Берега разрезов обозначим буквами α_i, β_i. Они лежат соответственно на кусках U_1 и U_2 римановой поверхности. После этого произведем склейку берегов по правилу

$$(U_1, \alpha_i) \sim (U_2, \beta_i), \quad (U_1, \beta_i) \sim (U_2, \alpha_i).$$

Эта склейка соответствует тому, что мы должны с куска U_1, приближаясь к берегу α_i, перейти на кусок U_2 (берег β_i).

Для нечетных n построение то же самое, но за одну из точек ветвления берется $z_{n+1} = \infty$. После этого все повторяется.

§ 5. Простейшие однородные пространства

1. Действие группы на многообразии. Пусть G — группа Ли (например, одна из рассмотренных в части I групп преобразований).

Определение 1. Мы скажем, что группа G *представлена как группа преобразований многообразия M* (или *действует слева на многообразии M*), если для каждого ее элемента g задано преобразование (диффеоморфизм) многообразия M,

$$x \mapsto T_g(x), \quad x \in M,$$

и при этом $T_{gh} = T_g T_h$ и $T_1 = 1$, где g, h — любые элементы группы G, а 1 — ее единица. Преобразование $T_g(x)$ должно гладко зависеть от пары аргументов (g, x) (т. е. соответствие $(g, x) \mapsto T_g(x)$ должно быть гладким отображением $G \times M \to M$).

Группа G *действует справа* на многообразии M, если вместо соотношения $T_g T_h = T_{gh}$ выполняется соотношение $T_g T_h = T_{hg}$. Если G — одна из групп $GL(n, \mathbb{R})$, $O(n, \mathbb{R})$, $O(p, q)$ или $GL(n, \mathbb{C})$, $U(n)$, ..., $U(p, q)$ $[p + q = n]$, то G естественно действует слева на $\mathbb{R}^n$ или на $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, причем это действие задается линейными преобразованиями.

Замечание. Действие группы на векторном пространстве, задаваемое линейными преобразованиями, называется также (как нам уже известно) линейным представлением этой группы.

Мы говорим, что действие группы G на многообразии M *транзитивно*, если для любой пары точек x и y из M найдется такой элемент g группы G, что $T_g(x) = y$.

Определение 2. Многообразие M, на котором задано транзитивное действие группы G, называется *однородным пространством* этой группы.

Сама группа G, рассматриваемая как многообразие с действием группы левыми сдвигами $T_g(h) = gh$, называется *главным* однородным пространством (левым).

Аналогично определяется правое главное однородное пространство: $T_g(h) = hg^{-1}$

Пусть x — точка однородного пространства. *Группа изотропии* H_x точки x состоит по определению из всех элементов g группы G, оставляющих точку x на месте:

$$T_g(x) = x \leftrightarrow g \in H_x.$$

Лемма 1. *Для разных точек x однородного пространства группы изотропии H_x изоморфны друг другу.*

Доказательство. Пусть $x \neq y$ и $T_g(x) = y$. Тогда изоморфизм $H_x \to H_y$ определяется формулой

$$h \mapsto ghg^{-1}$$

(действие левое).

Теорема 1. *Имеется взаимно однозначное соответствие между точками однородного пространства M группы G и левыми смежными классами G/H, где H — группа изотропии (действие группы G левое).*

Доказательство. Фиксируем точку x_0 многообразия M. Нужное соответствие устанавливается так: смежному классу (gH) соответствует точка $T_g(x_0)$, где $H = H_{x_0}$ — группа изотропии точки x_0. Это соответствие не зависит от выбора представителя g в классе смежности и является взаимно однозначным. Теорема доказана.

Для правого действия группы нужно взять правые смежные классы.

2. Примеры однородных пространств. а) Сфера S^n в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ задается уравнением

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2 = 1,$$

и группа $O(n+1)$ естественно действует на сфере S^n. Это действие, очевидно, транзитивно. Тем самым сфера S^n является однородным пространством группы $O(n+1)$ ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Найдем группу изотропии точки $x = (1, 0, \ldots, 0) \in S^n$. Эта группа образована матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad A \in O(n).$$

Поэтому $S^n = O(n+1)/O(n)$. Группа $G = SO(n+1)$ также транзитивна на сфере S^n, и группа изотропии есть $SO(n)$. Поэтому $SO(n+1)/SO(n) = S^n$.

б) Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ можно рассматривать как совокупность прямых в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат. Группа $O(n+1)$ транзитивно действует на многообразии $\mathbb{R}P^n$. Рассмотрим прямую с направляющим вектором $(1, 0, \ldots, 0)$. Ортогональные преобразования, переводящие эту прямую в себя, имеют вид

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad A \in O(n).$$

Таким образом, группа изотропии изоморфна прямому произведению $O(1) \times O(n)$, и имеет место равенство

$$\mathbb{R}P^n = O(n+1)/O(1) \times O(n).$$

в) Аддитивная группа всех действительных чисел $\mathbb{R}$ с координатой t действует на окружности $S^1 = \{e^{2\pi i\varphi}\}$ следующим образом:

$$T_t(e^{2\pi i\varphi}) = e^{2\pi i(\varphi+t)}.$$

В силу соотношения $e^{2\pi i} = 1$ получаем: группа изотропии совпадает с группой всех целых чисел.

Более общо, на n-мерном торе $T^n = (S^1)^n$ транзитивно действует группа всех трансляций n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ (эту группу мы также будем обозначать через $\mathbb{R}^n$). Действие задается следующим образом: если $y = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ и $z = (e^{2\pi i\varphi_1}, \ldots \ldots, e^{2\pi i\varphi_n})$ — точка n-мерного тора, то

$$T_y(z) = \left(e^{2\pi i(\varphi_1+t_1)}, \ldots, e^{2\pi i(\varphi_n+t_n)}\right).$$

Группа изотропии состоит из всех векторов y с целочисленными координатами. Таким образом, группа изотропии этого однородного пространства — это целочисленная решетка Γ в $\mathbb{R}^n$:

$$T^n = \mathbb{R}^n/\Gamma.$$

г) *Многообразие Штифеля* $V_{n,k}$. Точкой этого многообразия является упорядоченный ортонормированный набор из k векторов $x = (e_1, \ldots, e_k)$ в n-мерном евклидовом пространстве. Ортогональная матрица n-го порядка $A \in O(n)$ переводит точку x в точку $Ax = (Ae_1, \ldots, Ae_k)$ — репер $(Ae_1, \ldots, Ae_k)$ также ортонормирован. Это действие транзитивно (проверьте!).

Многообразие Штифеля $V_{n,k}$ можно задать как неособую поверхность в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{nk}$. Именно, пусть относительно некоторого ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$ векторы $e_1, \ldots, e_k$ имеют координаты

$$e_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in}), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Величины x_{ij}, $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, n$, суть координаты точки в nk-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{nk}$. Это координаты связаны системой из $k(k+1)/2$ уравнений

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \Leftrightarrow \sum_{s=1}^{n} x_{is}x_{js} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, k, \; i \leqslant j. \tag{1}$$

Лемма 2. *Многообразие Штифеля $V_{n,k}$ есть неособая поверхность размерности $nk-\frac{k(k+1)}{2}$ в пространстве $\mathbb{R}^{nk}$.*

Доказательство. Ввиду наличия группы, транзитивно действующей на $V_{n,k}$, достаточно доказать неособость в одной точке. Проверим неособость в окрестности точки $x_0=(x_{ij})$, где $x_{ij}=\delta_{ij}$, $i=1,\ldots,k$; $j=1,\ldots,n$. Для этого докажем, что касательное пространство к поверхности $V_{n,k}$ в этой точке имеет размерность $nk-\frac{k(k+1)}{2}$ $\left(\text{т. е. ранг матрицы Якоби системы (1) равен } \frac{k(k+1)}{2}\right)$. Пусть $x_{ij}=x_{ij}(t)$ — кривая на поверхности $V_{n,k}$, при $t=0$ проходящая через точку x_0:

$$\sum_{s=1}^{n} x_{is}(t)\,x_{js}(t)=\delta_{ij},\quad i,j=1,\ldots,k;$$

$$x_{ij}(0)=\delta_{ij},\quad i=1,\ldots,k;\quad j=1,\ldots,n.$$

Вектор скорости $\xi_{ij}=\left.\frac{dx_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}$ этой кривой в точке x_0 удовлетворяет соотношению

$$0=\frac{d}{dt}\left.\left(\sum_{s=1}^{n} x_{is}(t)x_{js}(t)\right)\right|_{t=0}=\xi_{ij}+\xi_{ji},\qquad i,j=1,\ldots,k.$$

Итак, касательное пространство в точке x_0 к поверхности $V_{n,k}$ состоит из векторов ξ_{ij}, $i=1,\ldots,k$; $j=1,\ldots,n$, таких, что

$$\xi_{ij}=-\xi_{ji},\quad i,j=1,\ldots,k.$$

Размерность этого пространства как раз равна $nk-\frac{k(k+1)}{2}$. Лемма доказана.

Итак, $V_{n,k}$ — гладкое многообразие. Найдем группу изотропии этого однородного пространства. Дополним репер $e_1,\ldots,e_k$ до ортонормированного базиса $e_1,\ldots,e_n$ во всем n-мерном евклидовом пространстве. Ортогональная матрица, не меняющая векторов $e_1,\ldots,e_k$, имеет в выбранной системе координат вид

$$\begin{array}{r} k\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right. \\ n-k\left\{\begin{array}{c}\\ \end{array}\right.\end{array}\begin{pmatrix} \begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix} & 0 \\ 0 & A\end{pmatrix},\qquad A\in O(n-k).$$

Значит, группа изотропии есть $O(n-k)$ и $V_{n,k}=O(n)/O(n-k)$.

Многообразие Штифеля $V_{n,k}$ при $k<n$ можно рассматривать и как однородное пространство группы $SO(n)$. В этом случае

группа изотропии совпадает с $SO(n-k)$:

$$V_{n,k}=SO(n)/SO(n-k).$$

В частности,

$$V_{n,n}=O(n), \quad V_{n,n-1}=SO(n), \quad V_{n,1}=S^{n-1}.$$

д) *Многообразие Грассмана* $G_{n,k}$. Точками грассманова многообразия являются k-мерные плоскости, проходящие через начало координат в n-мерном евклидовом пространстве. Естественное действие группы $O(n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ дает транзитивное действие на совокупности всех k-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$. Фиксируем некоторую k-мерную плоскость π и найдем ее группу изотропии. Выберем ортонормированную систему координат в $\mathbb{R}^n$ следующим образом: первые k координатных осей лежат в плоскости π, а остальные $n-k$ ей ортогональны. Ортогональная матрица, переводящая плоскость π в себя, имеет в этих координатах блочный вид

$$\begin{array}{r} k\{ \\ n-k\{ \end{array}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad A\in O(k), \quad B\in O(n-k).$$

Мы получаем, таким образом,

$$G_{n,k}=O(n)/O(k)\times O(n-k).$$

Очевидно, имеется равенство

$$G_{n,k}=G_{n,n-k}.$$

Кроме того, грассманово многообразие $G_{n,1}$ совпадает с проективным пространством $\mathbb{R}P^{n-1}$.

е) Однородными пространствами унитарной группы $U(n)$ являются:

1) нечетномерная сфера S^{2n-1}, задаваемая в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ уравнением

$$|z^1|^2+\ldots+|z^n|^2=1;$$

именно,

$$S^{2n-1}=U(n)/U(n-1)=SU(n)/SU(n-1);$$

2) комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^{n-1}$:

$$\mathbb{C}P^{n-1}=U(n)/U(1)\times U(n-1);$$

3) комплексное многообразие Грассмана

$$G^{\mathbb{C}}_{n,k}=U(n)/U(k)\times U(n-k)$$

k-мерных комплексных плоскостей в $\mathbb{C}^n$, проходящих через начало координат.

Задачи. 1. Пусть M — однородное пространство группы G с группой изотропии H. Доказать, что размерность многообразия M равна разности размерностей G и H:

$$\dim M = \dim G - \dim H.$$

Вычислить размерность многообразия $G_{n,k}$.

2. Доказать компактность многообразий $V_{n,k}$ и $G_{n,k}$.

3. Пусть $m = (m_1, \ldots, m_k)$ — разбиение числа n, т. е.

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n.$$

Набор линейных подпространств $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k$ пространства $\mathbb{R}^n$ называется m-флагом, если:

а) $\dim \pi_i - \dim \pi_{i-1} = m_i$;

б) $\pi_0 = 0$, $\pi_k = \mathbb{R}^n$;

в) $\pi_{i-1} \subset \pi_i$.

Ввести на множестве m-флагов $F(n, m)$ структуру однородного пространства группы $O(n)$. Вычислить группу изотропии этого однородного пространства.

§ 6. Пространства постоянной кривизны (симметрические пространства)

1. Понятие симметрического пространства. Большой интерес представляют пространства — многообразия M с метрикой g_{ab}, у которых тензор кривизны R_{abcd} симметричной связности, согласованной с метрикой, удовлетворяет соотношению

$$\nabla_s (R_{abcd}) = 0, \tag{1}$$

где ∇_s — ковариантная производная. Мы знаем, что в силу тождеств Бьянки (см. часть I, § 30) часть ковариантных производных тензора кривизны всегда обращается в нуль. Однако требование (1) в его полном объеме является очень сильным. Оказывается, что при выполнении некоторых глобальных ограничений на многообразие M из (1) уже следует однородность метрики g_{ab}. Более точно, это справедливо для *односвязных* многообразий M (см. ниже § 17). Общие многообразия (неодносвязные), удовлетворяющие условию (1), получаются из односвязных многообразий M факторизацией по дискретной группе движений. При этом может оказаться, что эта дискретная группа Γ не коммутирует со всей группой движений многообразия M, и тогда фактор M/Γ не будет однороден. Такие пространства называют *локально однородными* или *локально симметрическими*.

Из (1) следует, в частности, что все скалярные характеристики кривизны постоянны:

$$R = R^a_a = \text{const}, \quad R_{abcd} R^{abcd} = \text{const}.$$

Мы будем пользоваться, однако, другим определением симметрических пространств.