3) $G=SO(2)\times SO(1,1), M=M^2_{--}\times M^2_{+-}$ — произведение двух двумерных пространств постоянной кривизны.

III. Симметрические пространства плоских волн M_t (группа изотропии G коммутативна, группа движений разрешима). В некоторой глобальной системе координат метрика имеет вид

$$dl^2 = 2dx_1dx_4 + \underbrace{\left[(\cos t)\,x_2^2 + (\sin t)\,x_3^2\right]}_{H} dx_4^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

$$\cos t \geqslant \sin t.$$

В тетраде (см. часть I, § 30), задаваемой 1-формами

$$p = dx_1, \quad q = dx_1 + H\,dx_4, \quad x = dx_3, \quad y = dx_4,$$

тензор кривизны постоянен и имеет вид

$$R = -4\left[\cos t\,(p\wedge x)\otimes(p\wedge x) + \sin t\,(p\wedge y)\otimes(p\wedge y)\right].$$

Замечания. 1. Односвязное симметрическое пространство однозначно определяется своим тензором кривизны в точке. Если R — тензор кривизны, $R\colon \Lambda^2(V)\to\Lambda^2(V)$, то обозначим через h алгебру Ли кососимметрических линейных операторов пространства V, порожденную операторами вида $R(x,y)$, $x, y\in V$ (h есть алгебра изотропии (L_0)). Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, задаваемая в пространстве $V\oplus h$ формулами

$$[(u, a), (v, b)] = (av - bu, [a, b] + R(u, v)).$$

Тогда однородное пространство $M = G/H$, соответствующее паре $(\mathfrak{g}, h)$, естественным образом наделяется структурой симметрического пространства.

2. Описание всех тензоров кривизны симметрических пространств с данной группой изотропии H сводится к нахождению H-инвариантных тензоров R типа тензора кривизны, для которых $R(x, y)\in h$ для любых $x, y\in V$, h — алгебра Ли H.

§ 7. Линейные элементы и связанные с ними многообразия

1. Конструкции, связанные с касательными векторами. Пусть M есть n-мерное многообразие. По этому многообразию построим $2n$-мерное многообразие L, называемое *многообразием линейных элементов* многообразия M.

Определение. Точками многообразия линейных элементов $L(M)$ являются пары (x, ξ), где x — точка многообразия M, ξ — касательный вектор в этой точке к многообразию M.

Введем локальные координаты на многообразии $L(M)$. Пусть $U_q\subset M$ — область действия локальных координат (x_q^α). Тогда в каждой точке области U в касательном пространстве к M возникает базис $e_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x_q^\alpha}$ и касательные векторы в этой точке получают координаты: $\xi = \xi_q^\alpha e_\alpha$. Пары вида (x, ξ), где $x \in U_q$, образуют область U_q^L в пространстве $L(M)$. Локальные координаты в области U_q^L имеют вид

$$\left(y_q^1, \ldots, y_q^{2n}\right) = \left(x_q^1, \ldots, x_q^n, \xi_q^1, \ldots, \xi_q^n\right).$$

Функции перехода на пересечении области U_q^L с областью U_p^L, где в области U_p действуют координаты $\left(x_p^\beta\right)$, имеют вид

$$\left(y_p^1, \ldots, y_p^{2n}\right) = \left(x_p^\beta, \xi_p^\beta\right) = \left(x_p^\beta\left(x_q^1, \ldots, x_q^n\right), \frac{\partial x_p^\beta}{\partial x_q^\alpha}\xi_q^\alpha\right).$$

Матрица Якоби этих функций перехода имеет вид

$$\left(\frac{\partial y_p^i}{\partial y_q^j}\right) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ H & A \end{pmatrix}, \quad A = \left(\frac{\partial x_p^\beta}{\partial x_q^\alpha}\right), \quad H = \frac{\partial^2 x_p^\beta}{\partial x_q^\alpha \partial x_q^\gamma}\xi_q^\alpha.$$

Якобиан (определитель этой матрицы) равен $(\det A)^2 > 0$.

Следствие. *Многообразие линейных элементов $L(M)$ — гладкое ориентируемое $2n$-мерное многообразие.*

Пример. Многообразие линейных элементов к области U в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ диффеоморфно прямому произведению $U \times \mathbb{R}^n$.

Пусть на многообразии M задана риманова метрика. Тогда в многообразии всех линейных элементов $L(M)$ выделяется подмногообразие $L_1(M)$ точек (x, ξ), для которых $|\xi| = 1$. Размерность многообразия L_1 равна $2n - 1$ (оно задается неособым уравнением $f(x, \xi) = g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = 1$).

Пример. Для n-мерной сферы S^n, задаваемой уравнением $\sum_{\alpha=0}^{n}\left(x^\alpha\right)^2 = 1$, касательный вектор ξ ортогонален радиус-вектору x, проведенному в точку касания. Поэтому для сферы S^n многообразие пар (x, ξ) есть многообразие Штифеля $V_{n+1,2}$. В частности, для двумерной сферы S^2 многообразие всех единичных касательных векторов $L_1(S^\alpha)$ совпадает с $V_{3,2} = SO(3) \approx \mathbb{R}P^3$.

Рассмотрим некоторые другие конструкции, связанные с линейными элементами:

а) Часто встречается многообразие $L_p(M)$, точками которого являются пары (x, τ), где τ — прямая в касательном пространстве в точке $x \in M$, проходящая через начало координат.

б) С любым n-мерным многообразием M можно связать новое многообразие E, точками которого являются пары (x, τ), где $x \in M$ и $\tau = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — базис касательного пространства в точке x.

в) Для ориентированного многообразия M определено многообразие $\tilde{E}$ реперов, лежащих в одном классе ориентации.

г) Для риманова многообразия возникает многообразие E_0 ортогональных касательных реперов.

Другие примеры конструкций, связанных с линейными элементами, будут рассмотрены в гл. 6.

Гладкое отображение f: $M \to N$ многообразия M в многообразие N определяет гладкое отображение соответствующих многообразий линейных элементов:

$$L(M) \to L(N), \ (x, \xi) \mapsto (f(x), f_*\xi)$$

f_* — построенное в § 1 индуцированное отображение касательных пространств).

Определим теперь «пространство кокасательного расслоения» $L^*(M)$ как совокупность пар (x, p), где p — ковектор (1-форма на M) в точке x. Локальные координаты $\left(x_p^\alpha\right)$ в области U_p дают локальные координаты $\left(x_p^\alpha, p_{p\alpha}\right)$ в многообразии $L^*(M)$, где (локально)

$$p = p_{p\alpha} dx_p^\alpha.$$

Функции перехода от координат $\left(x_p^\alpha, p_{p\alpha}\right)$ к координатам $\left(x_q^\beta, p_{q\beta}\right)$ имеют вид

$$\left(x_q^\beta, p_{q\beta}\right) = \left(x_q^\beta\left(x_p^1, \ldots, x_p^n\right), \frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta} p_{p\alpha}\right). \qquad (1)$$

Матрица Якоби этих функций перехода имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ \widetilde{H} & A^{-1} \end{pmatrix}, \quad A = \left(\frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta}\right), \quad \widetilde{H} = \left(\frac{\partial^2 x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta \partial x_q^\gamma} p_{p\alpha}\right).$$

Ее определитель равен 1. Следовательно, многообразие $L^*(M)$ также ориентировано.

Метрика $g_{\alpha\beta}$ на многообразии M позволяет построить диффеоморфизм

$$L(M) \to L^*(M).$$

Здесь точка (x^α, ξ^α) переходит в точку $(x^\alpha, g_{\alpha\beta}(x)\xi^\beta)$ (изучавшаяся в § 19 части I операция опускания индексов).

Выражение $\omega = p_\alpha dx^\alpha$ при заменах вида (1) инвариантно. Следовательно, ω можно рассматривать как дифференциальную форму на многообразии $L^*(M)$. Ее дифференциал $\Omega = d\omega = \sum_{\alpha=1}^{n} dp_\alpha \wedge dx^\alpha$ — невырожденная кососимметрическая 2-форма, которая, очевидно, замкнута, $d\Omega = 0$.

Вывод. *Многообразие $L^*(M)$ симплектическое.*

Напомним, что в части I симплектическим называлось пространство с невырожденной замкнутой кососимметрической 2-формой Ω.

2. Нормальное расслоение к подмногообразию. Пусть M — риманово n-мерное многообразие, $g_{\alpha\beta}$ — метрика на нем. Пусть, далее, N — гладкое k-мерное подмногообразие многообразия M. Определим пространство $\nu_M(N)$ «нормального расслоения» к подмногообразию N в M. Точками этого пространства являются пары (x, ν), где x — точка из N, ν — вектор, касающийся M в точке x и ортогональный к подмногообразию N в этой точке. Под ортогональностью к подмногообразию N мы понимаем ортогональность к подпространству, касательному к N. Подмногообразие N можно считать локально заданным системой неособых уравнений $y^{k+1} = 0, \ldots, y^n = 0$, причем функции $y^{k+1}, \ldots, y^n$ включаются в локальную систему координат $(y^1, \ldots, y^n)$ на M, а $(y^1, \ldots, y^k)$ — локальные координаты на самом N (см. § 1). Тогда многообразие $\nu_M(N)$ локально выделяется в $L(M)$ системой уравнений

$$y^{k+1} = 0, \ldots, y^n = 0, \quad g_{\alpha\beta}(y)\nu^\beta = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, k.$$

Эта система неособа (проверьте!). Поэтому $\nu_M(N)$ — n-мерное подмногообразие в $L(M)$.

Примеры. 1. Пусть $M = \mathbb{R}^n$, N задано в целом системой неособых уравнений

$$f_1(y) = 0, \ldots, f_{n-k}(y) = 0, \quad y = (y^1, \ldots, y^n).$$

Тогда векторы $\operatorname{grad} f_1, \ldots, \operatorname{grad} f_{n-k}$ ортогональны к поверхности N и всюду линейно независимы. Эти векторы задают в $\nu_{\mathbb{R}^n}(N)$ структуру прямого произведения:

$$\nu_{\mathbb{R}^n}(N) \approx N \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Более общо, если подмногообразие N задано в M в целом системой неособых уравнений

$$f_1(x) = 0, \ldots, f_{n-k}(x) = 0,$$

то векторные поля $e_i(x) = \operatorname{grad} f_i(x) = \left(g^{ij}\dfrac{\partial f_i}{\partial x^j}\right), i = 1, \ldots, n-k$, ортогональны к N в каждой точке и линейно независимы. Любой вектор, нормальный к N в точке x, имеет вид

$$\nu = \nu^i e_i(x).$$

Получаем соответствие $(x, \nu) \leftrightarrow (x, \nu^1, \ldots, \nu^k)$, т. е.

$$\nu_M(N) \approx N \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Важный частный случай: пусть $A \subset M$ — многообразие с краем, задаваемое неравенством $f(x) \leqslant 0$; $N = \partial A$ — край многообразия A. Этот край имеет размерность $n-1$ и задается одним неособым уравнением $f(x) = 0$; нормальное расслоение к краю распадается в прямое произведение

$$\nu_M(\partial A) = \partial A \times \mathbb{R}.$$

2. Пусть $M = N \times N$, где N — риманово многообразие. Касательный вектор к многообразию M задается парой касательных векторов (ξ, η) к многообразию N. Введем в многообразии M риманову метрику, полагая

$$\langle (\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2) \rangle = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle + \langle \eta_1, \eta_2 \rangle.$$

Расположим многообразие N в M как диагональ $\Delta = \{(x, x)\} \subset M$, где x — точки из N. Векторы, касающиеся диагонали Δ, имеют вид (ζ, ζ). Если вектор $\nu = (\xi, \eta)$ ортогонален диагонали Δ, то

$$0 = \langle (\zeta, \zeta), (\xi, \eta) \rangle = \langle \zeta, \xi + \eta \rangle.$$

Это равенство справедливо при любом векторе ζ, лишь если $\xi = -\eta$. Итак, векторы, нормальные к диагонали $N = \Delta$, имеют вид $\nu = (\xi, -\xi)$.

Вывод. $\nu_{N\times N}(\Delta) \approx L(N)$.

3. Определим отображение h пространства нормального расслоения $\nu_M(N)$ в многообразие M (геодезическое отображение). Пусть (x, ν) — точка из $\nu_M(N)$. Выпустим из точки x геодезическую $\gamma(t)$ в многообразии M с начальным вектором скорости ν: $\dot\gamma(0) = \nu$. Положим $h(x, \nu) = \gamma(1)$.

Лемма. *Якобиан отображения h при $(x, \nu) = (x, 0)$ не равен нулю.*

Доказательство проведем для случая, когда M есть пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартной евклидовой метрикой, $N \subset \mathbb{R}^n$ — гиперповерхность, заданная параметрически $x^i = x^i(u^1, \ldots, u^{n-1})$, $i = 1, \ldots, n$. Координаты точки $(x, \nu) \in \nu_{\mathbb{R}^n}(N)$ имеют вид $(u^1, \ldots, u^{n-1}, t)$, где $x = x(u)$, $\nu = tn(u)$, $n = n(u)$ — единичный вектор нормали к поверхности N в точке $x(u)$. Геодезическое отображение имеет вид

$$h(u^1, \ldots, u^{n-1}, t) = x(u) + tn(u).$$

Для его производных будем иметь

$$\frac{\partial h}{\partial u^i} = \frac{\partial x}{\partial u^i} + t\frac{\partial n}{\partial u^i}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = n.$$

При $t = 0$ получаем, очевидно, невырожденную матрицу Якоби $\left(\frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial t}\right)$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть многообразие N компактно, и пусть $\nu_M^\varepsilon(N) = \{(x, \nu), |\nu| < \varepsilon\}$. Тогда отображение h отображает область $\nu_M^\varepsilon(N)$ при достаточно малом ε диффеоморфно на некоторую окрестность $U_\varepsilon(N)$ многообразия N в M.*

Доказательство. В силу леммы 1 отображение h является диффеоморфизмом в окрестности любой точки $(x, 0)$ в $\nu_M(N)$. Выберем из этих окрестностей конечное их число, покрывающее множество $(N, 0)$ в $\nu_M(N)$. Многообразие N содержится в объединении этих окрестностей вместе с некоторой ε-окрестностью $\nu_M^\varepsilon(N)$. В этой ε-окрестности отображение является диффеоморфизмом.

Замечание. Пусть $U_\varepsilon(N)$ — диффеоморфный образ области $\nu_M^\varepsilon(N)$, описанный в следствии. Тогда из любой точки x из области $U_\varepsilon(N)$ можно опустить «геодезический перпендикуляр» γ на подмногообразие N, причем геодезическая γ локально единственна. Длину этого перпендикуляра мы будем называть расстоянием от точки x до многообразия N и обозначать через $\rho(x, N)$. Функция $\rho(x, N)$ гладко зависит от точки x в области $U_\varepsilon(N)$.

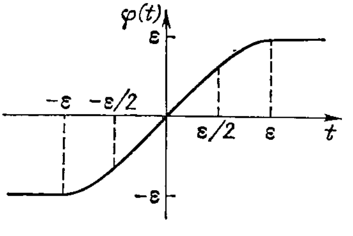

Рис. 56

Теорема 1. *Пусть M — компактная двусторонняя гиперповерхность в* $\mathbb{R}^n$ (см. § 2). *Тогда M задается одним неособым уравнением*

$$f(x) = 0.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ — гладкая функция, график которой изображен на рис. 56. Построим функцию $f(x)$ в $\mathbb{R}$, полагая

$$f(x) = \begin{cases} \pm\varepsilon, & \text{если } x \text{ не лежит в } U_\varepsilon(M), \\ \varphi(\pm\rho(x, M)), & \text{если } x \in U_\varepsilon(M). \end{cases}$$

Здесь $U_\varepsilon(M)$ — описанная в следствии окрестность многообразия M. Знак $+$ выбирается для точек x, лежащих в каком-нибудь одном из кусков в $\mathbb{R}^n \setminus M$, знак — берется для другого куска (поверхность лежит двусторонним образом). Уравнение $f(x) = 0$ как раз задает гиперповерхность M. Теорема доказана.