зия M равна разности размерностей G и H:

$$\dim M = \dim G - \dim H.$$

Вычислить размерность многообразия $G_{n,k}$.

2. Доказать компактность многообразий $V_{n,k}$ и $G_{n,k}$.

3. Пусть $m = (m_1, \ldots, m_k)$ — разбиение числа n, т. е.

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n.$$

Набор линейных подпространств $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k$ пространства $\mathbb{R}^n$ называется m-флагом, если:

а) $\dim \pi_i - \dim \pi_{i-1} = m_i$;

б) $\pi_0 = 0$, $\pi_k = \mathbb{R}^n$;

в) $\pi_{i-1} \subset \pi_i$.

Ввести на множестве m-флагов $F(n, m)$ структуру однородного пространства группы $O(n)$. Вычислить группу изотропии этого однородного пространства.

§ 6. Пространства постоянной кривизны (симметрические пространства)

1. Понятие симметрического пространства. Большой интерес представляют пространства — многообразия M с метрикой g_{ab}, у которых тензор кривизны R_{abcd} симметричной связности, согласованной с метрикой, удовлетворяет соотношению

$$\nabla_s (R_{abcd}) = 0, \tag{1}$$

где ∇_s — ковариантная производная. Мы знаем, что в силу тождеств Бьянки (см. часть I, § 30) часть ковариантных производных тензора кривизны всегда обращается в нуль. Однако требование (1) в его полном объеме является очень сильным. Оказывается, что при выполнении некоторых глобальных ограничений на многообразие M из (1) уже следует однородность метрики g_{ab}. Более точно, это справедливо для *односвязных* многообразий M (см. ниже § 17). Общие многообразия (неодносвязные), удовлетворяющие условию (1), получаются из односвязных многообразий M факторизацией по дискретной группе движений. При этом может оказаться, что эта дискретная группа Γ не коммутирует со всей группой движений многообразия M, и тогда фактор M/Γ не будет однороден. Такие пространства называют *локально однородными* или *локально симметрическими*.

Из (1) следует, в частности, что все скалярные характеристики кривизны постоянны:

$$R = R^a_a = \text{const}, \quad R_{abcd}R^{abcd} = \text{const}.$$

Мы будем пользоваться, однако, другим определением симметрических пространств.

Определение 1. Односвязное многообразие M с метрикой g_{ab} называется *симметрическим пространством*, если для любой точки $x \in M$ существует изометрия (движение) s_x: $M \to M$, имеющая точку x изолированной неподвижной точкой и такая, что все касательные векторы в точке x испытывают отражение: ξ переходит в $-\xi$. Это преобразование s_x называется «симметрией» в точке x.

Смысл требования односвязности многообразия M будет раскрыт ниже (см. §§ 17, 18). В утверждениях настоящего параграфа мы не будем использовать свойства односвязных многообразий. Читатель, еще не знакомый с этими свойствами, может вернуться к решению задач, приведенных в настоящем параграфе, после изучения гл. 4.

Лемма 1. *Симметрическое пространство M обладает свойством* (1).

Доказательство. Мы можем выбрать около данной точки $x \in M$ такие координаты (x^α), что в точке x

$$x^\alpha = 0, \quad g_{ab} = \delta_{ab}, \quad \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^\alpha} = 0.$$

При симметрии s_x тензоры g_{ab} и R_{abcd} перейдут в себя. Что касается тензора $\nabla_s(R_{abcd})$ в точке x, то он должен перейти в себя, поскольку s_x — изометрия (движение). С другой стороны, ввиду свойств s_x тензор $\nabla_s R_{abcd}$ должен перейти в $-\nabla_s R_{abcd}$. Таким образом, $\nabla_s R_{abcd} = 0$. Лемма доказана.

Замечание. Справедлива и обратная теорема, но ее доказательство технически более сложно, и мы его не приводим. Заметим, что в любом римановом многообразии M около любой точки $x \in M$ можно определить «локальную симметрию» s_x на некоторой области $U \ni x$ следующим образом: рассмотрим пучок геодезических, выходящих из точки x, и для геодезической γ с $\gamma(0) = x$ положим

$$s_x(\gamma(\tau)) = \gamma(-\tau),$$

где τ достаточно мало. Однако эти преобразования не являются, вообще говоря, изометриями (движениями).

Задача. Докажите, что локальные преобразования s_x в том и только в том случае являются изометриями для всех $x \in M$, если выполнено условие (1). (Простейшим случаем здесь является случай $n = 2$, в котором тензор кривизны определяется одной константой R. В общем случае проще сначала, анализируя сохранение уравнения Якоби вдоль геодезической, доказать сохранение тензора кривизны преобразованиями s_x.)

Наличие «симметрии» s_x для всех точек $x \in M$ дает достаточный запас движений для того, чтобы доказать однородность многообразия M.

Лемма 2. *Симметрическое многообразие M является локально однородным, т. е. для любой точки $\bar{x} \in M$, достаточно близкой к x, найдется движение $g \in M$ такое, что $g(x) = \bar{x}$. Если пару точек $x, y \in M$ можно соединить геодезической, то найдется движение g такое, что $g(x) = y$.*

Доказательство. Возьмем геодезическую γ, параметризованную натуральным параметром $0 \leqslant \tau \leqslant T$ и такую, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(T) = y$. Рассмотрим далее точку $z = \gamma(T/2)$. Очевидно, симметрия s_z переводит γ в γ и y в x, x в y. (Если метрика индефинитна и γ — изотропная геодезическая, то в качестве τ можно взять аффинный параметр, получающийся из решения уравнения геодезических,— см. § 29 части I.) Если x и $\bar{x}$ — близкие точки, то всегда имеется геодезическая, соединяющая x с $\bar{x}$, так как пучок геодезических, исходящих из x, заметает целую область вокруг x. Лемма доказана.

Замечание. В случае положительной (римановой) метрики любую пару точек можно соединить ломаной геодезической. Поэтому симметрические многообразия в этом случае всегда однородны.

2. Группа изометрий. Свойства ее алгебры Ли. Далее мы будем рассматривать однородные симметрические многообразия M с метрикой g_{ab}, удовлетворяющей условию (1); группу Ли движений многообразия M мы обозначаем через G, а изотропную подгруппу — через H, так что $M = G/H$.

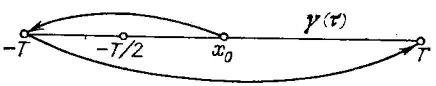

Рис. 55

Рассмотрим отображение

$$s_{x_0}^{-1} s_x = f_{T,\gamma}\colon M \to M, \qquad (2)$$

где $\gamma = \gamma(\tau)$ — некоторая геодезическая, $x_0 = \gamma(0)$, $x = \gamma(-T/2)$. Преобразования $s_{x_0}^{-1} s_x = f_{T,\gamma}\colon M \to M$ обладают следующими важными свойствами (рис. 55):

а) $f_{T,\gamma}$ есть сдвиг точек геодезической γ на время T:

$$\gamma(\tau) \mapsto \gamma(\tau + T);$$

б) $f_{T,\gamma}$ является преобразованием параллельного переноса векторов вдоль этой геодезической;

в) для заданной геодезической γ преобразования $f_{T,\gamma}$ составляют однопараметрическую группу:

$$\begin{gathered} f_{T_1+T_2,\gamma} = f_{T_1,\gamma} f_{T_2\gamma}, \\ f_{-T,\gamma} = (f_{T,\gamma})^{-1}. \end{gathered} \qquad (3)$$

Все эти свойства очевидным образом вытекают из определения $f_{T,\gamma}$.

Согласно сказанному выше (см. § 3) однопараметрические подгруппы $f_{T,\gamma}$ группы G имеют вид

$$f_{T,\gamma} = \exp(TB_\gamma),$$

где B_γ — вектор из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Линейное подпространство алгебры $\mathfrak{g}$, порожденное векторами $B_\gamma \in \mathfrak{g}$ для всех геодезических γ, исходящих из x_0, мы обозначим через L^1. Алгебру Ли стационарной подгруппы $H(x_0)$ группы G, отвечающей точке x_0, мы обозначим через L^0. Очевидно, что

$$\mathfrak{g} = L^0 + L^1. \tag{4}$$

Рассмотрим малое $\varepsilon \neq 0$ и две геодезические γ_1, γ_2, исходящие из точки x_0. Тогда последовательно производимые преобразования

$$f_{-\varepsilon,\gamma_2},\quad f_{-\varepsilon,\gamma_1},\quad f_{\varepsilon,\gamma_2},\quad f_{\varepsilon,\gamma_1}$$

переводят точку x_0 в близкую точку к ней (лежащую от нее на расстоянии порядка ε^3). В силу определения коммутатора в алгебре Ли это показывает, что коммутатор $[B_{\gamma_1}, B_{\gamma_2}]$ лежит в подалгебре, отвечающей стационарной подгруппе точки x_0, т. е. что $[B_{\gamma_1}, B_{\gamma_2}] \in L^0$. Далее, пусть однопараметрическая подгруппа $g_T = \exp(TA)$ группы G оставляет точку x_0 неподвижной (т. е. $A \in L^0$). Тогда, как легко видеть, при малых ε преобразование $g_{-\varepsilon} f_{T,\gamma} g_\varepsilon$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$ представляет собой параллельный перенос вдоль геодезической $\tilde{\gamma}$, выходящей из точки x_0 по направлению $[B_\gamma, A]$. Таким образом,

$$[L^0, L^1] \subset L^1.$$

Итак, доказана

Лемма 3.

$$[L^0, L^0] \subset L^0,$$
$$[L^1, L^0] \subset L^1, \tag{5}$$
$$[L^1, L^1] \subset L^0.$$

Замечание. Алгебру Ли $\mathfrak{g} = L$, разложенную в сумму $L = L^0 + L^1$ с соотношениями (5), называют $\mathbb{Z}_2$-градуированной, так как (5) переписывается в виде

$$[L^i, L^j] \subset L^{(i+j)(\mathrm{mod}\ 2)}. \tag{6}$$

Из леммы 3 вытекает

Следствие 1. *Линейный оператор*

$$\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},$$

равный 1 *на* L^0 *и* -1 *на* L^1, *является автоморфизмом* (*т. е. сохраняет операцию умножения — коммутирования*). *При этом* $\sigma^2 = 1$ (σ *есть «инволюция»*).

Верно и обратное: при наличии у алгебры Ли $\mathfrak{g}$ инволютивного автоморфизма она получает $\mathbb{Z}_2$-градуировку $\mathfrak{g} = L^0 + L^1$ такую, что $\sigma = 1$ на L^0 и $\sigma = -1$ на L^1.

Локальная геометрия около точки $x_0 \in M$ в силу однородности определяется метрикой на касательном пространстве $\mathbb{R}^n_{x_0}$ в точке x_0 $(n = \dim M)$. Касательное пространство $\mathbb{R}^n_{x_0}$ естественно отождествляется с пространством $L^1 \subset \mathfrak{g}$. В силу леммы 3 метрика на $\mathbb{R}^n_{x_0} = L^1$ должна быть инвариантна относительно внутренних автоморфизмов $\xi \mapsto g\xi g^{-1}$, где $g \in H$ и $\xi \in L^1$. Для $g_T = \exp(TA)$, $A \in L^0$, имеем преобразование $L^1 \to L^1$:

$$\xi \mapsto g_T \xi g_T^{-1} = \xi_T,$$

$$(\mathrm{ad}\, A\ (\xi) = [A, \xi] = \left.\frac{d\xi_T}{dT}\right|_{T=0}.$$

Для скалярного произведения $\langle \xi, \eta \rangle$ на L^1 имеем

$$\begin{gathered} \langle \xi_T, \eta_T \rangle = \langle \xi, \eta \rangle, \\ \langle [A, \xi], \eta \rangle + \langle \xi, [A, \eta] \rangle = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Условие (7) накладывает ограничение на скалярное произведение — метрику — на $L^1 = \mathbb{R}^n_{x_0}$.

3. Симметрические пространства 1-го и 2-го типов. Лемма 3 дает алгебраическую модель симметрического пространства. В принципе все симметрические пространства можно классифицировать, как и компактные группы Ли. Мы рассмотрим наиболее важные примеры.

Простейшими примерами односвязного симметрического пространства (нулевой кривизны) являются, разумеется, евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и псевдоевклидовы пространства $\mathbb{R}^n_{p,q}$. В этом случае группа G состоит из движений пространства $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{R}^n_{p,q}$), подгруппа $H \subset G$ совпадает с группой $O(n)$ (или $O(p, q)$), и пространство $L^1 = \mathbb{R}^n$ состоит из трансляций. Мы имеем, как обычно, разложение

$$\mathfrak{g} = L^0 + L^1,$$

причем в этом случае $[L^1, L^1] = 0$; кроме того, как обычно, $[L^0, L^1] \subset L^1$ (структуру групп движений см. в § 4 части I). Неодносвязные симметрические (или, как их называли раньше, локально симметрические) пространства получаются факторизацией по дискретной группе Γ, состоящей из трансляций (возможно, в комбинации с некоторыми отражениями, как бутылка Клейна — см. § 18).

Во всех дальнейших примерах мы будем считать группу G полупростой (см. § 3, п. 1), т. е. скалярное произведение Киллинга на алгебре $\mathfrak{g}$ должно быть невырождено. Напомним, что это скалярное произведение $\langle A, B\rangle$ имеет вид

$$\langle A, B\rangle = -\mathrm{Sp}\,(\mathrm{ad}\,A\,\mathrm{ad}\,B),$$
$$\mathrm{ad}\,A(\xi) = [A, \xi], \quad \mathrm{ad}\,B(\xi) = [B, \xi].$$

Имеется два разных типа односвязных симметрических пространств (даже в случае, когда метрика положительна — риманова):

1-й тип: группа G компактна, и скалярное произведение Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ положительно.

2-й тип: группа G некомпактна, и скалярное произведение Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ индефинитно.

Рассмотрим простейшие примеры.

а) Сфера S^2 (1-й тип). Здесь $G=SO(3)$ (компактна), $H=SO(2)$.

б) Плоскость Лобачевского L^2 (2-й тип). Здесь $G = SO(2, 1) = SL(2, \mathbb{R})$ и $H = SO(2)$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из 2×2-матриц с нулевым следом. Скалярное произведение $\langle A, B\rangle$ имеет вид

$$\langle A, B\rangle = -\mathrm{Sp}(AB).$$

Базис алгебры таков:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$
$$A_1^2 = A_2^2 = 0, \quad A_3^2 = 1.$$

Имеем

$$\langle A_1, A_2\rangle = -1, \quad \langle A_1, A_3\rangle = \langle A_2, A_3\rangle = 0,$$
$$\langle A_3, A_3\rangle = -2, \quad \langle A_1, A_1\rangle = \langle A_2, A_2\rangle = 0.$$

Матрицы из $H = SO(2)$ имеют вид $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Подалгебра $L^0 \subset \mathfrak{g}$ состоит из матриц вида $\lambda(A_1 - A_2)$. Подпространство $L^1 \subset \mathfrak{g}$ порождено векторами $A_1 + A_2$, A_3.

Проверьте соотношение

$$[L^1, L^0] \subset L^1.$$

Скалярное произведение Киллинга на подпространстве $L^1 \subset \mathfrak{g}$ является положительным. Поэтому метрика на симметрическом пространстве L^2 положительна.

Задача. Разберите самостоятельно случаи S^n и L^n.

4. Группы Ли как симметрические пространства. Рассмотрим теперь сами группы Ли Q как симметрические пространства. Группа движений G группы Q изоморфна $Q \times Q$; действие группы G в Q порождается правыми и левыми сдвигами:

$$(g_1, g_2)\colon\ q \mapsto g_1 q g_2^{-1};$$

подгруппа $H \subset G$ есть диагональ $Q = \{g, g\} \subset Q \times Q$: очевидно,

$H(1) = 1$. Симметрии определяются формулой (проверьте!)

$$s_q\colon x \mapsto qx^{-1}q.$$

В частности, $s_1(x) = x^{-1}$.

Разберем более детально случай 1-го типа, когда Q — односвязная и компактная группа. Кривизна метрики Киллинга уже вычислялась нами (см. § 30 части I). Здесь важно, что кривизна Риччи R_{ab} положительно определена. Геодезические линии получаются правыми и левыми сдвигами из однопараметрических подгрупп.

Построим изометрическое вложение $Q \subset S^N$, где N — большое число. Мы будем считать, что группа Q вложена в группу $SO(m)$. Далее, группа $SO(m)$ состоит из $m \times m$-матриц и вследствие этого лежит в пространстве $\mathbb{R}^{m^2}$. Введем евклидово скалярное произведение матриц A и B из $\mathbb{R}^{m^2}$:

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{Sp}(AB^{\top}), \tag{8}$$

где $\top$ обозначает транспонирование (ср. § 24 части I).

Задача. Проверьте, что это скалярное произведение совпадает с формой Киллинга при ограничении на $SO(m)$.

Для $A \in SO(m)$ имеем $AA^{\top} = 1$ и $\operatorname{Sp} 1 = m$. Таким образом, группа $SO(m)$ лежит на сфере $\langle A, A\rangle = m$ радиуса $\sqrt{m}$:

$$SO(m) \subset S^{m^2-1}.$$

Лемма 4. *Скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{m^2}$ инвариантно относительно правых и левых сдвигов на элементы $g \in SO(m)$.*

Доказательство. Пусть $A = g\bar{A}$, $B = g\bar{B}$. Тогда $\langle A, B\rangle = \operatorname{Sp}(g\bar{A}\bar{B}^{\top}g^{\top}) = \operatorname{Sp}(g\bar{A}\bar{B}^{\top}g^{-1}) = \operatorname{Sp}(\bar{A}\bar{B}^{\top}) = \langle\bar{A}, \bar{B}\rangle$. Аналогично для правых сдвигов: если $A = \bar{A}g$, $B = \bar{B}g$, то $\langle A, B\rangle = \operatorname{Sp}(\bar{A}gg^{\top}\bar{B}^{\top}) = \operatorname{Sp}(\bar{A}\bar{B}^{\top}) = \langle\bar{A}, \bar{B}\rangle$. Лемма доказана.

Следствие 2. *Метрика* (8) *на* $\mathbb{R}^{m^2}$, *ограниченная на любую подгруппу* $Q \subset SO(m)$, *инвариантна относительно правых и левых сдвигов*

$$q \mapsto q_1 q q_2$$

(*биинвариантная* или *двусторонне инвариантная метрика*).

Лемма 5. *Всякая двусторонне инвариантная метрика на простой группе Ли Q пропорциональна метрике Киллинга с постоянным множителем.*

Доказательство. На алгебре Ли L группы Q двусторонне инвариантная метрика порождает ad-инвариантное скалярное произведение (здесь $A, B, C \in L$):

$$\langle [A, B], C\rangle + \langle B, [A, C]\rangle = 0 \tag{9}$$

или, если $g_T = \exp(AT)$,

$$\langle g_T B g_T^{-1},\ g_T C g_T^{-1}\rangle = \langle B, C\rangle. \tag{10}$$

Скалярное произведение Киллинга $\langle A, B\rangle$ удовлетворяет (9) и (10). Пусть g_{ab}, $\bar{g}_{ab}$ — две метрики, удовлетворяющие (9), (10). Метрика $g_{ab} - \lambda\bar{g}_{ab}$ также ad-инвариантна. Пусть λ_1 таково, что $\det(g_{ab} - \lambda_1\bar{g}_{ab}) = 0$; соответствующее собственное подпространство алгебры L обозначим через R_{λ_1}. Очевидно, подпространство R_{λ_1} инвариантно относительно внутренних автоморфизмов алгебры. Однако в силу простоты группы Q представление ad неприводимо (не имеет инвариантных подпространств). Поэтому $R_{\lambda_1} = L$ и $g_{ab} = \lambda_1\bar{g}_{ab}$. Лемма доказана.

Следствие 3. *Всякая простая подгруппа Q группы $SO(m)$ с метрикой Киллинга изометрически вкладывается в сферу S^{m^2-1} с метрикой, пропорциональной обычной.*

Следствие 4. *Тензор Риччи R_{ab} также обладает свойством инвариантности* (9), (10). *Поэтому для простой группы $R_{ab} = \lambda g_{ab}$, $\lambda = \mathrm{const}$.*

Для компактных групп G мы уже знаем, что $R_{ab} > 0$ (см. § 30 части I). Полупростая группа есть (локально) прямое произведение нескольких простых: $G = G_1 \times \ldots \times G_k$. Для каждой простой группы G_i этот результат очевиден, так как знак λ легко определяется.

5. Построение симметрических пространств. Примеры. Перейдем теперь к общим симметрическим пространствам. Пусть

$$M = G/H, \quad \mathfrak{g} = L = L^0 + L^1,$$

где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, слагаемые L^0 и L^1 удовлетворяют соотношению (5), L^0 — алгебра Ли группы H, пространство $L^1 = \mathbb{R}^n_{x_0}$ изоморфно касательному пространству к M в точке x_0, $H(x_0) = x_0$. Метрика на M будет получаться в дальнейших примерах из формы Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Лемма 6. *В метрике Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ подпространства L^0 и L^1 ортогональны.*

Доказательство. Так как $[L^0, L^0] \subset L^0$, $[L^0, L^1] \subset L^1$, $[L^1, L^1] \subset L^0$, то для $A \in L^0$, $B \in L^1$

$$\operatorname{ad} A(L^0) \subset L^0, \quad \operatorname{ad} A(L^1) \subset L^1,$$
$$\operatorname{ad} B(L^1) \subset L^0, \quad \operatorname{ad} B(L^0) \subset L^1.$$

Поэтому $\operatorname{Sp}(\operatorname{ad} A \operatorname{ad} B) = 0$. Лемма доказана.

Форма Киллинга на $\mathfrak{g}$ имеет вид (часто форму $g^{(1)}_{\gamma\delta}$ называют *формой Киллинга симметрического пространства*)

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} g^{(0)}_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & g^{(1)}_{\gamma\delta} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где α, β — индексы базиса в L^0 и γ, δ — индексы базиса в L^1. Форма $g^{(0)}_{\alpha\beta}$ на алгебре L^0 удовлетворяет соотношениям (9). Поэтому, если алгебра L^0 проста, то метрика $g^{(0)}_{\alpha\beta}$ пропорциональна метрике Киллинга самой алгебры L^0. Однако в важных примерах алгебра L^0 не проста, а лишь полупроста, $L^0 = L^0_1 \oplus L^0_2$, где алгебры L^0_1 и L^0_2 уже просты. Тогда форма $g^{(0)}_{\alpha\beta}$ в соответствии с леммой 6 может отличаться от формы Киллинга на один множитель λ_1 на L^0_1 и на другой множитель λ_2 на L^0_2.

Заметим следующее: если $A \in L^0$, группа H компактна и метрика $g^{(1)}_{\gamma\delta}$ положительна, то матрица $\operatorname{ad} A$ кососимметрична (как на L^0, так и на L^1). Для $\langle A, A\rangle$ имеем

$$-\operatorname{Sp}(\operatorname{ad} A)^2 = -\left[\operatorname{Sp}(\operatorname{ad} A)^2_{L^0} + \operatorname{Sp}(\operatorname{ad} A)^2_{L^1}\right].$$

Поэтому

$$|\langle A, A\rangle|_{\mathfrak{g}} > |\langle A, A\rangle|_{L^0}. \tag{12}$$

Мы знаем, что у алгебры Ли L^0 компактной группы Ли H форма Киллинга неотрицательна. Что касается ограничения $g^{(0)}_{\alpha\beta}$ формы Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на L^0, то в силу неравенства (12) это ограничение положительно для компактных групп H (если метрика симметрического пространства положительна).

Мы видим следующее: для построения симметрического пространства достаточно задать подалгебру $L^0 \subset \mathfrak{g}$, ограничение на которую формы Киллинга с объемлющей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ невырождено. После этого L^1 определится как ортогональное дополнение. Однако соотношения (12) дают сильные ограничения на выбор L^0. Если форма Киллинга на $\mathfrak{g}$ индефинитна, то для симметрических пространств с положительной метрикой подалгебра $L^0 \subset \mathfrak{g}$ должна быть такой, что форма на ее ортогональном дополнении знакоопределена (2-й тип). При этом алгебра L^0 должна быть алгеброй Ли компактной группы — подгруппы группы $SO(n)$.

З а м е ч а н и е. Можно реализовать симметрическое пространство M как подмногообразие в группе G таким образом, чтобы геодезические многообразия M являлись геодезическими и в многообразии G. Вложение строится одним из следующих способов:

1) выпускаются все однопараметрические подгруппы из $1 \in G$ по направлениям векторов $B \in L^1$ (покажите, что эти геодезические заметают подмногообразие $M \subset G$);

2) рассматривается отображение φ: $M \to G$, действующее по формуле $\varphi(x) = S^{-1}_{x_0} S_x \in G$ (S_x — симметрия);

3) рассматривается инволюция $\bar{\sigma}$: $G \to G$ (антиавтоморфизм группы, $\bar{\sigma}(g_1 g_2) = \bar{\sigma}(g_2)\bar{\sigma}(g_1)$), которая на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ определяется равенствами $\bar{\sigma}|_{L_0} = 1$, $\bar{\sigma}|_{L_1} = -1$. Рассмотрим отображение $g \mapsto g\bar{\sigma}(g^{-1})$. Образ этого отображения и есть $M \subset G$.

Докажите совпадение вложений 1), 2), 3).

Основные примеры односвязных симметрических пространств 1-го типа (постройте разложение $\mathfrak{g} = L^0 + L^1$):

1) $SO(2n)/U(n)$,
2) $SU(n)/SO(n)$,
3) $SU(2n)/Sp(n)$,
4) $Sp(n)/U(n)$,
5) $SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$,
6) $SU(p+q)/SU(p) \times U(q)$,
7) $Sp(p+q)/Sp(p) \times Sp(q)$

(5)–7) — грассмановы многообразия, в частности проективные пространства и сферы.)

Некоторые примеры симметрических пространств 2-го типа (метрика положительна). Оказывается, что в односвязном случае они имеют топологию евклидова пространства $\mathbb{R}^n$:

1) $SO(p, q)/SO(p) \times SO(q)$ (при $q = 1$ это L^p — пространство Лобачевского),
2) $SU(p, q)/U(p) \times SU(q)$ (при $q = 1$ это — единичный шар в $\mathbb{C}^p$ как комплексное многообразие; при $p = 1$ это многообразие совпадает с $L^2 = SU(1, 1)/U(1)$),
3) $Sp(p, q)/Sp(p) \times Sp(q)$,
4) $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$,
5) $SL(n, \mathbb{C})/SU(n)$,
6) $SO(n, \mathbb{C})/SO(n, \mathbb{R})$.

Задачи. 1. Для симметричных пространств 2-го типа с положительной метрикой покажите, что размерность подалгебры $L^0 \subset \mathfrak{g}$ совпадает с числом положительных квадратов формы Киллинга в $\mathfrak{g}$.

2. В частности, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ комплексна (например, $G = SL(n, \mathbb{C})$ или $SO(n, \mathbb{C})$), то числа отрицательных и положительных квадратов совпадают и $\dim L^0 = \frac{1}{2} \dim \mathfrak{g}$. Найдите подалгебры L^0 в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы $G = SL(n, \mathbb{C})$.

3. Покажите, что для симметрических пространств 2-го типа с положительной метрикой всегда

$$M = G/H,$$

где H — максимальная компактная подгруппа группы G. Исследуйте случаи $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$, $SL(n, \mathbb{C})/SU(n)$.

4. Покажите, что односвязные симметрические пространства 2-го типа всегда имеют топологию пространства $\mathbb{R}^n$.

Далее, для кривизны симметрических пространств, как и для групп Ли, имеем

$$\langle R(\xi, \eta)\zeta, \tau\rangle|_{x_0} = \frac{1}{4}\langle[\xi, \eta], [\zeta, \tau]\rangle_{L^0},$$

$$\xi, \eta, \zeta, \tau \in \mathbb{R}^n_{x_0} = L^1.$$

5. Покажите, что для пространств 1-го типа $R_{ab}>0$ и кривизна в двумерных направлениях $\langle R(\xi, \eta)\xi, \eta\rangle$ неотрицательна.

6. Для пространств 2-го типа покажите, что кривизна в двумерных направлениях неположительна. Выведите отсюда, что односвязное симметрическое пространство 2-го типа топологически есть $\mathbb{R}^n$ (предполагается, что метрика положительна).

7. Выясните, какие из вышеперечисленных симметрических пространств 1-го и 2-го типов имеют кривизну в двумерных направлениях, не обращающуюся в нуль. Исследуйте случаи S^n, $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{R}P^n$ для 1-го типа и случаи L^n, $SU(n, 1)/U(n)$, $SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$, $SL(n,\mathbb{C})/SU(n)$ для 2-го типа.

8. Докажите, что для размерностей $n=2$, 3 все односвязные симметрические пространства с положительной метрикой исчерпываются случаями L^n, S^n, $\mathbb{R}^n$. Указание. Покажите, что стационарная подгруппа $H\subset G$ обязана совпадать с $SO(n)$ $(n=2,3)$. Выведите отсюда постоянство кривизны по всем двумерным направлениям для $n=3$.

9. Докажите, что для полупростой группы $G=G_1\times\ldots\times G_k$ (G_i — простые группы) любое односвязное симметрическое пространство M имеет вид

$$M=(G_1/H_1)\times\ldots\times(G_k/H_k),$$

где метрика распадается в прямое произведение. При этом метрика каждого $M_i=G_i/H_i$ пропорциональна метрике Киллинга на пространстве L_i^1 в алгебре Ли $\mathfrak{g}_i=L_i^0+L_i^1$.

В заключение приведем список симметрических пространств размерности 4 с метрикой сигнатуры $(+---)$. Эти пространства могут представлять интерес для общей теории относительности, поскольку метрика g_{ab} удовлетворяет уравнению $R_{ab}-\lambda g_{ab}=0$ (см. следствие 4 выше).

I. Пространства постоянной кривизны с группой изотропии $G=SO(1, 3)$.

1) Пространство Минковского $\mathbb{R}^4_{1,3}$.

2) Пространство де Ситтера $S_+=SO(1, 4)/SO(1, 3)$; заметим, что S_+ гомеоморфно $\mathbb{R}\times S^3$. Тензор кривизны R есть тождественный оператор пространства бивекторов $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ в себя: $R=1$.

3) Пространство де Ситтера $S_-=SO(2, 3)/SO(1, 3)$; пространство S_- гомеоморфно $S^1\times\mathbb{R}^3$, его «универсальная накрывающая» (см. § 18) $\tilde{S}_-=\widetilde{SO}(2, 3)/\widetilde{SO}(1, 3)$ гомеоморфна $\mathbb{R}^4$. Тензор кривизны $R=-1$.

II. Приводимые пространства (произведение пространств постоянной кривизны).

1) $G=SO(3)$, $M=R_+\times M^3_{---}$, где M^3_{---} — пространство постоянной кривизны сигнатуры $(---)$.

2) $G=SO(1, 2)$, $M=R_-\times M^3_{+--}$, где M^3_{+--} — пространство постоянной кривизны сигнатуры $(+--)$.

3) $G = SO(2)\times SO(1,1)$, $M = M^2_{--}\times M^2_{+-}$ — произведение двух двумерных пространств постоянной кривизны.

III. Симметрические пространства плоских волн M_t (группа изотропии G коммутативна, группа движений разрешима). В некоторой глобальной системе координат метрика имеет вид

$$dl^2 = 2dx_1dx_4 + \underbrace{\left[(\cos t)\,x_2^2 + (\sin t)\,x_3^2\right]}_{H} dx_4^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

$$\cos t \geqslant \sin t.$$

В тетраде (см. часть I, § 30), задаваемой 1-формами

$$p = dx_1, \quad q = dx_1 + H\,dx_4, \quad x = dx_3, \quad y = dx_4,$$

тензор кривизны постоянен и имеет вид

$$R = -4\left[\cos t\,(p\wedge x)\otimes(p\wedge x) + \sin t\,(p\wedge y)\otimes(p\wedge y)\right].$$

Замечания. 1. Односвязное симметрическое пространство однозначно определяется своим тензором кривизны в точке. Если R — тензор кривизны, $R\colon \Lambda^2(V)\to\Lambda^2(V)$, то обозначим через h алгебру Ли кососимметрических линейных операторов пространства V, порожденную операторами вида $R(x,y)$, $x,y\in V$ (h есть алгебра изотропии (L_0)). Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, задаваемая в пространстве $V\oplus h$ формулами

$$[(u,\,a),\ (v,\,b)] = (av - bu,\ [a,\,b] + R(u,\,v)).$$

Тогда однородное пространство $M = G/H$, соответствующее паре ($\mathfrak{g}$, h), естественным образом наделяется структурой симметрического пространства.

2. Описание всех тензоров кривизны симметрических пространств с данной группой изотропии H сводится к нахождению H-инвариантных тензоров R типа тензора кривизны, для которых $R(x,\,y)\in h$ для любых x, $y\in V$, h — алгебра Ли H.

§ 7. Линейные элементы и связанные с ними многообразия

1. Конструкции, связанные с касательными векторами. Пусть M есть n-мерное многообразие. По этому многообразию построим $2n$-мерное многообразие L, называемое *многообразием линейных элементов* многообразия M.

Определение. Точками многообразия линейных элементов $L(M)$ являются пары $(x,\,\xi)$, где x — точка многообразия M, ξ — касательный вектор в этой точке к многообразию M.

Введем локальные координаты на многообразии $L(M)$. Пусть $U_q\subset M$ — область действия локальных координат (x_q^α). Тогда в каждой точке области U в касательном пространстве к M возникает базис $e_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x_q^\alpha}$ и касательные векторы в этой точке полу-