§ 2. Простейшие примеры многообразий

1. Поверхности в евклидовом пространстве. Группы преобразований как многообразия. Поверхность размерности k в n-мерном евклидовом пространстве задается набором уравнений

$$f_i(x^1, \ldots, x^n) = 0, \quad i = 1, \ldots, n-k, \tag{1}$$

причем ранг матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)$ равен $n-k$. Если в точке $(x_0^1, \ldots, x_0^k)$, лежащей на этой поверхности, отличен от нуля минор $J_{j_1 \ldots j_{n-k}}$, составленный из столбцов матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)$ с номерами $j_1, \ldots, j_{n-k}$, то локальными координатами $y^1, \ldots, y^k$ в окрестности этой точки будут

$$(y^1, \ldots, y^k) = \left(x^1, \ldots, \hat{x}^{j_1}, \ldots, \hat{x}^{j_{n-k}}, \ldots, x^n\right), \tag{2}$$

где крышка сверху означает, что этот номер пропущен (ср. часть I, § 7, п. 1). Вся поверхность покрыта областями вида $U_{j_1 \ldots j_{n-k}}$ где $U_{j_1 \ldots j_{n-k}}$ — совокупность точек, в которых отличен от нуля минор $J_{j_1 \ldots j_{n-k}}$.

Теорема 1. *Покрытие областями $U_{j_1 \ldots j_{n-k}}$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{n-k}$, с локальными координатами* (2) *задает на поверхности* (1) *структуру гладкого многообразия.*

Доказательство. В области $U_{j_1 \ldots j_{n-k}}$ на поверхности (1) справедливы соотношения

$$x^{j_i} = \varphi^i(y^1, \ldots, y^k), \quad i = 1, \ldots, n-k,$$

где φ^i — гладкие функции. Аналогично в области $U_{s_1 \ldots s_{n-k}}$ с координатами

$$(z^1, \ldots, z^k) = \left(x^1, \ldots, \hat{x}^{s_1}, \ldots, \hat{x}^{s_{n-k}}, \ldots, x^n\right)$$

имеем

$$x^{s_i} = \psi^i(z^1, \ldots, z^k), \quad i = 1, \ldots, n-k,$$

где $\psi^i = \psi^i(z^1, \ldots, z^k)$ — гладкие функции. На пересечении областей $U_{j_1 \ldots j_{n-k}}$ и $U_{s_1 \ldots s_{n-k}}$ возникают гладкие функции перехода $(y) \to (z)$ и $(z) \to (y)$:

$$\begin{array}{ll}
y^1 = z^1 & (= x^1), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
y^{j_1 - 1} = z^{j_1 - 1} & \left(= x^{j_1 - 1}\right), \\
\varphi^1(y^1, \ldots, y^k) = z^{j_1} & \left(= x^{j_1}\right),
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
y^{j_1} = z^{j_1+1} & \left(= x^{j_1+1}\right), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
y^{s_1-2} = z^{s_1-1} & \left(= x^{1_1-s}\right), \\
y^{s_1-1} = \psi^1(z^1, \ldots, z^k) & \left(= x^{s_1}\right), \\
y^{s_1} = z^{s_1} & \left(= x^{s_1+1}\right), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
y^k = z^k & \left(= x^n\right)
\end{array}
\qquad (3)
$$

(эта запись предполагает, что $1 < j_1 < s_1 < j_2 < \ldots$). Эти отображения взаимно обратны. Напомним, что у гладких отображений с гладким обратным якобиан всегда отличен от нуля. Теорема доказана.

Замечание 1. Нетрудно вычислить якобиан функций (3) перехода $(y) \to (z)$: он равен

$$J_{(y)\to(z)} = \pm \frac{J_{s_1 \ldots s_{n-k}}}{J_{j_1 \ldots j_{n-k}}} \neq 0.$$

Замечание 2. Касательное пространство в каждой точке к рассмотренному многообразию отождествляется с линейным подпространством в $\mathbb{R}^n$, задаваемым системой уравнений

$$
\left.
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x^\alpha} \xi^\alpha = 0, \\
\cdots\cdots \\
\dfrac{\partial f_{n-k}}{\partial x^\alpha} \xi^\alpha = 0.
\end{array}
\right\}
\qquad (4)
$$

Векторы $\operatorname{grad} f_i = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x^\alpha}\right)$, $i = 1, \ldots, n-k$, ортогональны к поверхности в каждой точке (относительно стандартной евклидовой метрики в $\mathbb{R}^n$).

Докажем, что на неособой поверхности возникает ориентация. Для этого мы приведем здесь еще одно определение ориентированного многообразия.

Рассмотрим в произвольной точке x n-мерного многообразия M произвольные невырожденные реперы τ из n касательных векторов. Любые два репера τ_1, τ_2 связаны невырожденным линейным преобразованием

$$\tau_1 = A\tau_2.$$

Будем говорить, что класс ориентации реперов τ_1, τ_2 одинаков, если детерминант $\det A$ положителен. Если $\det A < 0$, то будем говорить, что реперы τ_1, τ_2 относятся к классам противоположной ориентации. Тем самым в каждой точке x многообразия M имеются два класса касательных невырожденных n-реперов. Поскольку репер τ можно непрерывно смещать из точки x в близкую точку многообразия, имеет смысл говорить о непрерывной зависимости классов ориентации от точки многообразия. Дадим теперь другое определение ориентации многообразия.

Определение 1. а) Многообразие называется *ориентированным*, если в каждой точке выбран один класс ориентации реперов, непрерывно зависящий от точки.

б) Если такой выбор вообще возможен, то многообразие называется *ориентируемым*. В противном случае многообразие называется *неориентируемым*.

Утверждение. Определение 1.3 эквивалентно определению 1, данному в этом параграфе.

Доказательство. Если многообразие M ориентировано в смысле определения 1.3, то в каждой точке $x \in M$ в качестве ориентирующего репера можно взять репер $(e_{1j}, \ldots, e_{nj})$, состоящий из базисных ортов к координатным осям $(x_j^1, \ldots, x_j^n)$ области U_j, в которой находится точка x. Так как якобианы переходов положительны, то это определение не зависит от выбора окрестности U_j, в которой находится точка x (если она находится в двух областях U_j и U_k). Обратно, если многообразие ориентировано в смысле определения 1, то в каждой точке x задан ориентирующий класс реперов. Рассмотрим достаточно малую ε-окрестность точки x; введем координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ в этой ε-окрестности такие, что репер $(e_1, \ldots, e_n)$, составленный из касательных ортов к осям (x^j), определяет ту же ориентацию, что и ориентирующий репер, во всех точках ε-окрестности. Такое малое $\varepsilon > 0$ можно выбрать, так как ориентирующий класс реперов непрерывно зависит от точки x (хотя ε может зависеть от точки). Проделав эту процедуру для всех точек, получим покрытие многообразия областями, где якобианы перехода все положительны, так как в каждой точке знак касательного репера к выбранным системам координат положителен по отношению к ориентирующему классу реперов. Утверждение доказано.

Теорема 2. *Гладкая неособая поверхность M^k в n-мерном пространстве, заданная системой уравнений* (1), *ориентируема.*

Доказательство. Пусть τ — касательный репер к поверхности M^k. Очевидно, n векторов $\hat{\tau} = (\tau, \operatorname{grad} f_1, \ldots, \operatorname{grad} f_{n-k})$ линейно независимы в каждой точке (векторы $\operatorname{grad} f_i$ ортогональны к поверхности и линейно независимы). Зададим в каждой точке поверхности M^k класс ориентации касательных реперов, требуя, чтобы класс ориентации репера $\hat{\tau}$ и стандартного репера $(e_1, \ldots, e_n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ был одинаков. Этот класс, очевидно, непрерывно зависит от точки. Теорема доказана.

Простейший (отличный от гиперплоскости) пример неособой поверхности в $\mathbb{R}^{n+1}$ — это сфера S^n, задаваемая уравнением

$$x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1.$$

Это — компактное многообразие размерности n. Удобно ввести на сфере локальные координаты, задаваемые стереографической проекцией (см. часть I, § 9). Пусть U_N — вся сфера S^n без северного полюса $N=(0, \ldots, 0, 1)$, U_S — вся сфера S^n без южного полюса $S=(0, \ldots, 0, -1)$. Области U_N и U_S покрывают всю сферу. Локальные координаты $(u_N^1, \ldots, u_N^n)$ в области U_N задаются стереографической проекцией на плоскость $x^{n+1}=0$ из северного полюса; в области U_S нужно взять стереографическую проекцию из южного полюса (рис. 45) — получим координаты $(u_S^1, \ldots, u_S^n)$. Из рисунка видно, что в плоскости $x^{n+1}=0$ векторы $u_N(x)$ и $u_S(x)$ лежат на одном луче, выходящем из начала координат, причем их длины связаны соотношением

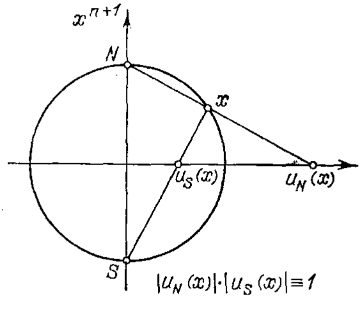

Рис. 45

$$|u_N(x)|\,|u_S(x)| \equiv 1.$$

Поэтому функции перехода от координат $(u_N^1, \ldots, u_N^n)$ к координатам $(u_S^1, \ldots, u_S^n)$ имеют вид

$$(u_S^1, \ldots, u_S^n) = \left(\frac{u_N^n}{\sum\limits_{\alpha=1}^{n} (u_N^\alpha)^2}, \ldots, \frac{u_N^n}{\sum\limits_{\alpha=1}^{n} (u_N^\alpha)^2}\right) \tag{5}$$

(проверьте!). Обратные функции перехода задаются такой же формулой, только N и S нужно поменять местами.

Сфера ограничивает многообразие с краем D^{n+1} ($(n+1)$-мерный диск):

$$f(x) = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 - 1 \leqslant 0.$$

Сфера S^n разделяет все пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ на две непересекающиеся части: $f(x)<0$ и $f(x)>0$.

Определение 2. Связное $(n-1)$-мерное подмногообразие евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ называется *двусторонним*, если на нем существует однозначное непрерывное поле единичных нормалей.

Такое подмногообразие M мы будем называть также *двусторонней гиперповерхностью.*

Теорема 3. *Двусторонняя гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$ ориентируема.*

Доказательство. Пусть ν — единичный вектор нормали к двусторонней гиперповерхности M. Класс ориентации касательных реперов τ к поверхности M можно задать, потребовав, чтобы ориентация репера (τ, ν) и стандартного репера $(e_1, \ldots, e_n)$ была согласована. Теорема доказана.

Замечание. В § 7 будет показано, что всякую замкнутую двустороннюю гиперповерхность в пространстве $\mathbb{R}^n$ можно задать одним неособым уравнением $f(x)=0$. Из этого совсем нетрудно вывести, что такая гиперповерхность всегда ограничивает многообразие с краем. В гл. 3 будет показано также, что любая замкнутая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$ двусторонняя.

Важный пример многообразий, задаваемых системой уравнений в евклидовом пространстве,— это групповые многообразия (группы преобразований, рассмотренные в части I, § 14).

а) Группа $GL(n, \mathbb{R})$ матриц с определителем, отличным от нуля,— это область в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$.

б) Группа $SL(n, \mathbb{R})$ матриц с определителем 1 задается одним уравнением в пространстве всех матриц (гиперповерхность):

$$\det A = 1.$$

в) Группа $O(n, \mathbb{R})$ ортогональных матриц задается системой уравнений

$$AA^{\mathsf{T}} = 1.$$

г) Группа $U(n)$ унитарных матриц задается в пространстве размерности $2n^2$ всех комплексных матриц уравнениями

$$A\bar{A}^{\mathsf{T}} = 1,$$

где черта обозначает комплексное сопряжение.

В части I (§ 14 и др.) было проверено, что эти группы, а также другие группы, встречающиеся там, являются гладкими неособыми поверхностями в $\mathbb{R}^{n^2}$ $\left(\text{или } \mathbb{R}^{2n^2}\right)$ и поэтому являются гладкими многообразиями.

Замечание. Эти многообразия G обладают следующей дополнительной структурой: заданы гладкие отображения φ и ψ,

$$\varphi\colon G \to G, \quad \text{где} \quad \varphi(g) = g^{-1},$$
$$\psi\colon G \times G \to G, \quad \text{где} \quad \psi(g, h) = gh.$$

Определение 3. Многообразие G называется *группой Ли*, если оно является группой, причем отображения φ и ψ, задающие групповую структуру, являются гладкими.

Все рассмотренные в части I примеры групп преобразований — это группы Ли.

2. Проективные пространства. Рассмотрим совокупность всех ненулевых векторов пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ и будем считать, что векторы y и λy, $\lambda \neq 0$, задают одну и ту же точку. Такой класс эквивалентности называется точкой (вещественного) проективного пространства, обозначаемого через $\mathbb{R}P^n$.

Другое описание $\mathbb{R}P^n$: рассмотрим совокупность прямых в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат. По определению каждая такая прямая задается своим направляющим вектором, определенным с точностью до ненулевого множителя и тем самым может рассматриваться как точка из $\mathbb{R}P^n$.

Каждая такая прямая пересекает сферу S^n, задаваемую уравнением $(y^0)^2+\ldots+(y^n)^2=1$, ровно в двух диаметрально противоположных точках. Поэтому каждая точка из $\mathbb{R}P^n$ задается парой диаметрально противоположных точек сферы S^n. Говорят, что проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ получается из сферы S^n склейкой (отождествлением) пар диаметрально противоположных точек. Заметим, что функции на $\mathbb{R}P^n$ — это четные функции на сфере S^n: $f(y)=f(-y)$.

Пример 1. Проективная прямая $\mathbb{R}P^1$ образована парами диаметрально противоположных точек окружности S^1. При этом каждая точка верхней полуокружности (где $y>0$) имеет парную на нижней полуокружности. Поэтому для получения $\mathbb{R}P^1$ нужно взять только нижнюю полуокружность (где $y \leqslant 0$) и склеить ее концевые точки 1 и -1. При этом мы снова получим окружность. Итак, мы построили взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{R}P^1$ и окружностью S^1 (рис. 46).

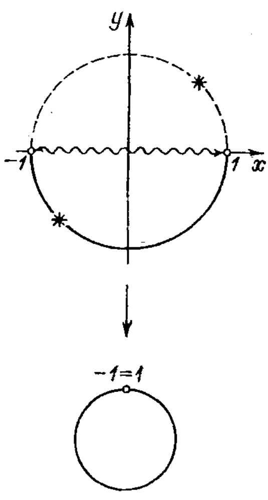

Рис. 46

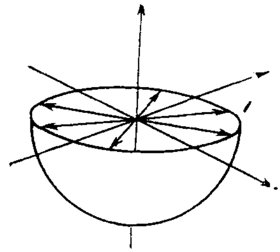
Рис. 47

В n-мерном случае мы аналогичным образом получаем следующую конструкцию для проективного пространства $\mathbb{R}P^n$: нужно взять диск D^n (нижнюю половину сферы S^n) и на его границе S^{n-1} склеить диаметрально противоположные точки (рис. 47 для $n=2$).

Пример 2. В § 14 части I был построен гомоморфизм групп $SU(2)$ на $SO(3)$, при котором матрицы A и $-A$ из группы $SU(2)$ переходят в одну точку многообразия $SO(3)$. Там же было показано, что $SU(2)$ — это трехмерная сфера S^3, причем матрицы A и $-A$ соответствуют диаметрально противоположным точкам сферы. Мы получаем, таким образом, взаимно однозначное соответствие между многообразием $SO(3)$ и трехмерным проективным пространством $\mathbb{R}P^3$.

Введем теперь явными формулами структуру многообразия в проективное пространство $\mathbb{R}P^n$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}P^n$ область $U_q = \{y^q \neq 0\}$. В этой области введем локальные координаты

$$\begin{gathered} x_q^1 = \frac{y^0}{y^q}, \ \ldots, x_q^q = \frac{y^{q-1}}{y^q}, \\ x_q^{q+1} = \frac{y^{q+1}}{y^q}, \ \ldots, x_q^n = \frac{y^n}{y^q}. \end{gathered} \tag{6}$$

Области U_q с $q = 0, 1, \ldots, n$ покрывают все проективное пространство. Вычислим явно функции перехода. В области U_0 имеем координаты $x_0^1, \ldots, x_0^n$, в которых

$$x_0^1 = \frac{y^1}{y^0}, \quad x_0^2 = \frac{y^2}{y^0}, \ \ldots, x_0^n = \frac{y^n}{y^0}.$$

В области U_1 для координат $x_1^1, \ldots, x_1^n$ имеем

$$x_1^1 = \frac{y^0}{y^1}, \quad x_1^2 = \frac{y^2}{y^1}, \ \ldots, x_1^n = \frac{y^n}{y^1}.$$

В общей части областей U_0, U_1, где $y^0 \neq 0$, $y^1 \neq 0$, мы получим функции перехода $(x_0) \to (x_1)$:

$$x_1^1 = \frac{1}{x_0^1}, \quad x_0^2 = \frac{x_0^2}{x_0^1}, \quad x_1^3 = \frac{x_0^3}{x_0^1}, \ \ldots, x_1^n = \frac{x_0^n}{x_0^1} \tag{7}$$

$\left(\text{заметим, что } x_0^1 = \dfrac{y^1}{y^0} \text{ в пересечении } U_0 \cap U_1 \text{ не равно нулю}\right)$

Якобиан этих функций перехода имеет вид

$$J_{(x_0)\to(x_1)} = \det \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{(x_0^1)^2} & 0 & \ldots 0 \\ -\dfrac{x_0}{(x_0^1)^2} & \dfrac{1}{x_0^1} & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot \end{vmatrix} = -\frac{1}{(x_0^1)^{n+1}} \neq 0.$$

Формулы для функций перехода для других пересечений $U_j \cap U_k$ получаются из (7) надлежащей заменой индексов.

Итак, мы проверили, что $\mathbb{R}P^n$ — гладкое многообразие. В случае $n=2$ мы получаем *проективную плоскость* $\mathbb{R}P^2$. Область U_0 в этом случае называется *конечной частью* проективной плоскости.

Заметим, что, как легко проверить, построенные выше взаимно однозначные соответствия $S^1 \to \mathbb{R}P^1$ и $SO(3) \to \mathbb{R}P^3$ являются в действительности диффеоморфизмами.

Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ определяется как множество всех ненулевых векторов в комплексном пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$, рассматриваемых с точностью до умножения на ненулевое комплексное число $\lambda \neq 0$. Локальные координаты на многообразии $\mathbb{C}P^n$ строятся так же, как и в вещественном случае. $\mathbb{C}P^n$ является $2n$-мерным гладким многообразием.

Пример. Рассмотрим комплексную проективную прямую $\mathbb{C}P^1$. Это — множество классов эквивалентности $(z^0, z^1) \sim (\lambda z^0, \lambda z^1)$, $\lambda \neq 0$, $|z^0|^2 + |z^1|^2 \neq 0$. Рассмотрим комплексную функцию $w_0(z^0, z^1) = \frac{z^1}{z^0}$ на $\mathbb{C}P^1$. В точке $(0, 1)$ эта функция не определена, но мы можем считать, что она принимает в ней значение ∞. Таким образом, $\mathbb{C}P^1$ — это «расширенная комплексная плоскость» (включающая бесконечно удаленную точку).

Теорема 4. *Комплексная проективная прямая $\mathbb{C}P^1$ диффеоморфна двумерной сфере S^2.*

Доказательство. Локальные координаты $u_0, v_0, u_0 + iv_0 = w_0 = \frac{z^1}{z^0}$, отображают область $U_0 = \{z^0 \neq 0\}$ проективной прямой на двумерную плоскость. Координаты $u_1, v_1, u_1 + iv_1 = w_1 = \frac{z^0}{z^1}$, действуют в области $U_1 = \{z^1 \neq 0\}$. Области U_0 и U_1 покрывают все $\mathbb{C}P^1$, причем функции перехода $(u_0, v_0) \to (u_1, v_1)$ имеют вид

$$(u_1, v_1) = \left(\frac{u_0}{u_0^2 + v_0^2}, -\frac{v_0}{u_0^2 + v_0^2}\right)$$

или

$$u_1 + iv_1 = w_1 = \frac{1}{w_0} = \frac{u_0 - iv_0}{u_0^2 + v_0^2}.$$

Эти функции перехода совпадают (с точностью до знака) с функциями перехода для введенных выше стереографических координат на сфере S^2. Теорема доказана.

В соответствии с доказанной теоремой расширенная комплексная плоскость, диффеоморфная двумерной сфере, называется сферой Римана. Если $w = u + iv$ — локальные координаты в конечной части расширенной комплексной плоскости, то $1/w$ задает локальные координаты в окрестности «бесконечно удаленной» точки ∞.

Вернемся теперь к комплексному проективному пространству $\mathbb{C}P^n$. В классе эквивалентности вектора $z=(z^0, \ldots, z^n)\neq 0$ можно выбрать представителя, лежащего на единичной сфере S^{2n+1},

$$|z^0|^2+\ldots+|z^n|^2=1.$$

Для этого достаточно вектор z умножить на число $\lambda = \left(\sum_{\alpha=0}^{n}|z^\alpha|\right)^{-1/2}$. После этого вектор z можно еще умножать на числа вида $e^{i\varphi}$, по модулю равные единице.

Вывод. *Комплексное проективное пространство* $\mathbb{C}P^n$ *получается из сферы* $S^{2n+1} = \left\{\sum_{\alpha=1}^{n}|z^\alpha|^2=1\right\}$ *отождествлением точек*: $z \sim e^{i\varphi}z$.

Сопоставляя каждой точке сферы S^{2n+1} ее класс эквивалентности в $\mathbb{C}P^n$, получаем отображение

$$S^{2n+1}\to \mathbb{C}P^n. \tag{8}$$

Прообразом каждой точки из $\mathbb{C}P^n$ при этом отображении является окружность $S^1=\{e^{i\varphi}\}$. В частности, при $n=1$ получаем отображение

$$S^3\to S^2, \quad (z^0, z^1)\mapsto w=\frac{z^1}{z^0}\,(|z^0|^2+|z^1|^2=1).$$

Задачи. 1. Доказать, что нечетномерные проективные пространства $\mathbb{R}P^{2k+1}$ ориентируемы.

2. Доказать, что связная компонента единицы в группе Ли есть нормальный делитель.

3. Доказать, что связная группа Ли порождается сколь угодно малой окрестностью единицы.

4. Доказать, что любая группа Ли ориентируема.

5. Доказать, что проективные пространства $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ компактны.

6. Кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$ определяется как совокупность классов ненулевых векторов в пространстве $\mathbb{H}^{n+1}$ с точностью до умножения слева на ненулевые кватернионы. Введите структуру многообразия на $\mathbb{H}P^n$. Проверьте, что $\mathbb{H}P^1=S^4$.

7. Постройте отображение $S^{4n+3}\to\mathbb{H}P^n$, аналогичное отображению (8). Что является прообразом точки при этом отображении?

§ 3. Необходимые сведения из теории групп Ли

1. Строение окрестности единицы группы Ли. Алгебра Ли группы. Полупростота. В любой группе Ли G имеется выделенная точка $g_0=1\in G$ (единица группы) и касательное пространство