справедлива формула

$$A_\alpha = -\frac{1}{2}\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}\sigma_\gamma\sigma_\beta \tag{35}$$

(суммирование по индексу β с учетом знака, т. е. слагаемое, отвечающее $\beta = 0$, берется с плюсом, остальные — с минусом).

Полное спинорное представление группы $SO(3, 1)$ разлагается в прямую сумму представления $SL(2, \mathbb{C})$ и комплексно сопряженного. Таким образом равенства (32)—(34) позволяют ковариантно дифференцировать также четырехкомпонентные спиноры.

Задача. Вывести вид уравнения Дирака в присутствии метрики.

Замечание. Каждому спинору $\xi = (\xi^0, \xi^1)$ соответствует эрмитова матрица $U = (\xi^\alpha\bar{\xi}^\beta)$. Отвечающий ей вектор $u^k = \sigma^k_{\alpha\beta}\xi^\alpha\bar{\xi}^\beta$ изотропен, поскольку матрица U вырождена (имеет нулевой детерминант).

Задача. Выберем базис $\xi = (\xi^0, \xi^1)$, $\eta = (\eta^0, \eta^1)$ в пространстве спиноров $\mathbb{C}^2$ такой, что $\xi^0\eta^1 - \xi^1\eta^0 = 1$. Показать что с этим базисом канонически связан репер в пространстве Минковского (тетрада), в котором метрика принимает вид

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 42. Примеры калибровочно инвариантных функционалов. Уравнения Максвелла и Янга — Миллса. Функционалы с тождественно нулевой вариационной производной (характеристические классы)

Лагранжиан $L = L(A_\mu, \partial A_\mu/\partial x^\nu)$ калибровочного поля должен обладать следующими свойствами:

1) $L(A_\mu, \partial A_\mu/\partial x^\nu)$ — скаляр,

2) $L(A_\mu, \partial A_\mu/\partial x^\nu)$ не меняется при калибровочных преобразованиях.

Простейший такой лагранжиан имеет вид

$$L = -\frac{1}{4} g^{\mu\lambda} g^{\nu\varkappa} \langle F_{\mu\nu}, F_{\lambda\varkappa}\rangle, \tag{1}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + [A_\mu, A_\nu].$$

Здесь $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ — произвольная метрика в рассматриваемой области: через $\langle,\rangle$ обозначена форма Киллинга для алгебры Ли группы G (мы считаем, что она не вырождена).

Построенный лагранжиан является скаляром, поскольку он образован посредством алгебраических операций над тензорами.

Проверим его калибровочную инвариантность. При калибровочных преобразованиях (41.13) форма кривизны $F_{\mu\nu}$ перейдет в $gF_{\mu\nu}g^{-1}$. Ввиду инвариантности формы Киллинга (см. § 24) будем иметь

$$\langle gF_{\mu\nu}g^{-1}, gF_{\lambda\varkappa}g^{-1}\rangle = \langle F_{\mu\nu}, F_{\lambda\varkappa}\rangle;$$

отсюда получаем калибровочную инвариантность лагранжиана (1). Пусть метрика $g_{\mu\nu}$ евклидова или псевдоевклидова: $g_{\mu\nu} = \varepsilon_\mu\delta_{\mu\nu}$, $\varepsilon_\mu = \pm 1$. Выведем уравнения Эйлера — Лагранжа для экстремалей функционала

$$S[A_\mu] = \int -\frac{1}{4}\langle F_{\mu\nu}, F_{\mu\nu}\rangle d^n x \qquad (2)$$

(по дважды повторяющимся индексам μ, ν суммирование с учетом знаков ε_ν, $\varepsilon_\mu = \pm 1$).

Теорема 1. *Для экстремалей функционала* (2) *имеем уравнения*

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu} = 0, \qquad (3)$$

где $\nabla_\mu F_{\mu\nu} \equiv \dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}]$ (*см.* § 41).

Доказательство. Для малой локальной вариации δA_μ будем иметь

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int \langle F_{\mu\nu}, \delta F_{\mu\nu}\rangle d^n x,$$

где $\delta F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\delta A_\nu - \dfrac{\partial}{\partial x^\nu}\delta A_\mu + [\delta A_\mu, A_\nu] + [A_\mu, \delta A_\nu]$. Интегрируя в выражении для δS по частям:

$$\int \left\langle F_{\mu\nu}, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta A_\nu\right\rangle d^n x = -\int \left\langle \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\mu}, \delta A_\nu\right\rangle d^n x,$$

и используя инвариантность формы Киллинга:

$$\langle F_{\mu\nu}, [\delta A_\mu, A_\nu]\rangle = -\langle [F_{\mu\nu}, A_\nu], \delta A_\mu\rangle,$$

получим

$$\delta S = \frac{1}{2}\int \left\{\left\langle \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\mu}, \delta A_\nu\right\rangle - \left\langle \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\nu}, \delta A_\mu\right\rangle + \right.$$
$$\left. + \langle [F_{\mu\nu}, A_\nu], \delta A_\mu\rangle - \langle [F_{\mu\nu}, A_\mu], \delta A_\nu\rangle\right\} d^n x.$$

После переобозначения индексов получим

$$\delta S = \int \left\langle \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}], \delta A_\nu\right\rangle d^n x = \int \langle \nabla_\mu F_{\mu\nu}, \delta A_\nu\rangle d^n x,$$

причем δS равняется нулю на экстремалях при произвольной вариации δA_ν. Поэтому для экстремалей функционала (2) получаем уравнение $\nabla_\mu F_{\mu\nu} = 0$. Утверждение доказано.

Замечание. Сами уравнения $\nabla_\mu F_{\mu\nu}=0$ и тождество Бьянки $\nabla_\lambda F_{\mu\nu}+\nabla_\mu F_{\nu\lambda}+\nabla_\nu F_{\lambda\mu}=0$ могут быть написаны и без гипотезы невырожденности метрики Киллинга. Однако они не будут иметь (во всяком случае простого) лагранжева вида.

Задача. Для связности Картана аффинной группы эти уравнения после подстановки связи между метрикой и кривизной примут вид уравнений Эйнштейна (извлечение из современных работ)

$$R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}=0. \qquad (4)$$

Пример. В абелевом случае ($G=U(1)$ — электромагнитное поле) получаем лагранжиан вида

$$L=-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right)^2=-\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu}, \qquad (5)$$

т. е. стандартный лагранжиан электромагнитного поля (см. § 38). Уравнения (3) совпадают здесь с уравнениями Максвелла

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\mu}=0. \qquad (6)$$

Замечание. Калибровочное поле A_μ для группы $G=SU(2)$ называется часто *полем Янга — Миллса.*

Задача. Вывести уравнения экстремалей $\frac{\delta S}{\delta A}=0$ для лагранжиана

$$L=-\frac{1}{4}g^{\mu\lambda}g^{\nu\varkappa}\langle F_{\mu\nu},F_{\lambda\varkappa}\rangle,$$

где метрика $g_{\mu\nu}(x)$ произвольна и фиксирована (внешнее поле).

Действие вида

$$S[A]=\int \mathrm{Sp}\,F^2_{\mu\nu}d^4x$$

в четырехмерном пространстве обладает дополнительной симметрией — относительно группы всех конформных преобразований в $\mathbb{R}^4$ (или в $\mathbb{R}^4_{3,1}$) (см. описание этой группы в § 15). Дифференциал любого конформного преобразования сводится к дилатации и вращению (см. § 15), поэтому достаточно проверить конформную инвариантность только относительно дилатаций $x\to\lambda x$. При таких преобразованиях будем иметь

$$F_{\mu\nu}\to\lambda^{-2}F_{\mu\nu}\quad (F_{\mu\nu}\text{ — тензор}),\qquad d^4x\to\lambda^4\,d^4x,$$

где d^4x — элемент объема. Отсюда, очевидно, имеем

$$\mathrm{Sp}\,F^2_{\mu\nu}d^4x\to\mathrm{Sp}\,F^2_{\mu\nu}d^4x.$$

Вывод. *Лагранжиан* (2) *и уравнения Максвелла — Янга — Миллса* (3) *в пространстве Минковского конформно инвариантны, т. е. имеют группу симметрий* $O(4, 2)$ (см. § 15).

Важную роль играют также калибровочно инвариантные дифференциальные формы со скалярными значениями, зависящие от A_μ. Например, форма (степени 2)

$$c_1 = \operatorname{Sp}\Omega = \sum_{\mu<\nu} \operatorname{Sp} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{7}$$

калибровочно инвариантна:

$$\operatorname{Sp}(g\Omega g^{-1}) = \operatorname{Sp}\Omega.$$

Здесь Sp обозначает след матрицы. Форма $c_1 = \operatorname{Sp}\Omega$ (локально) является точной (полным дифференциалом): $\operatorname{Sp}\Omega = d(\operatorname{Sp} A)$, где $A = A_\mu dx^\mu$. Действительно,

$$\operatorname{Sp}\Omega = \sum_{\mu<\nu} \operatorname{Sp}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + [A_\mu, A_\nu]\right) dx^\mu \wedge dx^\nu =$$

$$= \sum_{\mu<\nu} \operatorname{Sp}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right) dx^\mu \wedge dx^\nu = d \operatorname{Sp} A,$$

поскольку след коммутатора матриц равен нулю.

При локальной вариации связности $A_\mu \to A_\mu + \delta A_\mu$ форма $\operatorname{Sp}\Omega$ переходит в форму $\operatorname{Sp}\Omega + \operatorname{Sp}\delta\Omega$, где $\operatorname{Sp}\delta\Omega = d \operatorname{Sp}\delta A$ — точная форма. Поэтому функционал

$$S_1[A_\mu] = \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{Sp}\Omega$$

(для двумерного пространства) имеет тождественно нулевую вариационную производную

$$\delta S_1[A_\mu] = \int_{\mathbb{R}^2} d(\operatorname{Sp}\delta A) = 0 \tag{8}$$

в силу локальности вариации.

Определение 1. Замкнутые калибровочно инвариантные формы ω такие, что функционалы $\int \omega$ имеют тождественно нулевую вариационную производную, $\frac{\delta \int \omega}{\delta A} = 0$ будем называть (*дифференциально геометрическими*) *характеристическими классами.*

Другие характеристические классы строятся так:

$$c_i = \mathrm{Sp}\,(\Omega \wedge \ldots \wedge \Omega) = \mathrm{Sp}\,\Omega^i, \quad i \geqslant 1, \tag{9}$$

c_i — это калибровочно инвариантная форма ранга $2i$; коэффициенты формы Ω в (9) перемножаются как матрицы.

Задача. а) Докажите, что формы c_i замкнуты при $i \geqslant 1$.

б) Докажите, что функционал

$$S_i[A_\mu] = \int\limits_{\mathbb{R}^{2i}} c_i$$

(для пространства размерности $2i$) имеет тождественно нулевую вариационную производную:

$$\frac{\delta S_i[A]}{\delta A_\mu} \equiv 0.$$

в) Докажите это также для функционалов вида

$$\int\limits_{\mathbb{R}^4} \alpha c_1 \wedge c_1 + \beta c_2, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^6} \alpha c_1^3 + \beta c_1 \wedge c_2 + \gamma c_3$$

и т. д. для любых многочленов от c_i.

Для группы $G = SO(2n)$ нетривиальными являются лишь $p_i = c_{2i}$; $c_1 = c_3 = c_5 = \ldots = 0$. Кроме того, имеется еще один характеристический класс

$$\chi_n = \varepsilon^{i_1 \ldots i_{2n}} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \Omega_{i_2 i_3} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{2n-1} i_{2n}}, \tag{10}$$

где $\varepsilon^{i_1 \ldots i_{2n}}$ — знак перестановки $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 2n \\ i_1 & \ldots & i_{2n} \end{pmatrix}$, Ω_{ij} — матричные элементы формы кривизны

$$\Omega = \sum_{\mu < \nu} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

Пример 1. При $n = 1$ получим для χ_1 выражение (см. предыдущий параграф)

$$\chi_1 = \varepsilon^{i_1 i_2} \Omega_{i_1 i_2} = 2K \sqrt{g}\, dx^1 \wedge dx^2. \tag{11}$$

Как известно (см. § 37), функционал вида

$$S[g_{ij}] = \int\limits_{\mathbb{R}^2} K \sqrt{g}\, dx^1 \wedge dx^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} R \sqrt{g}\, dx_1 \wedge dx^2 \tag{12}$$

имеет тождественно нулевую вариационную производную по метрике (см. § 37).

Пример 2. При $n=2$ имеем χ_2 и c_2. Для римановой метрики

$$\chi_2 = \varepsilon^{ijkl} R_{ij\mu\nu} R_{kl\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma,$$
$$c_2 = R_{ij\mu\nu} R^{ij}_{\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma.$$

Задача. Докажите, что все формы χ_n замкнуты и являются характеристическими классами.

Общий характеристический класс для $G = SO(2n)$ имеет вид многочлена от χ_n, c_2, c_4, ..., c_{2n-2}.

Задача. Покажите, что для $G = SO(4)$ функционалы

$$\int\limits_{\mathbb{R}^4} \chi_2, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^4} c_2, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^8} \chi_2^2, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^8} \chi_2 c_2, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^8} c_2^2$$

имеют тождественно нулевую вариационную производную, т. е. все формы χ_2, c_2, χ_2^2, $\chi_2 c$, c_2^2 являются характеристическими классами.