gamma^3, \quad \text{где} \quad |\eta_T| = 1.$$

В пространстве спиноров $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ можно перейти к новому базису

$$\eta = \frac{\varphi + \chi}{\sqrt{2}}, \quad \xi = \frac{\varphi - \chi}{\sqrt{2}}. \tag{16}$$

Из формул, задающих спинорное представление (задачи 1—3), следует, что «полуспиноры» $\eta$ и $\xi$ преобразуются независимо при преобразованиях из собственной группы Лоренца $SO(3, 1) \subset O(3, 1)$ и переходят друг в друга при пространственном отражении (проверьте):

$$g(P)\colon \ \eta \mapsto \xi, \quad \xi \mapsto \eta, \tag{17}$$
$$P(x^0, x) = (x^0, -x).$$

Определение 3. Действия группы $SO(3, 1)$ на $\eta$ и $\xi$ называются *полуспинорными представлениями* собственной группы Лоренца $SO(3, 1)$; обозначения: $g_+$ для $\eta$ и $g_-$ для $\xi$. (Другое описание полуспинорного представления будет дано в п. 3 § 41.)

Эти представления (по отдельности) не продолжаются на всю группу Лоренца $O(3, 1)$.

Заметим, что матрица $\gamma^0$ в базисе $\psi = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}$ имеет вид (проверьте!)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Спинорное представление группы $O(3, 1)$ не является унитарным. Можно, однако, построить индефинитное скалярное произведение, инвариантное относительно спинорного представления: для этого достаточно положить $\langle\psi, \psi\rangle = \psi^*\gamma^0\psi$. Здесь $\psi^* = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$ — вектор-строка, комплексно сопряженный к столбцу $\psi$.

Задача 5. Проверьте, что величина $\psi^*\gamma^0\psi$ инвариантна относительно группы $O(3, 1)$.

Определение 4. Спинор (строка) $\bar\psi = \psi^*\gamma^0$ называется *дираковски сопряженным* с $\psi$. Заметим, что форма $\bar\psi\psi$ инвариантна относительно спинорного представления.

Задача 6. Докажите, что величина $\bar\psi\gamma^a\psi$ преобразуется как вектор (относительно $O(3, 1)$), величина $\bar\psi\gamma^a\gamma^b\psi$ — тензор 2-го ранга, $\bar\psi\gamma^a\gamma^b\gamma^c\psi$ — тензор 3-го ранга, $\bar\psi\gamma^5\psi = \bar\psi\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi$ — тензор 4-го ранга (псевдоскаляр).

Задача 7. Докажите, что полуспинорные представления $g_+$ и $g_-$ группы $SO(3, 1)$ в $GL(2, \mathbb{C})$ не обладают никаким инвариантным (ненулевым) скалярным произведением.

Указание. Отсутствие инвариантов у полуспинорного представления вытекает из изоморфности одного из них стандартному представлению группы $SL(2, \mathbb{C})$, а другого — сопряженному представлению. Изоморфизм между алгебрами Ли группы $SL(2,\mathbb{C})$ и группы Лоренца есть частный случай изоморфизма (24.72) при $n = 2$, где алгебра Ли конформных преобразований сферы $S^2$ реализуется как алгебра Ли группы $SO(3, 1)$.

В базисе $\psi = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}$ форма $(\psi, \psi) = \bar\psi\psi$ имеет вид $\bar\psi\psi = \psi^*\gamma^0\psi = \xi^*\eta + \eta^*\xi$ (проверьте!).

**4. Уравнение Дирака.** Алгебра $\gamma$-матриц с соотношениями (11) естественно возникает из следующего вопроса: пусть задан оператор Клейна — Гордона $\Box + m^2$. Можно ли разложить его в произведение операторов 1-го порядка так:

$$-(\Box + m^2) = \left(i\gamma^a \frac{\partial}{\partial x^a} + m\right)\left(i\gamma^b \frac{\partial}{\partial x^b} + (-m)\right)? \tag{19}$$

Задача. Докажите, что разложение (19) эквивалентно соотношениям

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2g^{ab} \cdot 1, \tag{20}$$

где $\square = g^{ab}\frac{\partial}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x^b}$ (т. е. разложение (19) возможно, если в качестве коэффициентов взять элементы алгебры $\gamma$-матриц).

Определение 5. Уравнение

$$\left(i\gamma^b\frac{\partial}{\partial x^b} - m\right)\psi = 0 \tag{21}$$

на спинорное поле $\psi$ называется *уравнением Дирака*.

Задача. Проверьте, что сопряженное уравнение имеет вид

$$i\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^a}\gamma^a + m\bar{\psi} = 0, \tag{22}$$

где $\bar{\psi} = \psi^*\gamma^0$.

Уравнение Дирака получается из действия

$$S = \int\left[\frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^a\frac{\partial\psi}{\partial x^a} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^a}\gamma^a\psi\right) - m\bar{\psi}\psi\right]d^4x, \tag{23}$$

где $\psi$ и $\bar{\psi}$ считаются независимыми. Тензор энергии-импульса и ток имеют вид

$$T^{ab} = \frac{i}{2}g^{ac}\left(\bar{\psi}\gamma^b\frac{\partial\psi}{\partial x^c} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^c}\gamma^b\psi\right) = T^{ba}, \tag{24}$$

$$J^a = \bar{\psi}\gamma^a\psi, \quad a = 0, 1, 2, 3. \tag{25}$$

Величина $J^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^*(\gamma^0)^2\psi = \psi^*\psi$ есть плотность заряда. Заряд имеет вид

$$Q = \int\psi^*\psi d^3x = \int J^0 d^3x. \tag{26}$$

Очевидно, $Q > 0$. Напротив, плотность энергии $T^{00}$ не является положительно определенной; это вызывает ряд трудностей, которые мы здесь обсуждать не будем.

Решения типа $\text{const}\cdot e^{i\langle k,x\rangle}$ имеют волновой вектор на массовой поверхности $\langle k, k\rangle = m^2$ $(\hbar = c = 1)$. Их отождествляют с частицами, если $k^0 > 0$ (т. е. импульс лежит на верхней части массовой поверхности). Необходимость этого ограничения вытекает из требования положительности энергии частицы.

В базисе $(\eta, \xi)$ уравнения Дирака приобретут вид

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\eta}{\partial t} &= \langle\sigma, p\rangle\eta + m\xi, \\ i\frac{\partial\xi}{\partial t} &= -\langle\sigma, p\rangle\xi + m\eta, \end{aligned} \tag{27}$$

где $p = i\frac{\partial}{\partial x}$ $(\hbar = c = 1)$. Мы видим, что при нулевой массе $m = 0$ это уравнение распадается на два независимых уравнения (уравнения Вейля), описывающих частицы, законы движения которых не инвариантны относительно пространственных отражений (полуспинорное представление группы $SO(3, 1)$ не продолжается на пространственное отражение) и которые имеют нулевую массу (полуспинорное представление не обладает инвариантным скалярным произведением, которое в лагранжиане могло бы дать члены типа массы).

**5. Уравнение Дирака в электромагнитном поле. Оператор зарядового сопряжения.** Включение внешнего электромагнитного поля производится по стандартному правилу $p_a \to p_a + eA_a$ ($\hbar = c = 1$). Поэтому мы должны сделать обычную замену в лагранжиане и уравнениях

$$\frac{\partial}{\partial x^a} \to \frac{\partial}{\partial x^a} - ieA_a(x),$$

где $e$ — заряд ($\hbar = c = 1$). Уравнения Дирака во внешнем поле принимают вид

$$\begin{gathered}\left[\tilde{\gamma}^a\left(\frac{\partial}{\partial x^a} - ieA_a(x)\right) + m\right]\psi = 0,\\ \bar{\psi}\left[(\tilde{\gamma}^a)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial}{\partial x^a} + ieA_a(x)\right) - m\right] = 0,\end{gathered} \tag{28}$$

где $\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0$, $\tilde{\gamma}^a = -i\gamma^a$ (ср. замечание в п. 3) и T обозначает транспонирование. Рассмотрим матрицу $C = \tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^0$. Она обладает следующим свойством (проверьте):

$$C^{-1}\tilde{\gamma}^a C = -(\tilde{\gamma}^a)^{\mathrm{T}}. \tag{29}$$

Из формулы (29) и уравнения Дирака вытекает

Теорема 2. *Если поля $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ удовлетворяют уравнениям Дирака (28) с зарядом $e$ в поле $A_a(x)$, то поля $\psi^c(x) = C\bar{\psi}(x)$ и $\bar{\psi}^c(x) = C^{-1}\psi(x)$ удовлетворяют уравнениям (28) в том же поле $A_a(x)$, но с заменой $e \to -e$.*

Преобразование $\psi \mapsto \psi^c$ называют преобразованием зарядового сопряжения, так как оно меняет знак заряда у частицы, описываемой полем $\psi$. Отсюда вытекает важное следствие: спинорное представление и уравнение Дирака описывает сразу два сорта частиц: частицы с зарядом $e$ и частицы с зарядом $-e$. Одно и то же решение $\psi(x)$ уравнений Дирака (28) определяет волновую функцию электрона $\psi(x)$ и волновую функцию позитрона $\psi^c(x)$.

Задача. Проверьте, что: а) оператор зарядового сопряжения коммутирует с собственной группой Лоренца; б) этот оператор коммутирует с пространственным отражением $g(P) = \eta_P\tilde{\gamma}^0$, если $\eta_P = \pm i$ (и не коммутирует, если $\eta_P = \pm 1$); в) этот оператор $\psi \to \psi^c$ коммутирует с временным отражением, если $\eta_T = \pm 1$ (см. задачи 3, 4 из п. 3).