стемы линейных уравнений относительно элементов матриц $B_\lambda(t)$, т. е. в виде системы алгебраических уравнений относительно t. Такие уравнения либо выполняются тождественно по t, либо имеют конечное число решений. Это противоречит тому, что группа $H=\{\exp(tA)\}$ не содержится в центре, но имеет с ним бесконечное пересечение. Теорема доказана.

Задачи. 1. Вычислить алгебру Ли группы $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$.

2. Проверить, что построенное выше отображение $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})\to SL(2,\mathbb{R})/\pm 1$ является изоморфизмом в некоторой окрестности единицы.

§ 4. Комплексные многообразия

1. Определения и примеры. Введем понятие комплексного многообразия.

Определение 1. *Комплексно аналитическим многообразием комплексной размерности n* называется многообразие M размерности $2n$, на котором выбраны специальные области U_q локальных координат, $M=\bigcup_q U_q$, заданные в виде областей n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. В каждой области U_q тем самым заданы комплексные локальные координаты $z_q^\alpha=x_q^\alpha+iy_q^\alpha$, $\alpha=1,\ldots,n$. В пересечении двух областей $U_q\cap U_p$ действуют две системы локальных координат (z_q^α) и (z_p^β). Требуется, чтобы функции перехода от координат (z_q^α) к координатам (z_p^β) и обратно были комплексно аналитическими:

$$\frac{\partial z_q^\alpha}{\partial \bar z_p^\beta}\equiv 0,\quad \frac{\partial z_p^\beta}{\partial \bar z_q^\alpha}\equiv 0. \tag{1}$$

Голоморфными отображениями комплексных многообразий будем называть комплексно аналитические (в любых локальных координатах) отображения. Голоморфные отображения в комплексную прямую $\mathbb{C}$ называются аналитическими (или голоморфными) функциями на многообразии.

Отображение называется *биголоморфным*, если оно изоморфно и имеет обратное, которое также является голоморфным. Комплексные многообразия, которые можно связать биголоморфным отображением, называются *биголоморфно эквивалентными* или *комплексно диффеоморфными*.

Важным геометрическим свойством комплексных многообразий является их ориентированность:

Теорема 1. *Комплексно аналитическое многообразие M является ориентированным многообразием.*

Доказательство. Пусть $z_q^\alpha=x_q^\alpha+iy_q^\alpha$ — комплексные координаты многообразия M в области U_q, $z_p^\beta=x_p^\beta+iy_p^\beta$ — в области U_p.

Вещественные якобианы функций перехода от координат (x_q^α, y_q^α) к координатам (x_p^β, y_p^β) имеют вид

$$J^{\mathbb{R}} = |J^{\mathbb{C}}|^2 = \left|\det\left(\frac{\partial z_q^\alpha}{\partial z_p^\beta}\right)\right|^2$$

(часть I, лемма 12.2). Все эти якобианы положительны. Теорема доказана.

Рассмотренное в § 2 комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ — пример комплексно аналитического многообразия. Локальные координаты на этом многообразии строятся как и в вещественном случае, причем функции перехода, задаваемые формулами (2.20), комплексно аналитичны. Все эти многообразия компактны (см. задачу 2.5).

При $n=1$ получаем расширенную комплексную плоскость («сферу Римана»). При этом локальной координатой в окрестности бесконечно удаленной точки ∞ является $w = 1/z$.

Простейший пример комплексных многообразий — области в $\mathbb{C}^n$. Другой важный пример — неособые комплексные поверхности в $\mathbb{C}^n$. Они задаются системой уравнений

$$\left.\begin{array}{c} f_1(z^1, \ldots, z^n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{n-k}(z^1, \ldots, z^n) = 0, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

где все функции $f_1, \ldots, f_{n-k}$ комплексно аналитичны и ранг матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial z^j}\right)$ максимален (равен $n-k$). Проверка того, что неособая комплексная поверхность является комплексно аналитическим многообразием, проводится здесь точно так же, как в вещественном случае, с использованием § 12 части I.

В отличие от вещественного случая комплексные подмногообразия пространства $\mathbb{C}^n$ не охватывают всех примеров комплексно аналитических многообразий. Чтобы убедиться в этом, докажем важную теорему.

Теорема 2. *Голоморфная функция на связном компактном комплексном многообразии постоянна.*

Доказательство. Пусть f — голоморфная функция на комплексно аналитическом связном компактном многообразии M. Тогда функция $|f|$ на компактном многообразии M достигает максимума в некоторой точке P_0:

$$|f(P)| \leqslant |f(P_0)|.$$

Поэтому функция $f(P)$ постоянна на всем многообразии M в силу связности этого многообразия и в силу следующего общего утверждения.

Лемма 1 (принцип максимума). *Пусть f — голоморфная функция в некоторой области U n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Если функция $|f|$ имеет локальный максимум в точке P_0 области U, т. е. $|f(P)| \leqslant |f(P_0)|$ для всех P из области U, достаточно близких к P_0, то функция f постоянна в окрестности точки P_0.*

Доказательство. Функция $|f|$ в силу условия леммы будет иметь локальный максимум и на любой комплексной прямой, проходящей через точку P_0. Поэтому достаточно доказать принцип максимума для $n = 1$. В этом случае можно считать, что $P_0 = 0$, $f(0) \neq 0$ (при $f(0) = 0$ утверждение леммы тривиально). Умножая функцию на подходящее число, можно считать, что $f(0)$ есть вещественное положительное число.

Для голоморфных функций комплексной переменной верна интегральная формула Коши (часть I, § 26)

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z},$$

где γ — окружность, охватывающая начало координат. Полагая $z = re^{i\varphi}$, $r = \mathrm{const}$, получим

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\left(re^{i\varphi}\right) d\varphi. \tag{3}$$

Соотношение (3) справедливо также для действительной и мнимой частей голоморфной функции.

Пусть $m(r) = \max\limits_{\varphi} \left| f\left(re^{i\varphi}\right)\right|$. В силу условия леммы $f(0) \geqslant m(r)$. Но из формулы (3) вытекает, что $f(0) \leqslant m(r)$. Значит, $f(0) = m(r)$. Функция $g(z) = \mathrm{Re}(f(0) - f(z))$ неотрицательна на любой окружности $z = re^{i\varphi}$, где r достаточно мало. Действительно, $f(0) - |f(z)| \geqslant 0$, и $|\mathrm{Re}\, f(z)| \leqslant |f(z)|$.

Интеграл этой функции по окружности $z = re^{i\varphi}$ равен нулю в силу равенства (3). Поэтому на любой окружности $z = re^{i\varphi}$, где r достаточно мало, $\mathrm{Re}(f(0) - f(z)) = 0$, т. е. $\mathrm{Re}\, f(z) = f(0)$. В силу неравенства $|f(z)| \leqslant f(0)$ отсюда вытекает, что $f(z) = f(0)$ для всех z, близких к нулю. Лемма доказана.

Пусть теперь $\max\limits_{P \in M} |f(P)| = |f(P_0)|$ — максимум модуля голоморфной функции f на компактном комплексно аналитическом многообразии M. Пусть, далее, $M' \subset M$ — совокупность всех точек P многообразия, где $f(P) = f(P_0)$. Множество M' открыто в M в силу принципа максимума (каждая точка $P \in M'$ входит в M' вместе с некоторой своей окрестностью). Кроме того, M', очевидно, замкнуто и непусто. Поэтому $M' = M$ (M связно). Доказательство теоремы полностью завершено.

Следствие 1. *Комплексно аналитическое подмногообразие в $\mathbb{C}^n$ размерности больше нуля некомпактно.*

Доказательство. Допустим, что существует голоморфное вложение f компактного комплексного многообразия M в $\mathbb{C}^n$:

$$f\colon M \to \mathbb{C}^n.$$

Можно считать, что M связно. Тогда все координаты f^i этого отображения, будучи аналитическими функциями на M, постоянны, т. е. f отображает многообразие M в одну точку. Следствие доказано.

Важные примеры неособых комплексных поверхностей в $\mathbb{C}^n$ — это комплексные группы преобразований:

а) $GL(n, \mathbb{C})$ — совокупность невырожденных комплексных матриц n-го порядка, $\det A \neq 0$. Это — открытая область в пространстве $\mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2}$ всех комплексных матриц.

б) $SL(n, \mathbb{C})$ — совокупность всех унимодулярных комплексных матриц n-го порядка, $\det A = 1$.

в) $O(n, \mathbb{C})$ — совокупность всех комплексных ортогональных преобразований, т. е. комплексных матриц A с $AA^{\mathrm{T}} = 1$.

Неособость этих поверхностей была проверена в § 14 части I. Все эти группы некомпактны согласно следствию 1.

Эти многообразия G являются группами Ли в смысле определения 2.3. Более того, отображения ψ и φ, определяющие групповую структуру:

$$\psi\colon G \times G \to G, \text{ где } \psi(g, h) = gh,$$
$$\varphi\colon G \to G, \text{ где } \varphi(g) = g^{-1},$$

комплексно аналитичны (голоморфны).

Определение 2. Группа Ли G называется *комплексной группой Ли*, если отображения φ и ψ, задающие групповую структуру, комплексно аналитичны.

Теорема 3. *Всякая компактная комплексная связная группа Ли G коммутативна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Рассмотрим представление Ad группы G на $\mathfrak{g}$. Это представление — комплексно аналитическое отображение группы в комплексное пространство $n \times n$-матриц: $G \to GL(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n^2}$. Если группа G компактна, то в силу доказанного выше это отображение является постоянным. Таким образом, $\mathrm{Ad}\, G = 1$ — единичная матрица. Устремляя g к 1 в равенстве $\mathrm{Ad}\, g = 1$, получаем, что алгебра $\mathfrak{g}$ коммутативна, т. е. $[A, B] = 0$. Поэтому в силу следствия из теоремы 3.1 группа G коммутативна. Теорема доказана.

Группы $G = GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $O(n, \mathbb{C})$ — это матричные комплексные группы Ли.

Единственным примером компактной комплексной группы Ли является комплексный тор. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ задано $2n$ линейно независимых (над $\mathbb{R}$) векторов $e_1, \ldots, e_{2n}$. Комплексный тор T^{2n} мы получим, беря векторы из $\mathbb{C}^n$ с точностью до целочисленной линейной комбинации векторов $e_1, \ldots, e_{2n}$:

$$z \sim z + \sum_{\alpha=1}^{2n} n_\alpha e_\alpha, \quad n_\alpha \text{ целые.}$$

Такие целочисленные линейные комбинации образуют подгруппу Γ в $\mathbb{C}^n$ (целочисленная решетка, натянутая на векторы $e_1, \ldots, e_{2n}$). Тор T^{2n} есть факторгруппа:

$$T^{2n} = \mathbb{C}^n/\Gamma.$$

Решетки Γ и Γ', задаваемые векторами $(e_1, \ldots, e_{2n})$ и $(f_1, \ldots, f_{2n})$, совпадают, если векторы f_i лежат в решетке Γ, а векторы e_j — в решетке Γ':

$$f_i = n_i^j e_j, \quad e_j = m_j^i f_i.$$

Матрицы (n_i^j) и (m_j^i) целочисленны и взаимно обратны. Поэтому $\det(n_i^j) = \det(m_j^i) = \pm 1$. Обратно, любые две системы векторов (e_j) и (f_i), связанные целочисленными линейными преобразованиями, дают одинаковые торы.

Структуру многообразия на торе T^{2n} мы получим, беря в качестве координатных окрестностей образы достаточно малых открытых множеств в $\mathbb{C}^n$ при естественном отображении

$$\mathbb{C}^n \to T^{2n} = \mathbb{C}^n/\Gamma.$$

Проверьте, что тор T^{2n} превращается в компактное комплексно аналитическое многообразие, являющееся комплексной группой Ли.

Функции на торе T^{2n} можно рассматривать как $2n$-периодические функции на $\mathbb{C}^n$:

$$f\left(z + \sum_{\alpha=1}^{2n} n_\alpha e_\alpha\right) = f(z).$$

Из теоремы 2 получаем

Следствие. *Голоморфная $2n$-периодическая функция в $\mathbb{C}^n$ постоянна.*

Пример. Пусть $n = 1$. Комплексный тор T^2 задается парой ненулевых комплексных чисел $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \notin \mathbb{R}z_2$. Умножая все комплексные числа на z_1^{-1}, получим пару вида $(1, \tau)$, $\tau = z_2/z_1 \in \mathbb{C}$, причем мнимая часть $\operatorname{Im}\tau$ числа τ не равна нулю (векторы 1 и τ вещественно независимы). Торы, задаваемые векторами (z_1, z_2) и $(1, \tau)$, биголоморфно эквивалентны. Таким образом, каждый комплексный одномерный тор T^2 задается комплексным числом τ с не равной нулю мнимой частью.

Лемма 2. *Если τ и τ' связны дробно-линейным преобразованием вида*

$$\tau' = \frac{m\tau + n}{p\tau + q},$$

где матрица $\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ *целочисленна и имеет определитель* ± 1, *то торы, задаваемые числами τ и τ', совпадают.*

Доказательство. Решетки в $\mathbb{C}$, определяемые векторами $(1, \tau)$ и $(p\tau + q\cdot 1,\ m\tau + n\cdot 1)$, совпадают. Тор, определяемый второй решеткой, как раз задается числом τ'. Лемма доказана.

Замечание. Можно показать (это требует привлечения аппарата эллиптических функций), что торы, определяемые достаточно близкими комплексными числами τ и τ', биголоморфно не эквивалентны.

С вещественной точки зрения тор T^2 диффеоморфен двумерному вещественному тору $S^1 \times S^1$, где каждая из окружностей получается отождествлением целых кратных z_1 (или z_2) на прямой, проходящей через z_1 (или через z_2); $2n$-мерный тор T^{2n} диффеоморфен $2n$-мерному вещественному тору $S^1 \times \ldots \times S^1$.

Пусть тор T^{2n} задается векторами $e_1, \ldots, e_{2n}$. Среди этих векторов имеются n линейно независимых над $\mathbb{C}$; без ограничения общности можно считать, что это $e_1, \ldots, e_n$. Разложим векторы $e_{n+1}, \ldots, e_{2n}$ по этому базису:

$$e_{n+k} = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} e_j, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Комплексная матрица $B = (b_{kj})$ полностью определяет тор T^{2n}. Мнимая часть матрицы B должна быть невырожденной, иначе векторы $e_1, \ldots, e_{2n}$ были бы линейно зависимы над $\mathbb{R}$.

Определение 3. Тор T^{2n} называется *абелевым*, если для некоторого базиса $(e_1, \ldots, e_{2n})$ в решетке матрица B симметрична и ее мнимая часть $H = (h_{kj})$,

$$h_{kj} = \operatorname{Im} b_{kj},$$

положительно определена:

$$b_{jk} = b_{kj}, \quad h_{kj}\xi^k\xi^j > 0,$$

где $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ — любой не равный нулю вещественный вектор.

Например, двумерный комплексный тор T^2, задаваемый числом τ с $\operatorname{Im}\tau > 0$, является абелевым. Так как торы, задаваемые числами τ и $-\tau$, совпадают, то любой двумерный тор является абелевым.

Уже среди четырехмерных торов T^4 (комплексная размерность два) есть неабелевы.

Задача. Покажите, что почти все торы T^4 неабелевы.

Для абелевых торов определена θ-функция (Якоби — Римана) $\theta(z_1, \ldots, z_n)$, где $z_1, \ldots, z_n$ — комплексные переменные:

$$\theta(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{m_1, \ldots, m_n} \exp i \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j,k} b_{kj} m_k m_j + \sum_k m_k z_k \right\}, \tag{4}$$

где суммирование ведется по всем наборам $(m_1, \ldots, m_n)$ целых чисел. Условие положительности мнимой части матрицы B гарантирует сходимость ряда.

2. Римановы поверхности как многообразия. Напомним (часть I, § 12, п. 3) определение римановой поверхности многозначной функции. В пространстве $\mathbb{C}^2$ двух комплексных переменных w, z для любой аналитической функции $f(z, w)$ (например, многочлена) берется поверхность ее нулей

$$f(z, w) = 0. \tag{5}$$

Эта поверхность является одномерным комплексным многообразием (комплексной кривой), если выполняется условие неособости

$$\operatorname{grad}_{\mathbb{C}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial w} \right) \neq 0$$

на поверхности (см. § 12 части I).

Разрешая уравнение (5) относительно w, мы можем получить многозначную функцию, например:

а) $w = \sqrt{P_n(z)}$, $f(w, z) = w^2 - P_n(z)$, где $P_n(z)$ — многочлен без кратных корней (гиперэллиптическая риманова поверхность);

б) $w = \ln z = \ln |z| + i \arg z + 2\pi i n$, $f(w, z) = e^w - z$.

Многозначность функции $w(z)$ означает, что проекция поверхности (5) на z-плоскость вдоль w не взаимно однозначна.

Пусть функция $f(z, w)$ есть многочлен степени n по совокупности переменных. Сделаем подстановку

$$z = \frac{y^1}{y^0}, \quad w = \frac{y^2}{y^0}.$$

Тогда $f(z, w) = \frac{1}{(y^0)^n} Q_n(y^0, y^1, y^2)$, где Q_n — однородный многочлен. На проективную плоскость $\mathbb{C}P^2$ уравнение $f(z, w) = 0$ продолжается в виде

$$Q_n(y^0, y^1, y^2) = 0. \tag{6}$$

Точки поверхности (6), где $y^0 = 0$, называются «бесконечно удаленными» точками римановой поверхности (5).

Лемма 3. *Риманова поверхность в $\mathbb{C}P^2$, задаваемая уравнением* (6), *компактна.*

Доказательство. Множество нулей функции Q_n замкнуто. Так как $\mathbb{C}P^2$ компактно, то замкнутое множество в нем тоже компактно. Лемма доказана.

Уравнение (6) в неособом случае задает двумерное компактное многообразие. Что это за многообразие?

Пример 0. Пусть $f(w,z)=w^2-z$; $Q_2(y^0,y^1,y^2)=(y^2)^2-y^1y^0$.

Рассмотрим точки $z=0$, $z=\infty$ и соединим их линией a. На сфере S^2, диффеоморфной $\mathbb{C}P^1$, эта линия выглядит, как показано

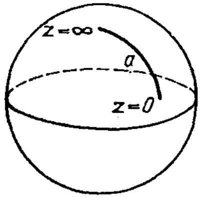

Рис. 48

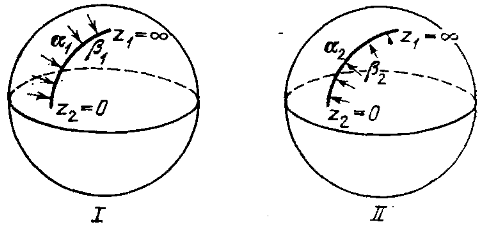

Рис. 49

на рис. 48. Интуитивно ясно, что вне этой линии риманова поверхность $f(z, w)=0$ распадается на два связных куска, каждый из которых с помощью проекции эквивалентен внешности линии a на z-плоскости. Эти куски именуются «ветвями» многозначной функции. В точках 0 и ∞ значения этих двух ветвей функции $w(z)=\sqrt{z}$ сливаются. Чтобы получить поверхность, необходимо кусок границы α_1 области I отождествить с куском β_2 границы области II, а кусок границы β_1 области I — с куском границы α_2 области II (рис. 49).

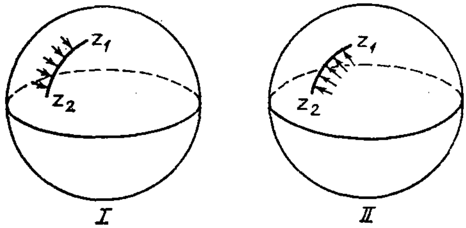

Рис. 50

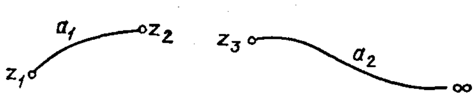

Рис. 51

Легко видеть, что после склейки снова получается поверхность, диффеоморфная сфере S^2.

Пример 1. $f(z, w)=w^2-P_2(z)$, где $P_2(z)$ — многочлен 2-й степени с простыми корнями $z=z_1$, $z=z_2$, $z_1\neq z_2$.

Соединим отрезком корни z_1 и z_2. Вне этого отрезка поверхность $f(z, w)=0$ распадается на две части, не связанные друг с другом. Над сферой $S^2=\mathbb{C}P^1$ это выглядит точно так же, как в примере 0 (рис. 50). Отличие лишь в том, что здесь $z_1\neq\infty$. По аналогии с примером 0, отождествляя $\alpha_1\sim\beta_2$, $\beta_1\sim\alpha_2$, получим сферу S^2.

Пример 2. $f(z, w)=w^2-P_3(z)$, где P_3 — многочлен 3-й степени с попарно различными корнями z_1, z_2, z_3. Сделаем разрезы

a_1 и a_2 (рис. 51). Вне этих разрезов поверхность распадется на две несвязные части.

Отождествляя α_1 с β_2, γ_1 с δ_2, α_2 с β_1, γ_2 с δ_1 (рис. 52), получим тор (сфера с одной ручкой — см. рис. 53).

Пример 3. $f(z, w) = w^2 - P_4(z)$, где P_4 — многочлен 4-й степени с попарно различными корнями z_0, z_1, z_2, z_3. Рассуждая так же, как в примере 2, здесь снова получим тор.

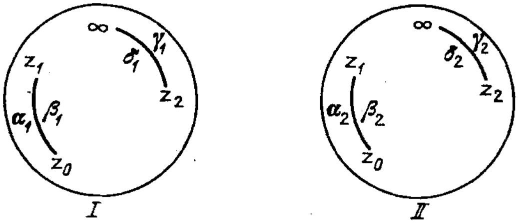

Рис. 52

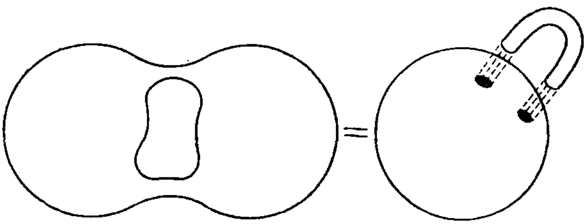

Рис. 53

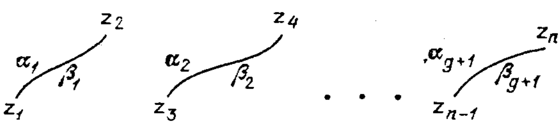

Рис. 54

Утверждение 1. *Риманова поверхность функции $w = \sqrt{P_n(z)}$, где $P_n(z)$ — многочлен степени n без кратных корней, представляет собой сферу с g ручками, где $n = 2g + 1$ или $n = 2g + 2$.* (Строго говоря, бесконечно удаленные точки этой поверхности являются особыми в $\mathbb{C}P^2$.)

Доказательство. Пусть n четно; положим $n = 2g + 2$. Разобьем корни многочлена $P_n(z)$ на пары и соединим каждую пару кривой $a_1, \ldots, a_{g+1}$, не пересекающейся с остальными (рис. 54).

Разрежем z-плоскость по отрезкам a_i. Мы убедились в том, что риманова поверхность распадается на две несвязные части U_1 и U_2 (обход вокруг двух корней не меняет ветви).

Берега разрезов обозначим буквами α_i, β_i. Они лежат соответственно на кусках U_1 и U_2 римановой поверхности. После этого произведем склейку берегов по правилу

$$(U_1, \alpha_i)\sim(U_2, \beta_i), \quad (U_1, \beta_i)\sim(U_2, \alpha_i).$$

Эта склейка соответствует тому, что мы должны с куска U_1, приближаясь к берегу α_i, перейти на кусок U_2 (берег β_i).

Для нечетных n построение то же самое, но за одну из точек ветвления берется $z_{n+1}=\infty$. После этого все повторяется.

§ 5. Простейшие однородные пространства

1. Действие группы на многообразии. Пусть G — группа Ли (например, одна из рассмотренных в части I групп преобразований).

Определение 1. Мы скажем, что группа G *представлена как группа преобразований многообразия M* (или *действует слева на многообразии M*), если для каждого ее элемента g задано преобразование (диффеоморфизм) многообразия M,

$$x\mapsto T_g(x), \quad x\in M,$$

и при этом $T_{gh}=T_gT_h$ и $T_1=1$, где g, h — любые элементы группы G, а 1 — ее единица. Преобразование $T_g(x)$ должно гладко зависеть от пары аргументов (g, x) (т. е. соответствие $(g, x)\mapsto T_g(x)$ должно быть гладким отображением $G\times M\to M$).

Группа G *действует справа* на многообразии M, если вместо соотношения $T_gT_h=T_{gh}$ выполняется соотношение $T_gT_h=T_{hg}$. Если G — одна из групп $GL(n,\mathbb{R})$, $O(n,\mathbb{R})$, $O(p, q)$ или $GL(n,\mathbb{C})$, $U(n)$, ..., $U(p, q)$ $[p+q=n]$, то G естественно действует слева на $\mathbb{R}^n$ или на $\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{C}^n$, причем это действие задается линейными преобразованиями.

Замечание. Действие группы на векторном пространстве, задаваемое линейными преобразованиями, называется также (как нам уже известно) линейным представлением этой группы.

Мы говорим, что действие группы G на многообразии M *транзитивно*, если для любой пары точек x и y из M найдется такой элемент g группы G, что $T_g(x)=y$.

Определение 2. Многообразие M, на котором задано транзитивное действие группы G, называется *однородным пространством* этой группы.

Сама группа G, рассматриваемая как многообразие с действием группы левыми сдвигами $T_g(h)=gh$, называется *главным* однородным пространством (левым).

Аналогично определяется правое главное однородное пространство: $T_g(h)=hg^{-1}$