§ 41. Ковариантное дифференцирование полей с произвольной симметрией

1. Калибровочные преобразования. Калибровочно инвариантные лагранжианы. Начнем с важного примера. Рассмотрим комплексное скалярное поле ψ и лагранжиан вида

$$L = L\left(\psi, \overline{\psi}, \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^\alpha}\right), \tag{1}$$

где черта обозначает комплексное сопряжение, ψ и $\overline{\psi}$ считаются формально независимыми (см. § 38).

Пусть лагранжиан L инвариантен относительно группы зарядовых преобразований вида

$$\psi \to e^{i\varphi}\psi, \quad \overline{\psi} \to e^{-i\varphi}\overline{\psi} \qquad (\varphi = \text{const}): \tag{2}$$

$$L\left(e^{i\varphi}\psi, e^{-i\varphi}\overline{\psi}, e^{i\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}, e^{-i\varphi}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^\alpha}\right) = L\left(\psi, \overline{\psi}, \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^\alpha}\right). \tag{3}$$

Например, такой инвариантностью обладает рассмотренный в § 38 лагранжиан вида

$$L = \hbar^2 g^{\alpha\beta}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x^\beta} - m^2c^2\overline{\psi}\psi. \tag{4}$$

Исходя из принципа локальности, потребуем инвариантности лагранжиана относительно более общих преобразований вида (2), а именно, допустим, что φ зависит от x. Это означает, что группа (2) действует в каждой точке независимо.

Оказывается, можно получить лагранжиан, инвариантный относительно таких преобразований

$$\psi \to e^{ie\varphi(x)}\psi, \qquad \overline{\psi} \to e^{-ie\varphi(x)}\overline{\psi}, \tag{5}$$

при помощи следующей процедуры:

1) вводим новое ковекторное поле A_α, которое при преобразованиях (5) преобразуется с помощью градиентных преобразований

$$A_\alpha \to A_\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} \quad (\hbar = c = 1); \tag{6}$$

2) вводим новый лагранжиан $\widetilde{L}$, полагая

$$\widetilde{L}\left(\psi, \overline{\psi}, \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^\alpha}, A_\alpha\right) = L\left(\psi, \overline{\psi}, \nabla_\alpha\psi, \overline{\nabla_\alpha\psi}\right), \tag{7}$$

где

$$\nabla_\alpha\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} + ieA_\alpha\psi; \tag{8}$$

выражение (7) является скаляром, поскольку $\nabla_\alpha\psi$ есть ковектор;

3) полный лагранжиан инвариантной теории должен иметь вид $L(\psi, \bar{\psi}, \nabla\psi, \overline{\nabla\psi}) + L_1\left(A, \frac{\partial A}{\partial x}\right)$, где член L_1 градиентно инвариантен. Вид члена L_1 будет обсуждаться в § 42.

Теорема 1. *Лагранжиан* (7) *инвариантен относительно* (*локальных*) *преобразований* (5), (6).

Доказательство. Вычислим, как преобразуется «ковариантная производная». Имеем $\nabla_\alpha\psi \to \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(e^{ie\varphi(x)}\psi\right) + ie\left(A_\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\right)\psi = e^{ie\varphi(x)}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} + ieA_\alpha\psi\right] = e^{ie\varphi(x)}\nabla_\alpha\psi$. Поэтому при преобразованиях (5), (6) новый лагранжиан не изменится:

$$L(e^{ie\varphi}\psi, e^{-ie\varphi}\bar{\psi}, e^{ie\varphi}\nabla_\alpha\psi, e^{-ie\varphi}\overline{\nabla_\alpha\psi}) = L(\psi, \bar{\psi}, \nabla_\alpha\psi, \overline{\nabla_\alpha\psi})$$

в силу инвариантности исходного лагранжиана. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь общий случай, когда $\psi(x) = (\psi^1(x), \ldots \ldots, \psi^N(x))$ есть поле в пространстве $\mathbb{R}^n$ со значениями в (вещественном) векторном пространстве. Пусть задан лагранжиан $L\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}\right)$, инвариантный относительно некоторой группы G матриц порядка N:

$$L\left(g\psi, g\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}\right) = L\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}\right), \quad g \in G. \tag{9}$$

Ковариантная производная поля $\psi(x)$ задается формулой

$$\nabla_\alpha\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} + A_\alpha(x)\psi, \tag{10}$$

где $A_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ — набор матричнозначных функций в пространстве $\mathbb{R}^n$ со значениями в алгебре Ли группы G. Требуется, чтобы величины $A_\alpha(x)$ при заменах по x образовывали ковектор:

$$A_\alpha(x) = A_\beta(y)\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}, \quad y = y(x). \tag{11}$$

Теорема 2. *При преобразованиях вида*

$$\psi(x) \to g(x)\psi(x), \tag{12}$$

$$A_\alpha(x) \to g(x)A_\alpha(x)g^{-1}(x) - \frac{\partial g(x)}{\partial x^\alpha}g^{-1}(x) \tag{13}$$

ковариантная производная преобразуется по закону

$$\nabla_\alpha\psi \to g(x)\nabla_\alpha\psi. \tag{14}$$

Лагранжиан $\tilde{L}\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}, A_\alpha\right) = L(\psi, \nabla_\alpha\psi)$ *при указанных преобразованиях инвариантен.*

Доказательство. Из формул (10), (12), (13) имеем

$$\nabla_\alpha \psi(x) \to \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(g(x)\psi) + \left[gA_\alpha g^{-1} - \frac{\partial g(x)}{\partial x^\alpha} g^{-1}\right] g\psi =$$
$$= g(x)\left[\frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} + A_\alpha \psi\right] = g(x)\, \nabla_\alpha \psi.$$

Равенство (14) доказано. Заметим теперь, что ковариантная производная вектор-функции ψ образует ковектор:

$$\nabla_\alpha \psi(x) = \nabla_\beta \psi(y) \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}, \quad y = y(x),$$

так же, как и градиент $\frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}$. Поэтому из равенства (14) и условия инвариантности (9) вытекает инвариантность нового лагранжиана:

$$L(g\psi,\ g\nabla_\alpha \psi) = L(\psi,\ \nabla_\alpha \psi).$$

Утверждение доказано.

Введенное поле A_α называют *калибровочным* (или *компенсирующим*) полем (или *связностью*), а преобразования вида (13) — *калибровочными преобразованиями*. Эти преобразования образуют *калибровочную группу*.

Требование инвариантности лагранжиана относительно группы локальных преобразований вида (12) определяет лагранжиан взаимодействия поля ψ с калибровочным полем, но не определяет лагранжиана самого калибровочного поля. Мы вернемся к этому вопросу в § 42.

Замечание. Частным случаем векторнозначных полей являются поля, принимающие значения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Пусть $B(x)$ — такое поле. Калибровочное поле (связность) A_α определяет ковариантную производную поля $B(x)$ по формуле

$$\nabla_\alpha B = \frac{\partial B}{\partial x^\alpha} + [A_\alpha,\ B], \qquad (15)$$

где $[A_\alpha, B] = A_\alpha B - BA_\alpha$ — коммутатор в алгебре Ли.

Задачи. 1. Проверьте, что при калибровочных преобразованиях вида

$$B(x) \to g(x)\, B(x)\, g(x)^{-1},$$
$$A_\alpha(x) \to g(x)\, A_\alpha(x)\, g^{-1}(x) - \frac{\partial g(x)}{\partial x^\alpha} g^{-1}$$

ковариантная производная $\nabla_\alpha B$ преобразуется по закону

$$\nabla_\alpha B \to g(x)\,(\nabla_\alpha B)\, g^{-1}(x).$$

2. Проверьте, что бесконечно малые калибровочные преобразования могут быть представлены в виде

$$\psi(x)\to\psi(x)+B(x)\psi(x)+o(B),$$
$$A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\nabla_\mu B(x)+o(B),$$

где $B(x)$ — поле, принимающее значение в алгебре Ли.

2. Форма кривизны. Вычислим коммутатор двух ковариантных производных:

$$[\nabla_\mu,\ \nabla_\nu]\,\psi=\nabla_\mu\nabla_\nu\psi-\nabla_\nu\nabla_\mu\psi=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu}+A_\nu\psi\right)+$$
$$+A_\mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu}+A_\nu\psi\right)-\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}+A_\mu\psi\right)-A_\nu\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}+A_\mu\psi\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}+[A_\mu,\ A_\nu]\right)\psi.$$

Введем обозначение

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}+[A_\mu,\ A_\nu].\tag{16}$$

Вывод. *Коммутатор операторов ∇_μ, ∇_ν есть оператор умножения на матрицу $F_{\mu\nu}$.*

Теорема 3. *При калибровочных преобразованиях* (13) *величины $F_{\mu\nu}$ преобразуются следующим образом*:

$$F_{\mu\nu}\to gF_{\mu\nu}g^{-1}.\tag{17}$$

Величины $F_{\mu\nu}$ образуют антисимметричный тензор 2-го ранга (со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$) и при заменах координат преобразуются по закону

$$F_{\mu\nu}(x)=F_{\alpha\beta}(y)\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu},\quad y=y(x).\tag{18}$$

Доказательство состоит в прямой подстановке формул (13) в выражение (16) для $F_{\mu\nu}$.

Форма $\Omega=\sum\limits_{\mu<\nu}F_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G называется *формой кривизны* связности A_μ.

Связность A_μ называется *тривиальной*, если существует такая функция $g_0(x)$ со значениями в группе G, что

$$A_\mu(x)=-\frac{\partial g_0(x)}{\partial x^\mu}g_0^{-1}(x).\tag{19}$$

Теорема 4. *Форма кривизны тривиальной связности равна нулю.*

Доказательство. Применяя к полю A_μ калибровочное преобразование $A_\mu \to \tilde{A}_\mu = gA_\mu g^{-1} - \frac{\partial g}{\partial x^\alpha} g^{-1}$, $g = g_0^{-1}$, получим $\tilde{A}_\mu \equiv 0$. Согласно предыдущему утверждению форма кривизны $F_{\mu\nu}$ перейдет в форму $g_0^{-1} F_{\mu\nu} g_0$, которая есть нуль. Утверждение доказано.

Задачи. 1. Докажите обратное утверждение: если форма кривизны связности есть тождественный нуль, то связность тривиальна (локально).

2. Определим ковариантный дифференциал формы Ω, полагая

$$D\Omega = \sum_{\lambda<\mu<\nu} (\nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} + \nabla_\mu F_{\nu\lambda})\, dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{20}$$

Докажите, что если Ω — форма кривизны некоторой связности, то справедливо тождество Бьянки: $D\Omega \equiv 0$.

3. **Основные примеры.** а) $G = U(1) = SO(2)$. Мы уже знаем (см. § 38), что введение электромагнитного поля A_μ, взаимодействующего со скалярным комплексным полем ψ, эквивалентно замене в лагранжиане всех производных $\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}$ на ковариантные производные $\nabla_\alpha \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} + ieA_\alpha \mu$. Именно с обсуждения этого примера мы и начали этот параграф. Здесь группа G — одномерная коммутативная группа $G = U(1) = \{e^{i\varphi}\}$. Ее алгебра Ли также одномерна и коммутативна (т. е. имеет тождественно нулевой коммутатор) и состоит из чисто мнимых чисел. Связность — это вектор-потенциал самого электромагнитного поля $ieA_\mu(x)$. Форма кривизны этой связности — это тензор напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ (члена с коммутаторами здесь нет). Тождество Бьянки — это условие замкнутости формы $\Omega = \sum_{\mu<\nu} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = d(A_\mu dx^\mu)$.

Другие примеры связаны с некоммутативными калибровочными группами.

б) Линейная связность. $G = GL(n, \mathbb{R})$. Координаты $x^1, \ldots, x^n$ в некоторой области U задают базис $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ в пространстве векторов. Поэтому касательные векторные поля в области U можно рассматривать как векторнозначные функции $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ (со значениями в $\mathbb{R}^n$). Замена координат $x^\nu \to x^{\nu'} = x^{\nu'}(x)$ в области U определяет локальное преобразование вида

$$\xi^\nu \to \xi^{\nu'} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \xi^\nu = g(x)\xi. \tag{21}$$

Здесь матрица $g(x) = \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\right)$ обратима, т. е. лежит в группе

$GL(n, \mathbb{R})$. Обратная матрица имеет вид $g^{-1} = \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\right)$. Алгебра Ли группы $GL(n, \mathbb{R})$ образована всеми матрицами n-го порядка. Поэтому коэффициенты связности $A_\mu(x)$ сами являются матрицами n-го порядка. Обозначим их матричные элементы через $(A_\mu)^\nu_\lambda = \Gamma^\nu_{\lambda\mu}$. Ковариантная производная вектор-функции (т. е. касательного вектора) ξ имеет вид

$$(\nabla_\mu \xi)^\nu = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\xi^\lambda \leftrightarrow \nabla_\mu \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x^\mu} + A_\mu \xi. \tag{22}$$

Калибровочное преобразование коэффициентов связности $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, задаваемое преобразованием координат, где $g(x) = \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\right)$, дает

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} \to \Gamma^{\nu'}_{\lambda'\mu} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\Gamma^\nu_{\lambda\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} + \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\lambda'}}\right). \tag{23}$$

Поскольку $A_\mu(x)$ есть ковектор, то $A_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} A_\mu$, т. е.

$$\Gamma^{\nu'}_{\lambda'\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\Gamma^\nu_{\lambda\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} + \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\mu'}}. \tag{24}$$

Мы получили выведенный в § 28 закон преобразования для символов Кристоффеля. Отметим, что матричнозначная форма кривизны этой связности имеет вид

$$(F_{\mu\nu})^\varkappa_\lambda = R^\varkappa{}_{\lambda,\mu\nu}, \tag{25}$$

где $R^\varkappa{}_{\lambda,\mu\nu}$ — тензор кривизны (см. § 30).

Пусть в области U задана риманова метрика $g_{\alpha\beta}(x)$. Построим (локально) нормированный базис попарно ортогональных касательных векторов $e_1, \ldots, e_n$:

$$\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}.$$

Ковариантные производные вида $\nabla_{e_\alpha} e_\beta = \sum \Gamma_{\beta\alpha\gamma} e_\gamma$ для симметричной связности, согласованной с метрикой $g_{\alpha\beta}$, были вычислены в § 30. В этом случае калибровочные преобразования дают

$$\xi(x) \to g(x)\xi(x), \quad \xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n),$$

где $\xi = \xi^\alpha e_\alpha$ — касательное векторное поле, $g(x)$ — ортогональная $n \times n$-матрица при каждом x. Связность имеет вид $(A_\alpha)_{\beta\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha\gamma}$, где при каждом α матрица $\Gamma_{\beta\alpha\gamma}$ антисимметрична по индексам β и γ и поэтому лежит в алгебре Ли ортогональной группы. Форма кривизны $(F_{\mu\nu})_{\varkappa\lambda} = R_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ также принимает значение в алгебре

Ли кососимметрических матриц:

$$R_{\varkappa\lambda,\,\mu\nu} = -R_{\lambda\varkappa,\,\mu\nu}$$

(см. § 30). Для псевдоримановой метрики все аналогично.

Для случая метрики на двумерной поверхности форма кривизны имеет вид

$$\Omega = K\sqrt{g}\,dx^1 \wedge dx^2, \tag{26}$$

где K — гауссова кривизна поверхности.

в) Картановская связность. G — аффинная группа (линейные преобразования и трансляции). Пусть задана любая линейная связность $\nabla_\mu\xi^\nu$ на касательных векторах. Определим «картановскую связность» формулой

$$\tilde{\nabla}_\mu\xi^\nu = \nabla_\mu\xi^\nu + \delta^\nu_\mu. \tag{27}$$

Задача. 1) Покажите, что связность $\tilde{\nabla}_\mu$ инвариантна относительно локальных аффинных преобразований вида

$$\xi \to g\xi + y, \tag{28}$$

где $g = \left(\dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\right)$ — матрица замены координат $x' = x'(x)$, а $y = (y^1(x), \ldots, y^n(x))$ — любой вектор.

2) Покажите, что форма кривизны этой связности (со значениями в алгебре Ли аффинной группы — см. §§ 4, 24) имеет вид

$$F_{\mu\nu} = \left(R^\varkappa{}_{\lambda,\mu\nu},\ T^\lambda_{\mu\nu}\right). \tag{29}$$

Здесь $R^\varkappa{}_{\lambda,\mu\nu}$ — тензор кривизны связности, $T^\lambda_{\mu\nu}$ — тензор кручения.

г) Ковариантное дифференцирование спиноров и метрика. Пусть M^4 — пространственно-временной континуум с метрикой $g_{\alpha\beta}$ (типа (1, 3)). Связность, согласованная с этой метрикой, порождает ковариантное дифференцирование спиноров. Мы разберем подробно случай полуспинорного представления (см. § 40). Явная реализация этого представления такова. Представим произвольную эрмитову 2×2-матрицу U, $\overline{U}^{\mathrm{T}} = U$, в виде

$$U = \begin{pmatrix} u^0 + u^3 & u^1 + iu^2 \\ u^1 - iu^2 & u^0 - u^3 \end{pmatrix} = u^\alpha\sigma_\alpha, \quad \overline{U}^{\mathrm{T}} = U, \tag{30}$$

где $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — матрицы Паули (см. § 40); матрицы $\sigma_0, \ldots, \sigma_3$ образуют базис в (вещественном) пространстве эрмитовых матриц. Тогда определитель матрицы U имеет вид

$$\det U = (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2.$$

Этот определитель сохраняется при преобразованиях вида $U \mapsto gU\bar{g}^{\mathrm{T}}$, где матрица g лежит в группе $SL(2, \mathbb{C})$. Таким образом, преобразование $U \mapsto gU\bar{g}^{\mathrm{T}}$ можно рассматривать как сохраняющее метрику преобразование пространства Минковского (с координатами u^0, u^1, u^2, u^3), т. е. как элемент группы $SO(3, 1)$. Мы получаем соответствие (гомоморфизм) $SL(2, \mathbb{C}) \to SO(3, 1)$, при котором матрицы g и $-g$ переходят в одну. Обратное отображение $SO(3, 1) \to SL(2, \mathbb{C})$ двузначно — это и есть полуспинорное представление.

Элементы пространства $\mathbb{C}^2$, в котором действует группа $SL(2,\mathbb{C})$, называем (двухкомпонентными) спинорами; поля со значениями в этом пространстве — спинорными полями. При действии группы $SL(2, \mathbb{C})$ они преобразуются по закону

$$\xi(x) \to g(x)\xi(x), \quad g(x) \in SL(2, \mathbb{C}). \tag{31}$$

Определено также сопряженное представление $\xi \to \bar{g}\xi$.

Ковариантная производная спинорного поля по определению имеет вид

$$\hat{\nabla}_\alpha \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x^\alpha} + A_\alpha \xi, \tag{32}$$

где A_α — комплексная бесследная 2×2-матрица (из алгебры Ли группы $SL(2, \mathbb{C})$). Мы требуем, чтобы сопряженные спиноры дифференцировались по правилу

$$\hat{\nabla}_\alpha \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x^\alpha} + \bar{A}_\alpha \xi. \tag{33}$$

Тем самым определена ковариантная производная от эрмитовых матриц (правило Лейбница). Эрмитовы матрицы U отождествляются с касательными векторами u^α посредством равенства $U = u^\alpha \sigma_\alpha$, где (u^α) — компоненты касательного вектора в «тетраде» векторов e_0, e_1, e_2, e_3, $e_0^2 = -e_1^2 = -e_2^2 = -e_3^2 = 1$ и векторы e_α попарно ортогональны. При таком отождествлении локальные преобразования спиноров вида (31) соответствуют локальным лоренцевым преобразованиям из группы $SO(3, 1)$. Наложим требование, чтобы ковариантная производная $\hat{\nabla}_\alpha U$, определенная по спинорной связности (32), (33), совпадала с выражением $\sigma_\beta \nabla_\alpha u^\beta$, где $\nabla_\alpha u^\beta$ — ковариантная производная вектора u^β относительно симметричной связности, согласованной с метрикой $g_{\mu\nu}$:

$$\hat{\nabla}_\alpha U = \sigma_\beta \nabla_\alpha u^\beta, \quad U = u^\beta \sigma_\beta \tag{34}$$

(компоненты этой связности в тетраде были вычислены в § 30).

З а д а ч а. Доказать, что условиями (32)—(34) ковариантная производная спинорных полей определяется однозначно, причем справедлива формула

$$A_\alpha = -\frac{1}{2}\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}\sigma_\gamma\sigma_\beta \tag{35}$$

(суммирование по индексу β с учетом знака, т. е. слагаемое, отвечающее $\beta=0$, берется с плюсом, остальные — с минусом).

Полное спинорное представление группы $SO(3, 1)$ разлагается в прямую сумму представления $SL(2, \mathbb{C})$ и комплексно сопряженного. Таким образом равенства (32)—(34) позволяют ковариантно дифференцировать также четырехкомпонентные спиноры.

Задача. Вывести вид уравнения Дирака в присутствии метрики.

Замечание. Каждому спинору $\xi=(\xi^0, \xi^1)$ соответствует эрмитова матрица $U=(\xi^\alpha\bar{\xi}^\beta)$. Отвечающий ей вектор $u^k=\sigma^k_{\alpha\beta}\xi^\alpha\bar{\xi}^\beta$ изотропен, поскольку матрица U вырождена (имеет нулевой детерминант).

Задача. Выберем базис $\xi=(\xi^0, \xi^1)$, $\eta=(\eta^0, \eta^1)$ в пространстве спиноров $\mathbb{C}^2$ такой, что $\xi^0\eta^1-\xi^1\eta^0=1$. Показать что с этим базисом канонически связан репер в пространстве Минковского (тетрада), в котором метрика принимает вид

$$(g_{ik})=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

§ 42. Примеры калибровочно инвариантных функционалов. Уравнения Максвелла и Янга — Миллса. Функционалы с тождественно нулевой вариационной производной (характеристические классы)

Лагранжиан $L=L(A_\mu, \partial A_\mu/\partial x^\nu)$ калибровочного поля должен обладать следующими свойствами:

1) $L(A_\mu, \partial A_\mu/\partial x^\nu)$ — скаляр,

2) $L(A_\mu, \partial A_\mu/\partial x^\nu)$ не меняется при калибровочных преобразованиях.

Простейший такой лагранжиан имеет вид

$$L=-\frac{1}{4}g^{\mu\lambda}g^{\nu\varkappa}\langle F_{\mu\nu}, F_{\lambda\varkappa}\rangle, \tag{1}$$

где

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}+[A_\mu, A_\nu].$$

Здесь $g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}(x)$ — произвольная метрика в рассматриваемой области: через $\langle , \rangle$ обозначена форма Киллинга для алгебры Ли группы G (мы считаем, что она не вырождена).

Построенный лагранжиан является скаляром, поскольку он образован посредством алгебраических операций над тензорами.