Глава 1

ПРИМЕРЫ МНОГООБРАЗИЙ

§ 1. Понятие многообразия

1. Определение многообразия. Понятие многообразия представляет собой, в сущности, обобщение впервые математически описанного Гауссом процесса картографирования земной поверхности. Это обобщение оказывается чрезвычайно широким и применимо к громадному классу сложнейших геометрических фигур.

Напомним, в чем состоит сам процесс картографирования. Коллектив людей, которому поручено составить карту земной поверхности, разбивается на группы, исходя из следующих естественных требований.

1) Каждый кусок земной поверхности поручен какой-нибудь группе (с номером i).

2) Если области, порученные двум разным группам (с номерами i и j), пересекаются, то этим группам необходимо четко описать на своих картах правило соответствия их карт в общей области. Обычно это правило пересчета на реальных картах заключается в нанесении на карту достаточно подробного списка наименований географических пунктов, откуда сразу видно, какие точки на разных картах соответствуют друг другу.

Каждая из составленных карт, как мы помним, нанесена на плоский лист бумаги с какими-то координатами на нем. Совокупность этих листов, именуемых картами, называется атласом земной поверхности. Кроме того, на картах обычно указывается правило вычисления истинной длины любого пути, попавшего в данную карту; к этому мы вернемся позднее (понятие длины мы не включаем в понятие многообразия).

Исходя из этих соображений, вводится общее довольно пространное определение, к которому мы и переходим.

Определение 1. *Дифференцируемым n-мерным многообразием* называется произвольное множество точек M, в котором введена следующая структура: 1) множество M представлено в виде объединения конечного или счетного числа областей U_q; 2) в каждой области U_q заданы координаты x_q^α, $\alpha = 1, \ldots, n$, называемые *локальными координатами* *). Сами области U_q при этом называют *координатными окрестностями* или *картами*. Пересечение $U_q \cap U_p$ каждой пары этих областей в множестве M, если оно не пусто, само является областью, в которой уже действуют две системы локальных координат $\left(x_p^\alpha\right)$ и $\left(x_q^\alpha\right)$. Требуется, чтобы каждая из этих систем локальных координат выражалась через другую дифференцируемым образом:

$$\begin{aligned} x_p^\alpha &= x_p^\alpha\left(x_q^1, \ldots, x_q^n\right), \quad \alpha = 1, \ldots, n; \\ x_q^\beta &= x_q^\beta\left(x_p^1, \ldots, x_p^n\right), \quad \alpha = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда якобиан $\det\left(\dfrac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta}\right)$ будет отличен от нуля. Функции (1) называются *функциями перехода* (от координат x_q^β к координатам x_p^α и обратно). Общий класс гладкости функций перехода для всех пересекающихся пар (p, q) называется классом гладкости самого многообразия M, заданного с помощью «атласа» $\{U_q\}$. Простейший пример многообразия — это само евклидово пространство или любая его область.

Область в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ является $2n$-мерной вещественной областью и также является многообразием.

По двум многообразиям $M = \bigcup\limits_q U_q$, $N = \bigcup\limits_p V_p$ можно построить их прямое произведение $M \times N$. Точками многообразия $M \times N$ по определению будут пары точек (m, n); покрытие координатными областями определяется так:

$$M \times N = \bigcup_{p,q} U_q \times V_p. \tag{2}$$

Если $\left(x_q^\alpha\right)$ — координаты в области U_q, $\left(y_p^\beta\right)$ — координаты в области V_p, то координатами в области $U_q \times V_p$ будут $\left(x_q^\alpha, y_p^\beta\right)$.

В дальнейшем встретится ряд других примеров многообразий.

Следует отметить, что введенное нами общее понятие многообразия с чисто логической точки зрения излишне широко; его следует ограничить, и это будет в дальнейшем сделано (см. ниже). Однако формулировка этих логических ограничений будет произведена на языке общей топологии, который мы пока не вводили. Можно это обойти, требуя с самого начала, чтобы многообразие, по определению, располагалось как гладкая неособая поверхность в евклидовом пространстве какого-то (может быть, большого) числа измерений. Логически это неестественно; проще сначала абстрактно определить многообразия и затем доказать,

*) Иначе говоря, задано взаимно однозначное отображение $\varphi_q\colon U_q \to \mathbb{R}^n$, где образ $\varphi_q(U_q)$ есть открытая область в $\mathbb{R}^n$. Это отображение φ_q и вводит в U_q координатную систему $x_q^1, \ldots, x_q^n$, принося с собой координаты из $\mathbb{R}^n$.

что все они могут быть реализованы как поверхности в евклидовом пространстве.

Напомним некоторые понятия из общей топологии.

1. *Топологическое пространство* — это множество точек X, в котором указано, какие подмножества являются *открытыми*. При этом мы требуем, чтобы пересечение любых двух и, значит, любого конечного числа открытых множеств было открыто и чтобы объединение любого числа открытых множеств было открыто. Все X и пустое множество также должны быть открытыми.

Дополнение к открытому множеству называется *замкнутым* множеством.

Уже такое определение, как известно из курса математического анализа, дает возможность ввести непрерывные функции и отображения: отображение $f\colon X \to Y$ одного топологического пространства в другое непрерывно, если полный прообраз $f^{-1}(U)$ любого открытого множества $U \subset Y$ является открытым в X.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ вводится «евклидова топология», в которой открытыми множествами считаются обычные открытые области (см. часть I, § 1). «Индуцированная топология» на произвольном подмножестве $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет в качестве открытых множеств V пересечения $U \cap A = V$, где U есть обычная открытая область в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2. Топология (или евклидова топология) на многообразии M определяется следующим семейством открытых множеств (областей): в каждой координатной области $U_q \subset M$ открытыми считаются открытые области в $\mathbb{R}^n$. Вся совокупность открытых множеств в M получается из этих множеств с помощью операции счетного объединения.

Непрерывными отображениями (функциями) при такой топологизации многообразия M оказываются отображения (функции), непрерывные в каждой координатной области U_q в обычном смысле.

Открытое подмножество V многообразия $M = \bigcup\limits_q U_q$ наследует от M структуру многообразия $V = \bigcup\limits_q V_q$, где области V_q имеют вид

$$V_q = V \cap U_q. \tag{3}$$

2. Важным классом топологических пространств являются *метрические пространства.* Для любых двух точек x, y метрического пространства X определено расстояние $\rho(x, y)$ между этими точками. Требуется, чтобы это расстояние обладало следующими свойствами:

1) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
2) $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) > 0$ при $x \neq y$;
3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ («неравенство треугольника»).

Например, n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ является метрическим относительно евклидова расстояния между точками $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, \ldots, y^n)$:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{n} (x^\alpha - y^\alpha)^2}.$$

В метрическое пространство вводится топология: открытыми множествами являются объединения (произвольных семейств) открытых шаров, где открытый шар с центром x_0 радиуса ε есть совокупность таких точек x, что $\rho(x_0, x) < \varepsilon$.

Для n-мерного евклидова пространства эта топология совпадает с введенной выше «евклидовой топологией».

Важный для нас пример — это многообразие, снабженное римановой метрикой (определение расстояния между точками многообразия с римановой метрикой см. в п. 2)).

3. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым*, если любую пару его точек можно окружить непересекающимися друг с другом открытыми множествами.

В частности, метрическое пространство хаусдорфово: если $\rho(x, y) = 2\varepsilon$, то открытые шары радиуса ε с центрами в точках x и y не пересекаются в силу неравенства треугольника. *В дальнейшем мы будем всегда говорить только о хаусдорфовых пространствах.* В частности, в определение многообразия мы внесем еще один пункт: многообразие предполагается хаусдорфовым пространством.

4. Пространство X называется *компактным*, если из любой последовательности точек можно выбрать сходящую последовательность.

Эквивалентно: если X покрыто счетным числом открытых областей, то из них можно выбрать конечное число покрывающих X.

5. *Линейно связное* пространство обладает тем свойством, что любые две его точки можно соединить непрерывной кривой.

6. Другим важным для нас примером топологического пространства является *пространство отображений* $M \to N$ многообразия M в многообразие N, точное описание топологии которого будет дано ниже.

Понятие многообразия лишь на первый взгляд может показаться чересчур абстрактным. Фактически же даже в евклидовом пространстве или его областях мы зачастую бываем вынуждены делать замены координат и следить за законом преобразования тех или иных величин. Более того, часто удобно в разных областях пространства решать ту или иную задачу в разных координатах, затем следить, как решения «сшиваются» в общей области действия двух различных координатных систем. Кроме того, не все поверхности допускают возможность введения единой системы координат без особых точек (например, сфера не допускает).

Важный класс многообразий составляют ориентируемые многообразия:

Определение 3. Многообразие M называется *ориентированным*, если якобианы функций перехода $J_{pq} = \det\left(\frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta}\right)$ положительны для всех пересекающихся пар областей.

Например, евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ по определению ориентировано. То же самое пространство $\mathbb{R}^n$ с другими координатами $(y^1, \ldots, y^n)$ также по определению ориентировано. При этом согласно сказанному выше якобиан замены $x^\alpha = x^\alpha(y^1, \ldots, y^n), J = \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\right)$ отличен от нуля и потому имеет постоянный знак.

Определение 4. Мы скажем, что координаты (x) и (y) определяют одну и ту же ориентацию в $\mathbb{R}^n$ если $J > 0$, и противоположную, если $J < 0$.

Таким образом, евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, обладает двумя ориентациями. В дальнейшем будет показано, что связное многообразие можно ориентировать двумя способами, если ориентация на нем вообще существует.

2. Отображения многообразий; тензоры на многообразии. Пусть заданы два многообразия: $M = \bigcup_p U_p$ (координаты x_p^α) и $N = \bigcup_q V_q$ (координаты y_q^β).

Определение 5. Отображение

$$f\colon M \to N$$

называется *гладким класса гладкости* k, если функции $y_q^\beta(x_p^1, \ldots, x_p^n)$ для всех пар (q, p), когда они определены, в областях, где они определены, являются гладкими класса гладкости k. При этом не имеет смысла говорить о классе гладкости отображения, более высоком, чем класс гладкости самих многообразий M, N.

В случае, если N есть действительная прямая, $N = \mathbb{R}$, отображение $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется числовой функцией $f(x)$, где x — точка многообразия M.

Возможна ситуация, когда гладкое отображение (или числовая функция) определено не на всем многообразии, а лишь на его части. Примером такой ситуации служат сами локальные координаты x_p^α, которые при любом α являются числовыми функциями и определены лишь в области U_p по самому своему смыслу.

Определение 6. Два многообразия M и N называются *гладко эквивалентными (диффеоморфными)*, если найдется взаимно однозначное и гладкое в обе стороны отображение какого-то класса гладкости $k \geqslant 1$:

$$f\colon M \to N, \quad f^{-1}\colon N \to M.$$

В частности, якобиан локальных координат $J_{pq} = \det\left(\dfrac{\partial y_q^\beta}{\partial x_p^\alpha}\right)$ всюду отличен от нуля во всех тех областях, где эти функции $y_q^\beta = f\left(x_p^1, \ldots, x_p^n\right)^\beta$ определены.

Мы всегда будем предполагать, что класс гладкости как самих многообразий, так и их отображений таков, какой нужен для наших целей (всегда $\geqslant 1$; если нужны вторые производные, то не менее двух, и т. д.).

Пусть на многообразии M задана кривая $x = x(\tau)$, $a \leqslant \tau \leqslant b$, где x — точка многообразия. Пока кривая находится в области U_p действия локальной системы координат x_p^α, мы можем записать кривую в виде

$$x_p^\alpha = x_p^\alpha(\tau), \quad \alpha = 1, \ldots, n.$$

В этих координатах мы имеем вектор скорости

$$\dot{x} = \left(\dot{x}_p^1, \ldots, \dot{x}_p^n\right).$$

В области действия двух координатных систем $U_p \cap U_q$ мы имеем две записи: $x_p^\alpha(\tau)$ и $x_q^\beta(\tau)$, причем $x_p^\alpha\left(x_q^1(\tau), \ldots, x_q^n(\tau)\right) \equiv x_p^\beta(\tau)$.

Для скорости получим

$$\dot{x}_p^\alpha = \sum_\beta \frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta} \dot{x}_q^\beta.$$

На основе этой формулы, как и в евклидовом пространстве, вводится

Определение 7. *Касательным вектором* к многообразию M в произвольной точке x называется вектор, записываемый в системе локальных координат $\left(x_q^\alpha\right)$ набором чисел ξ_q^α; записи одного и того же вектора в разных системах локальных координат, содержащих эту точку, связаны формулой

$$\xi_p^\alpha = \sum_{\beta=1}^n \left(\frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta}\right)_x \xi_q^\beta.$$

Касательные векторы к n-мерному многообразию M в данной точке x образуют n-мерное линейное пространство $T_x = T_xM$ (касательное пространство). В частности, вектор скорости любой гладкой кривой является касательным вектором. Выбор локальных координат (x^α) в окрестности точки x задает базис $e_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ в касательном пространстве T_x.

Гладкое отображение f многообразия M в многообразие N определяет индуцированное линейное отображение

$$f_*\colon\ T_x \to T_{f(x)}.$$

При этом вектор скорости кривой $x = x(t)$ на многообразии M по определению переходит в вектор скорости кривой $f(x(t))$ на многообразии N. В локальных координатах (x^α) (в окрестности точки x) и (y^β) (в окрестности точки $f(x)$) отображение f имеет вид

$$y^\beta = f^\beta(x^1, \ldots, x^n), \qquad \beta = 1, \ldots, m.$$

Тогда индуцированное отображение f_* касательных пространств задается матрицей Якоби

$$\xi^\alpha \to \eta^\beta = \frac{\partial f^\beta}{\partial x^\alpha}\xi^\alpha.$$

Для числовой функции $f\colon M \to \mathbb{R}$ на многообразии M индуцированное отображение f_* есть линейная числовая функция на каждом касательном пространстве к многообразию M (ковектор). Эта линейная функция совпадает с дифференциалом df функции f.

Определение 8. *Римановой* (*псевдоримановой*) метрикой на многообразии M называется положительная (невырожденная) квадратичная форма, заданная на касательных векторах в каждой точке многообразия и гладко зависящая от локальных координат. В каждой области U_p действия локальных координат $\left(x_p^\alpha\right)$ метрика задается симметрической матрицей

$$g_{\alpha\beta}^{(p)}\left(x_p^1, \ldots, x_p^n\right), \quad |\xi|^2 = g_{\alpha\beta}^{(p)}\xi_p^\alpha\xi_p^\beta$$

(по повторяющимся индексам α, β подразумевается, как обычно, суммирование) для любого вектора ξ в точке x. Метрика задает симметрическое скалярное произведение двух векторов в одной и той же точке по обычной формуле

$$\langle\xi, \eta\rangle = g_{\alpha\beta}^{(p)}\xi_p^\alpha\eta_p^\beta = \langle\eta, \xi\rangle,$$
$$|\xi|^2 = \langle\xi, \xi\rangle.$$

Это определение не зависит от выбора локальных координат:

$$g_{\alpha\beta}^{(p)}\xi_p^\alpha\eta_p^\beta = g_{\gamma\delta}^{(q)}\xi_q^\gamma\eta_q^\delta,$$

или

$$g_{\gamma\delta}^{(q)} = \frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\gamma}\, g_{\alpha\beta}^{(p)}\, \frac{\partial x_p^\beta}{\partial x_q^\delta}.$$

Определение 9. *Тензор типа* (k, l) на многообразии задается в каждой системе локальных координат (x_β^α) набором функций ${}^{(p)}T^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}(x)$. В других локальных координатах (x_q^β), содержащих точку x, этот же тензор задается величинами ${}^{(q)}T^{s_1\ldots s_k}_{t_1\ldots t_l}(x)$, причем справедлива формула

$$ {}^{(q)}T^{s_1\ldots s_k}_{t_1\ldots t_l} = \frac{\partial x_q^{s_1}}{\partial x_p^{i_1}} \cdots \frac{\partial x_q^{s_k}}{\partial x_p^{i_k}} \frac{\partial x_p^{j_1}}{\partial x_q^{t_1}} \cdots \frac{\partial x_p^{j_l}}{\partial x_q^{t_l}} {}^{(p)}T^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}. $$

Все определения и результаты гл. 3 части I, полученные для тензоров в области n-мерного пространства, переносятся автоматически на тензоры на многообразии.

Метрика $g_{\alpha\beta}$ на многообразии — пример тензора типа $(0,2)$. На ориентированном многообразии метрика порождает элемент объема

$$ T_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \sqrt{|g|}\,\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n}, \qquad g = \det(g_{\alpha\beta}), $$

где $\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ — антисимметричный тензор ранга n, $\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \pm 1$. Это выражение является тензором относительно замен с положительным якобианом и поэтому корректно определено для ориентированного многообразия. Элемент объема удобно записать в виде дифференциальной формы в любых локальных координатах (положительной ориентации)

$$ \Omega = \sqrt{|g|}\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n. $$

Риманова метрика dl^2 на многообразии M задает на нем структуру метрического пространства, где расстояние $\rho(P, Q)$ между точками P, Q определяется формулой

$$ \rho(P, Q) = \min_\gamma \int_\gamma dl $$

(минимум берется по всем кусочно гладким кривым, соединяющим точки P и Q). Топология, определяемая этой структурой метрического пространства, совпадает с евклидовой топологией многообразия M (проверьте!).

В силу результатов части I любые близкие точки на многообразии можно соединить геодезической. Далекие точки уже нельзя, вообще говоря, соединить отрезком геодезической, но можно всегда соединить ломаной геодезической.

3. Вложения и погружения многообразий. Многообразия с краем.

Определение 10. Многообразие M размерности m называется подмногообразием многообразия N размерности $n > m$, если задано взаимно однозначное гладкое отображение $f\colon M \to N$ такое, что индуцированное отображение f_* является вложением касательных пространств в каждой точке. Другими словами, ранг матрицы Якоби этого отображения в локальных координатах равен m. Отображение f называется вложением многообразий.

Если в этом определении отказаться от требования взаимной однозначности отображения f, то мы получаем *погружение* многообразия M в N (допускаются самопересечения).

Мы всегда будем ограничиваться подмногообразиями, заданными системой уравнений в каждой координатной окрестности или карте U_p:

$$\left.\begin{array}{r} f_p^1(x_p^1, \ldots, x_p^n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_p^{n-m}(x_p^1, \ldots, x_p^n) = 0, \end{array}\right\} \text{ранг} \left(\frac{\partial f_p^\alpha}{\partial x_p^\beta}\right) = n - m.$$

При этом на пересечении двух областей U_p, U_q системы $(f_p^\alpha = 0)$ и $(f_q^\alpha = 0)$ должны иметь одинаковое множество нулей. В этом случае в области U_p можно ввести новые локальные координаты $(y_p^1, \ldots, y_p^n)$ такие, что

$$y_p^{m+1} = f_p^1(x_p^1, \ldots, x_p^n), \ \ldots, \ y_p^n = f_p^{n-m}(x_p^1, \ldots, x_p^n).$$

В этих координатах подмногообразие задается уравнениями

$$y_p^{m+1} = 0, \ldots, \quad y_p^n = 0.$$

Функции $y_p^1, \ldots, y_p^m$ являются локальными координатами на N^m.

Определение 11. Замкнутая область A, выделяемая в многообразии M неравенством $f(x) \leqslant 0$ (или $f(x) \geqslant 0$), где $f(x)$ — гладкая функция, называется *многообразием с краем*. Требуется, чтобы край ∂A, задаваемый уравнением $f(x) = 0$, являлся неособым подмногообразием в M, т. е. чтобы градиент функции f не обращался в нуль на крае.

Пусть A и B — многообразия с краем, заданные в виде замкнутых областей в многообразиях M и N соответственно. Отображение $\varphi\colon A \to B$ называется гладким отображением многообразий с краем, если оно определено в открытой области $U \subset M$, целиком содержащей A, как гладкое отображение

$$\tilde{\varphi}\colon U \to N, \quad \tilde{\varphi}|_A = \varphi.$$

Если $A \subset M$ выделяется неравенством $f(x) \leqslant 0$, то область $U = U_\varepsilon$ обычно выбирается в виде $\{f(x) < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$.

В заключение введем одно очень употребительное название: компактное многообразие, не имеющее края, называется *замкнутым*.