Вернемся теперь к комплексному проективному пространству $\mathbb{C}P^n$. В классе эквивалентности вектора $z=(z^0, \ldots, z^n)\neq 0$ можно выбрать представителя, лежащего на единичной сфере S^{2n+1},

$$|z^0|^2+\ldots+|z^n|^2=1.$$

Для этого достаточно вектор z умножить на число $\lambda=\left(\sum\limits_{\alpha=0}^{n}|z^\alpha|\right)^{-1/2}$. После этого вектор z можно еще умножать на числа вида $e^{i\varphi}$, по модулю равные единице.

Вывод. *Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ получается из сферы $S^{2n+1}=\left\{\sum\limits_{\alpha=1}^{n}|z^\alpha|^2=1\right\}$ отождествлением точек: $z\sim\sim e^{i\varphi}z$.*

Сопоставляя каждой точке сферы S^{2n+1} ее класс эквивалентности в $\mathbb{C}P^n$, получаем отображение

$$S^{2n+1}\to\mathbb{C}P^n. \tag{8}$$

Прообразом каждой точки из $\mathbb{C}P^n$ при этом отображении является окружность $S^1=\{e^{i\varphi}\}$. В частности, при $n=1$ получаем отображение

$$S^3\to S^2,\quad (z^0, z^1)\mapsto w=\frac{z^1}{z^0}\,(|z^0|^2+|z^1|^2=1).$$

Задачи. 1. Доказать, что нечетномерные проективные пространства $\mathbb{R}P^{2k+1}$ ориентируемы.

2. Доказать, что связная компонента единицы в группе Ли есть нормальный делитель.

3. Доказать, что связная группа Ли порождается сколь угодно малой окрестностью единицы.

4. Доказать, что любая группа Ли ориентируема.

5. Доказать, что проективные пространства $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ компактны.

6. Кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$ определяется как совокупность классов ненулевых векторов в пространстве $\mathbb{H}^{n+1}$ с точностью до умножения слева на ненулевые кватернионы. Введите структуру многообразия на $\mathbb{H}P^n$. Проверьте, что $\mathbb{H}P^1=S^4$.

7. Постройте отображение $S^{4n+3}\to\mathbb{H}P^n$, аналогичное отображению (8). Что является прообразом точки при этом отображении?

§ 3. Необходимые сведения из теории групп Ли

1. Строение окрестности единицы группы Ли. Алгебра Ли группы. Полупростота. В любой группе Ли G имеется выделенная точка $g_0=1\in G$ (единица группы) и касательное пространство

$T = T_{(1)}$ в этой точке. Преобразование

$$G \to G, \quad g \to hgh^{-1}$$

называется *внутренним автоморфизмом*, производимым элементом h группы G. Это преобразование сохраняет единицу $g_0 = 1$ $(hg_0h^{-1} = g_0)$ и порождает линейное отображение касательного пространства

$$\mathrm{Ad}(h)\colon\ T \to T;$$

при этом $\mathrm{Ad}(h^{-1}) = [\mathrm{Ad}(h)]^{-1}$ и $\mathrm{Ad}(h_1h_2) = \mathrm{Ad}(h_1)\mathrm{Ad}(h_2)$. Другими словами, сопоставление $h \mapsto \mathrm{Ad}(h)$ есть *линейное представление*

$$\mathrm{Ad}: G \to GL(n, \mathbb{R}),$$

где n — размерность группы G.

Для коммутативной группы G представление Ad тривиально, т. е. $\mathrm{Ad}(h) = 1$ для любого $h \in G$.

Выберем координаты $x^1, \ldots, x^n$ в окрестности единицы $1 = g_0 = (0, \ldots, 0)$. В этих координатах можно записать групповые операции: произведение g_1g_2 элементов $g_1 = (x^1, \ldots, x^n)$, $g_2 = (y^1, \ldots, y^n)$ имеет координаты

$$\psi^\alpha(x, y) = \psi^\alpha(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n), \quad \alpha = 1, \ldots, n,$$

а обратный элемент $g^{-1} = \varphi(x^1, \ldots, x^n)$ элемента $g = (x^1, \ldots, x^n)$ имеет координаты

$$\varphi^\alpha(x) = \varphi^\alpha(x^1, \ldots, x^n), \quad \alpha = 1, \ldots, n.$$

Свойства функций $\psi(x, y)$ и $\varphi(x)$:

1) $\psi(x, 0) = \psi(0, x) = x$ (единица);
2) $\psi(x, \varphi(x)) = 0$ (обратный элемент);
3) $\psi(x, \psi(y, z)) = \psi(\psi(x, y), z)$ (ассоциативность).

Из гладкости функций $\psi(x, y)$ и $\varphi(x)$ и свойства 1) следует, что

$$\psi^\alpha(x, y) = x^\alpha + y^\alpha + b^\alpha_{\beta\gamma}x^\beta y^\gamma + (\text{члены порядка } 3),$$

$$\psi^\alpha(y, x) = y^\alpha + x^\alpha + b^\alpha_{\beta\gamma}y^\beta x^\gamma + (\text{члены порядка } 3).$$

Пусть теперь x и y — касательные векторы к группе в единице, т. е. элементы пространства T; пусть, далее (x^α) и (y^β) — их координаты в нашей системе координат. Определим *коммутатор* $[x, y] \in T$, положив

$$[x, y] = \frac{1}{2}\left(b^\alpha_{\beta\gamma} - b^\alpha_{\gamma\beta}\right)x^\beta y^\gamma. \tag{1}$$

Из этого определения вытекают следующие свойства коммутатора:

а) $[x, y]$ — билинейная операция в $T = \mathbb{R}^n$, где n — размерность группы G;

б) $[x, y] = -[y, x]$;

в) составляя тейлоровские разложения левой и правой частей равенства 3) (свойство ассоциативности) и пренебрегая членами порядка 4, получаем тождество Якоби (проверьте!)

$$[[x, y], z]+[[z, x], y]+[[y, z], x]=0. \qquad (2)$$

Таким образом, касательное пространство к G в единице по отношению к коммутированию является *алгеброй Ли* (см. часть I, § 24). Эту алгебру Ли обыкновенно называют *алгеброй Ли группы* G (ср. тот же параграф части I).

В координатах коммутатор задается набором величин $c^{\alpha}_{\beta\gamma}$ таких, что

$$[x, y]^{\alpha}=c^{\alpha}_{\beta\gamma}x^{\beta}y^{\gamma}. \qquad (3)$$

Величины $c^{\alpha}_{\beta\gamma}$ антисимметричны по индексам β, γ и называются *структурными константами* алгебры Ли.

Однопараметрические подгруппы группы G определяются как (параметризованные) кривые $F(t)\subset G$ такие, что $F(0)=1$ и $F(t_1+t_2)=F(t_1)F(t_2)$, $F(-t)=F(t)^{-1}$. В матричных группах (см. часть I, § 14) они имеют вид

$$F(t)=\exp(At).$$

В абстрактной группе Ли G для кривой $F(t)$ определяется зависящий от t вектор

$$F^{-1}\dot F=F(t)^{-1}\frac{dF(t)}{dt}\in T.$$

Если $F(t)$ — однопараметрическая подгруппа, то этот вектор от t не зависит. Действительно, так как $F(t+\varepsilon)=F(t)F(\varepsilon)$, то

$$\frac{dF}{dt}=\frac{dF(t+\varepsilon)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}=F(t)\frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0},$$

т. е. $\dot F(t)=F(t)\dot F(0)$ и $F^{-1}(t)\dot F(t)=\dot F(0)=\text{const}$. С другой стороны, для всякого ненулевого $A\in T$ существует единственная однопараметрическая подгруппа $F(t)$ с

$$F^{-1}\dot F=A. \qquad (4)$$

В самом деле, решая уравнение (4), в силу теорем существования и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений получаем однопараметрическую группу $F(\varepsilon)$ при малых ε. На все остальные значения t группа $F(t)$ продолжается как многократное произведение элементов из $F(\delta)$ при $|\delta|<\varepsilon$.

Для построенной этим способом однопараметрической подгруппы группы G употребляется, как и в матричном случае, обозначение $F(t)=\exp(At)$.

Задача. Пусть $F_1(t)$ и $F_2(t)$ — две однопараметрические подгруппы: $A_1=\dot F_1(0)$, $A_2=\dot F_2(0)$ или $F_1(t)=\exp(A_1t)$, $F_2(t)=$

$=\exp(A_2t)$. Докажите формулу

$$t^2[A_1, A_2] = F_1(t)\,F_2(t)\,F_1^{-1}(t)\,F_2^{-1}(t) + O(t^3). \tag{5}$$

Пусть $F(t)=\exp(At)$ — однопараметрическая подгруппа группы G. Преобразование $g \mapsto FgF^{-1}$ порождает однопараметрическую группу преобразований алгебры Ли $T_{(1)} = \mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{Ad} F(t): \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n.$$

Вектор $\frac{d}{dt}\operatorname{Ad} F(t)|_{t=0}$ лежит в алгебре Ли группы $GL(n, \mathbb{R})$, т. е. является линейным оператором.

Задача. Докажите, что $\frac{d}{dt}\operatorname{Ad} F(t)|_{t=0}$ имеет вид $B \mapsto [A, B]$, где $B \in \mathbb{R}^n$ — вектор из алгебры Ли. Преобразование $B \mapsto [A, B]$ обозначается через $\operatorname{ad} A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — базис алгебры Ли $\mathbb{R}^n = T_{(1)}$ как касательного пространства к G в точке $g_0 = 1 \in G$. Однопараметрические группы $\exp A\tau = F(\tau)$ определены для любого вектора $A = \sum A_i x^i$. Положим

$$\exp A = F(\tau)|_{\tau=1} \tag{6}$$

и припишем точке $\exp A$ координаты $x^1, \ldots, x^n$; в результате получим систему координат в окрестности точки $1 \in G$, в которой сумма $\sum (x^i)^2$ достаточно мала. Это — «координаты 1-го рода».

Другие координаты: пусть $F_i = \exp(A_i t)$. Любая точка достаточно малой окрестности U точки $1 \in G$ имеет вид

$$g = F_1(t_1) \ldots F_n(t_n), \tag{7}$$

где $t_1, \ldots, t_n$ малы. Мы принимаем за координаты точки g числа $t_1 = x_1, \ldots, t_n = x_n$; это — «координаты 2-го рода».

Задачи. 1) Рассмотрим кривую $g(\tau)=F_1(\tau t_1)\ldots F_n(\tau t_n)$; докажите, что $\left.\frac{dg}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \sum_{i=1}^{n} t_i A_i$. 2) Какие координаты для $G = SO(3)$ представляют собой «углы Эйлера» φ, ψ, θ?

Координаты 1-го рода удобны для доказательства следующей теоремы.

Теорема 1. *Если функции ψ^α, задающие умножение в группе Ли G, вещественно аналитичны (т. е. разлагаются в сходящиеся степенные ряды), то алгебра Ли однозначна определяет умножение в группе G для некоторой окрестности единицы $1 \in G$.*

Замечание. Ограничение на аналитичность ψ (или, как говорят, на аналитичность группы) несущественно, но доказательство без гипотезы аналитичности ψ сложнее.

Доказательство. Введем вспомогательные функции $v^\alpha_\beta(x)$, положив

$$v^\alpha_\beta(x) = \left.\frac{\partial \psi^\alpha(x, y)}{\partial x^\beta}\right|_{y=\varphi(x)}, \quad v^\alpha_\beta(0) = \delta^\alpha_\beta,$$

где $\varphi(x)=x^{-1}$ — обратный элемент. Тогда для функций $\psi^\alpha(x, y)$ получаем систему дифференциальных уравнений по x

$$v^\alpha_\beta(\psi(x, y))\frac{\partial\psi^\beta(x, y)}{\partial x^\gamma}=v^\alpha_\gamma(x) \tag{8}$$

с начальным условием

$$\psi(0, y)=y.$$

Условия интегрируемости этой системы (см. ниже § 29) имеют вид $\dfrac{\partial^2\psi^\beta}{\partial x^\gamma\partial x^\delta}=\dfrac{\partial^2\psi^\beta}{\partial x^\delta\partial x^\gamma}$, т. е.

$$\frac{\partial v^\alpha_\beta}{\partial x^\gamma}-\frac{\partial v^\alpha_\gamma}{\partial x^\beta}=2\,c^\alpha_{\mu\nu}v^\mu_\beta v^\nu_\gamma, \tag{9}$$

где $c^\alpha_{\mu\nu}$ — структурные константы алгебры Ли. Отметим, что уравнение однопараметрической подгруппы $x=x(t)$ с начальным вектором скорости $A=(A^i)$ имеет вид

$$A^\alpha=v^\alpha_\beta(x(t))\frac{dx^\beta(t)}{dt}$$

(проверьте!). В канонических координатах 1-го рода, где по определению $x^\alpha(t)=A^\alpha t$, будет

$$A^\alpha=v^\alpha_\beta(At)\,A^\beta,$$

или

$$x^\alpha=v^\alpha_\beta(x)\,x^\beta.$$

Покажем, что функции $v^\alpha_\beta(x)$ в канонических координатах определяются уже однозначно. Дифференцируя последнее равенство по x^β, получим

$$\delta^\alpha_\beta=x^\gamma\frac{\partial v^\alpha_\gamma}{\partial x^\beta}+v^\alpha_\beta.$$

Умножим теперь равенство (9) на x^β и просуммируем по β. Получим

$$x^\beta\frac{\partial v^\alpha_\gamma}{\partial x^\beta}+v^\alpha_\gamma(x)=\delta^\alpha_\gamma+c^\alpha_{\mu\nu}x^\gamma v^\mu_\gamma.$$

Заменим в этом равенстве x на At. Будем иметь

$$tA^\beta\frac{\partial v^\alpha_\gamma}{\partial x^\beta}+v^\alpha_\gamma(At)=\delta^\alpha_\gamma+c^\alpha_{\mu\nu}A^\nu t v^\mu_\gamma. \tag{10}$$

Введем функцию $w^\alpha_\gamma(t)=tv^\alpha_\gamma(At)\equiv w^\alpha_\gamma(t, A)$. Равенство (10) означает, что

$$\frac{dw^\alpha_\gamma}{dt}=\delta^\alpha_\gamma+c^\alpha_{\mu\nu}A^\nu w^\mu_\gamma.$$

Для функций w_γ^α мы получили систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Начальные условия имеют вид $w_\gamma^\alpha(0)=0$. Тем самым функции $w_\gamma^\alpha(t, A)$ для любого A однозначно определяются по структуре алгебры Ли. Отсюда однозначно определены и функции $v_\gamma^\alpha(x)$, а поэтому и закон умножения $\psi(x, y)$ как решение системы (8). Теорема доказана.

Следствие. *Если алгебра Ли связной аналитической группы G «коммутативна», т. е. $[A, B]\equiv 0$, то группа G коммутативна (в обычном смысле).*

Действительно, для окрестности единицы в группе это следует из теоремы 1. Чтобы охватить всю группу, достаточно заметить, что любой элемент может быть представлен как произведение большого числа элементов, близких к единице.

Определение 1. Алгебра Ли $L=\{\mathbb{R}^n, c_{jk}^i\}$ называется *простой*, если в ней нет идеалов, т. е. таких подпространств I, что $[I, L]\subset I$. Если алгебра Ли группы G проста, то G называется *простой группой Ли*. Алгебра Ли L называется *полупростой*, если $L=I_1+\ldots+I_n$, где I_j — простые алгебры Ли, попарно коммутирующие ($[I_k, I_l]=0$ при $k\neq l$) и сами некоммутативные. Группа G с полупростой алгеброй Ли называется *полупростой группой*. Для любой алгебры Ли определяется «форма Киллинга»

$$\langle A, B\rangle = -\mathrm{Sp}(\mathrm{ad}\,A\,\mathrm{ad}\,B), \tag{11}$$

где оператор $\mathrm{ad}\,A$ на L имеет вид

$$u\mapsto[A, u],\quad u\in L. \tag{12}$$

Теорема 2. 1) *Для простой алгебры Ли L группы G внутренние автоморфизмы $\mathrm{Ad}\,g$ дают неприводимое линейное представление группы G (т. е. не имеющее нетривиальных инвариантных подпространств в L).* 2) *Если форма Киллинга положительна, то алгебра Ли полупроста.*

Доказательство 1). Если представление $\mathrm{Ad}\,g$ имеет инвариантное подпространство $I\subset L$, т. е. если $gIg^{-1}\subset I$ для любого $g\in G$, то, устремляя g к 1, получим

$$[L, I]\subset I.$$

Поэтому I — идеал в L. Утверждение 1) доказано.

Доказательство 2). Пусть I — идеал алгебры L. Очевидно, ортогональное дополнение J к I по отношению к форме Киллинга также является идеалом, а если при этом форма положительно определена, то $L=I\oplus J$. Таким образом, алгебра Ли с положительной формой Киллинга разлагается в сумму простых, и эти простые слагаемые некоммутативны (сужение формы Киллинга на коммутативное слагаемое равно нулю).

Замечание. В теории алгебр Ли доказывается более сильное утверждение: *алгебра Ли полупроста в том и только том случае, если ее форма Киллинга невырождена.* Доказательство этой теоремы в дополнение к вышеприведенным аргументам использует то, что форма Киллинга некоммутативной простой алгебры Ли не может быть тождественным нулем. Это, в свою очередь, выводится из теоремы Энгеля, утверждающей, что форма Киллинга алгебры Ли равна нулю в том и только в том случае, если алгебра *нильпотентна*, т. е. если существует такое n, что

$$[[\ldots[A_1, A_2], \ldots], A_n] = 0$$

при любых $A_1, \ldots, A_n \in L$.

Задачи. 1. а) Докажите, что движения (изометрии) связного риманова многообразия M образуют группу Ли. б) Докажите аналогичное утверждение для группы всех конформных преобразований риманова многообразия (см. § 15 части I).

2. Выясните, какие из встречавшихся в части I (см. § 24) алгебр Ли являются полупростыми, а какие простыми?

2. Понятие (линейного) представления. Пример нематричной группы Ли. Определение 2. *Представлением* группы G называется гомоморфизм в некоторую группу матриц $\rho\colon G \to GL(n, \mathbb{R})$ или $\rho\colon G \to GL(n, \mathbb{C})$. Отображение $\chi_\rho\colon G \to \mathbb{R}$ $(G \to \mathbb{C})$, определяемое формулой $\chi_\rho(g) = \operatorname{Sp} \rho(g)$, $g \in G$, называется *характером* представления ρ.

Представление называется *неприводимым*, если в пространстве $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) нет нетривиальных подпространств, инвариантных относительно всех матриц вида $\rho(g)$, $g \in G$. Имеет место простая, но важная

Теорема 3 («лемма Шура»). *Пусть заданы два неприводимых представления $\rho_i\colon G \to GL(n_i, \mathbb{R})$ группы G, $i = 1, 2$. Если $A\colon \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$ — линейный оператор, переводящий ρ_1 в ρ_2 (т. е. такой, что $A\rho_1(g) = \rho_2(g)A$), то A — или нулевой оператор, или изоморфизм.*

Доказательство. Если A не есть нулевой оператор, то $Ax \neq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, иначе «ядро» $\{Ax = 0\}$ оператора A было бы нетривиальным инвариантным подпространством для представления ρ_1. Аналогично образ $A(\mathbb{R}^{n_1}) \subset \mathbb{R}^{n_2}$ инвариантен для представления ρ_2 и поэтому должен быть нулевым или совпадать с $\mathbb{R}^{n_2}$. Теорема доказана.

Замечание. Пусть задано представление $\rho\colon G \to GL(N, \mathbb{R})$ группы G. Дифференциал ρ_* этого отображения в единице группы отображает алгебру Ли $\mathfrak{g} = T_{(1)}$ в пространство матриц:

$$\rho_*\colon \mathfrak{g} \to M(N, \mathbb{R}).$$

Отображение ρ_* задает *представление алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ (гомоморфизм алгебр Ли), т. е. выполнено равенство

$$\rho_* [\zeta, \eta] = [\rho_* \zeta, \rho_* \eta]$$

для любых векторов ζ, η из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (проверьте!).

Представление ρ: $G \to GL(N, \mathbb{R})$ (или ρ: $G \to GL(N, \mathbb{C})$) называется *точным*, если оно не имеет ядра, т. е. если $\rho(g) \neq 1$ при $g \neq 1$. Любая матричная группа Ли обладает очевидным точным представлением, поскольку она уже реализована как группа линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^N$ (или $\mathbb{C}^N$). Однако не всякая группа Ли реализуется как группа линейных преобразований евклидова пространства. Рассмотрим, например, группу $G = \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ преобразований прямой вида

$$x \mapsto x + 2\pi a + \frac{1}{i} \ln \frac{1 - ze^{-ix}}{1 - \bar{z}e^{ix}}, \tag{13}$$

где $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ и $\ln$ обозначает непрерывную ветвь натурального логарифма, определяемую условием: при $z=0$ этот логарифм равен нулю. (Под знаком логарифма стоит дробь, числитель и знаменатель которой комплексно сопряжены друг другу; поэтому эта дробь по модулю равна единице, логарифм является чисто мнимым числом, и вся правая часть вещественна.) Группа $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ является связной трехмерной группой Ли. Она содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}$, состоящую из преобразований (13) с $a \in \mathbb{Z}$, $z = 0$; элементы этой подгруппы коммутируют со всеми остальными элементами группы, или, как говорят, подгруппа содержится в *центре* группы (ниже мы увидим, что она совпадает с центром группы). Преобразования (13) с $z = 0$ и произвольным вещественным a составляют однопараметрическую подгруппу группы $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$.

Всякое преобразование вида (13) обладает тем свойством, что если $x \mapsto y$, то $x + 2\pi k \mapsto y + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$; поэтому оно определяет преобразование окружности $|w| = 1$, именно, преобразование

$$w \mapsto \frac{w - z}{1 - \bar{z}w} e^{2\pi i a}.$$

Таким образом, получаем проекцию (гомоморфизм) группы $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ в группу $SL(2, \mathbb{R})/\pm 1 = SU(1, 1)/\pm 1$ дробно-линейных преобразований единичной окружности в $\mathbb{C}$. Очевидно, образом этой проекции служит вся группа $SL(2, \mathbb{R})/\pm 1$, а ее ядром как раз является выделенная выше группа $\mathbb{Z}$. Поскольку группа $SL(2, \mathbb{R})/\pm 1$ не имеет центра, из этого следует, что центр группы $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ исчерпывается нашей группой $\mathbb{Z}$.

Теорема 4. *Группа $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ не имеет ни одного точного линейного представления.*

Доказательство. Напомним, что группа $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ обладает однопараметрической подгруппой, которая имеет с ее центром бесконечное пересечение (изоморфное $\mathbb{Z}$), но не содержится в этом центре. Мы покажем, что уже это свойство группы $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ несовместимо с ее вложимостью в группу матриц.

Предположим, что группа $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ изоморфна $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. Пусть H — однопараметрическая подгруппа группы G, соответствующая подгруппе, о которой шла речь выше; согласно § 14 части I $H = \{\exp(tA) \mid t \in \mathbb{R}\}$, где A — некоторая $n \times n$-матрица. Производя, если нужно, внутренний автоморфизм группы $GL(n, \mathbb{C})$, мы добиваемся того, чтобы матрица A имела нормальную жорданову форму, т. е. чтобы была блочно диагональной с блоками вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_k \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix},$$

где $a_i = 0$ или 1 (считаем, что разные блоки отвечают разным λ; порядки блоков равны кратностям собственных значений матрицы A). Матрица $\exp(tA)$ является блочно диагональной с блоками того же порядка, и ее блоки имеют вид $e^{\lambda t} B_\lambda(t)$, где

$$B_\lambda(t) = \begin{Vmatrix} 1 & a_1 t & \frac{1}{2} a_1 a_2 t^2 & \frac{1}{6} a_1 a_2 a_3 t^3 & \dots & \frac{1}{k!} a_1 \dots a_k t^k \\ 0 & 1 & a_2 t & \frac{1}{2} a_2 a_3 t^2 & \dots & \frac{1}{(k-1)!} a_2 \dots a_k t^{k-1} \\ 0 & 0 & 1 & a_3 t & \dots & \frac{1}{(k-2)!} a_3 \dots a_k t^{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Из того, что бесконечное число матриц такого вида перестановочно с элементами группы G, следует, что и все элементы группы G являются блочно диагональными матрицами с блоками того же порядка.

Множество P всех (в том числе вырожденных) матриц, перестановочных со всеми матрицами из G, является линейным подпространством пространства $\mathbb{C}^{n^2}$ всех $n \times n$-матриц; пересечение $P \cap G$ есть центр группы G. Матрицы из P опять-таки являются блочно диагональными с блоками прежнего порядка, и условие принадлежности такой матрицы пространству P записывается как система линейных однородных уравнений относительно матричных элементов, причем каждое уравнение из этой системы относится к определенному блоку. Таким образом, условие принадлежности центру матрицы $\exp(tA)$ записывается в виде системы линейных уравнений относительно элементов матриц $B_\lambda(t)$, т. е. в виде системы алгебраических уравнений относительно t. Такие уравнения либо выполняются тождественно по t, либо имеют конечное число решений. Это противоречит тому, что группа $H=\{\exp(tA)\}$ не содержится в центре, но имеет с ним бесконечное пересечение. Теорема доказана.

Задачи. 1. Вычислить алгебру Ли группы $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$.

2. Проверить, что построенное выше отображение $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \to SL(2, \mathbb{R})/\pm 1$ является изоморфизмом в некоторой окрестности единицы.

§ 4. Комплексные многообразия

1. Определения и примеры. Введем понятие комплексного многообразия.

Определение 1. *Комплексно аналитическим многообразием комплексной размерности n* называется многообразие M размерности $2n$, на котором выбраны специальные области U_q локальных координат, $M=\bigcup\limits_q U_q$, заданные в виде областей n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. В каждой области U_q тем самым заданы комплексные локальные координаты $z_q^\alpha = x_q^\alpha + iy_q^\alpha$, $\alpha=1, \ldots, n$. В пересечении двух областей $U_q \cap U_p$ действуют две системы локальных координат (z_q^α) и (z_p^β). Требуется, чтобы функции перехода от координат (z_q^α) к координатам (z_p^β) и обратно были комплексно аналитическими:

$$\frac{\partial z_q^\alpha}{\partial \bar{z}_p^\beta} \equiv 0, \quad \frac{\partial z_p^\beta}{\partial \bar{z}_q^\alpha} \equiv 0. \tag{1}$$

Голоморфными отображениями комплексных многообразий будем называть комплексно аналитические (в любых локальных координатах) отображения. Голоморфные отображения в комплексную прямую $\mathbb{C}$ называются аналитическими (или голоморфными) функциями на многообразии.

Отображение называется *биголоморфным*, если оно изоморфно и имеет обратное, которое также является голоморфным. Комплексные многообразия, которые можно связать биголоморфным отображением, называются *биголоморфно эквивалентными* или *комплексно диффеоморфными*.

Важным геометрическим свойством комплексных многообразий является их ориентированность:

Теорема 1. *Комплексно аналитическое многообразие M является ориентированным многообразием.*

Доказательство. Пусть $z_q^\alpha = x_q^\alpha + iy_q^\alpha$ — комплексные координаты многообразия M в области U_q, $z_p^\beta = x_p^\beta + iy_p^\beta$ — в области U_p.