Глава 2

ВОПРОСЫ ОБОСНОВАНИЯ. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ. ТИПИЧНЫЕ ГЛАДКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Данная глава посвящена вопросам обоснования, необходимым в теории гладких многообразий. Доказательства теорем этой главы не играют ни малейшей роли в дальнейших главах при построении содержательной топологии и геометрии многообразий. Вследствие этого читатель может ознакомиться лишь с определениями и формулировками теорем этой главы без ущерба для понимания дальнейшего материала. Материал этой главы делится на две части: в первой части строится так называемое «разбиение единицы», с помощью которого доказывается ряд «теорем существования», которые в конкретных примерах часто самоочевидны: существование римановой метрики и связности па многообразии, строгое обоснование общей формулы Стокса, существование гладкого вложения компактного многообразия в евклидово пространство, аппроксимация непрерывных функций и отображений гладкими, обоснование оператора усреднения форм и метрик по компактной группе преобразований.

Вторая часть, начинающаяся с так называемой леммы Сарда, посвящена разработке точных представлений о «типичных» особенностях функций и отображений. Эта часть весьма полезна в дальнейших конкретных топологических конструкциях и заслуживает того, чтобы читатель более внимательно ознакомился с определениями и формулировками.

§ 8. Разбиение единицы и его применения

Мы будем в дальнейшем использовать следующие обозначения: $C^\infty(M)$ — пространство гладких функций на гладком многообразии M; $\sup(f(x))$ — точная верхняя грань значений функции $f(x)$; $\operatorname{supp}(f(x))$ — носитель функции $f(x)$, т. е. замыкание множества тех точек x, в которых $f(x)\neq 0$.

1. Разбиение единицы. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.

Лемма 1. *Пусть $A, B\subset \mathbb{R}^n$ — два непересекающихся подмножества, причем A замкнуто и ограниченно, B замкнуто и*

$A\cap B=\varnothing$. Тогда существует C^∞-функция $\varphi(x)$ на $\mathbb{R}^n$ такая, что $\varphi(x)\equiv 1$ на A и $\varphi(x)\equiv 0$ на B (рис. 57). *При этом всюду $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$.*

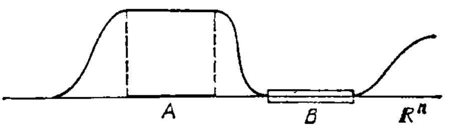

Рис. 57

Доказательство. Пусть $0<a<b$ — два вещественных числа. Рассмотрим на вещественной прямой $\mathbb{R}^1$ следующую функцию:

$$f(x)=\begin{cases}\exp\left(\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{x-a}\right) & \text{при } a<x<b,\\ 0 \text{ для остальных } x.\end{cases}$$

Легко проверить, что $f(x)$ — гладкая функция на $\mathbb{R}^1$ (проверьте!).

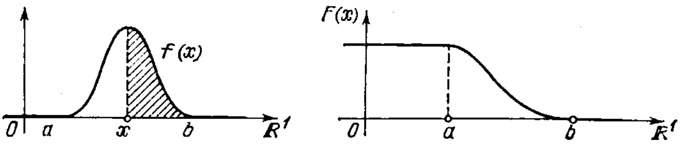

Рис. 58

Рассмотрим функцию

$$F(x)=\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)\Bigg/\int_a^b f(t)\,dt$$

(рис. 58). Ясно, что $F(x)$ — гладкая функция и что

$$F(x)\begin{cases}=0 \text{ при } x\geqslant b,\\ =1 \text{ при } x\leqslant a,\\ \text{убывает от 1 до 0 при } a\leqslant x\leqslant b.\end{cases}$$

Рассмотрим теперь функцию $\psi(x)$ на $\mathbb{R}^n$, определенную формулой

$$\psi(x^1,\ldots,x^n)=F\left((x^1)^2+\ldots+(x^n)^2\right)=F\left(\sum_{i=1}^n (x^i)^2\right).$$

Ясно, что $\psi(x)$ — гладкая функция на $\mathbb{R}^n$ и что

$$\psi(x)\begin{cases}=0 \text{ при } r^2\geqslant b,\\ =1 \text{ при } r^2\leqslant a,\\ \text{убывает от 1 до 0 при } a\leqslant r^2\leqslant b.\end{cases}$$

Здесь $r^2=\sum\limits_{i=1}^n (x^i)^2$ (см. рис. 59). Итак, если S и S' — две концентрические сферы в $\mathbb{R}^n$ и S охватывает S', то существует гладкая функция $\psi(x)$ такая, что $\psi(x) \equiv 0$ вне шара, ограничиваемого S, и $\psi(x) \equiv 1$ в шаре, ограничиваемом S'.

Теперь рассмотрим множества A и B (см. условие леммы). Так как A компактно, то существует набор сфер S_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ таких, что соответствующие открытые шары D_i $(\partial \bar{D}_i = S_i$; черта

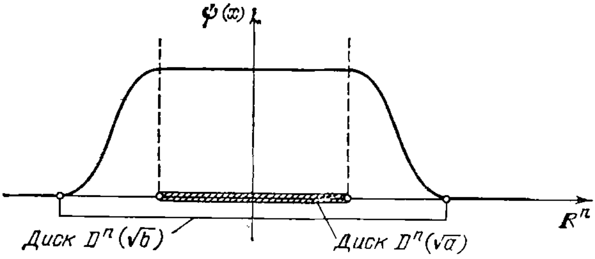

Рис. 59

обозначает замыкание) составляют покрытие множества A, т. е. $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} D_i$. Так как $A \cap B = \varnothing$, то можно считать, что $\bar{D}_i \cap B = \varnothing$ для любого i.

Любую сферу S_i можно уменьшить до сферы $S_i' \subset S_i$ такой, что набор сфер $\{S_i'\}$ все еще порождает покрытие A, т. е. $A \subset \subset \bigcup_{i=1}^{m} D_i'$.

Рассмотрим функции $\psi_i(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (гладкие функции на $\mathbb{R}^n$) такие, что

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1 \text{ на } D_i', \\ 0 \text{ вне } D_i. \end{cases}$$

Положим $\varphi(x) = 1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - \psi_i(x))$. Ясно, что $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) \equiv 1$ на A и $\varphi(x) \equiv 0$ на B. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть C — компактное подмножество гладкого многообразия M; пусть $C \subset V$, где V — открытое подмножество M. Тогда существует функция $\varphi(x) \in C^\infty(M)$ такая, что $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ на M, $\varphi(x) \equiv 1$ на C и $\varphi(x) \equiv 0$ вне V.*

Эта лемма уже доказана нами для случая $M = \mathbb{R}^n$ (см. лемму 1). Обратимся к общему случаю. Пусть $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — локальная карта на M, φ_α: $U_\alpha \to \mathbb{R}^n$. Пусть $S_\alpha \subset U_\alpha$ — компактное подмножество в U_α. Рассмотрим множество $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$; это множество открыто в $\mathbb{R}^n$.

В силу леммы 1 па множестве $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ существует функция $f_\alpha(x)$ такая, что $f_\alpha(x)\equiv 1$ на $\varphi_\alpha(S_\alpha)$ и что $\operatorname{supp} f_\alpha(x)\subset\varphi_\alpha(U_\alpha)$, т. е. $f_\alpha(U_\alpha)\equiv 0$ вне $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. Рассмотрим функцию $F_\alpha(P)$ на M:

$$F_\alpha(P)=\begin{cases} f_\alpha(\varphi_\alpha(P)) & \text{при } P\in U_\alpha,\\ 0 & \text{при } P\notin U_\alpha.\end{cases}$$

Ясно, что $F_\alpha\in C^\infty(M)$, $F_\alpha\equiv 1$ на S_α, $F_\alpha\equiv 0$ вне U_α. Теперь рассмотрим компактное подмножество C (см. выше), $C\subset V$, V открыто. В силу компактности C существует набор открытых координатных окрестностей $U_1,\ldots,U_N$ и компактных множеств $S_1,\ldots$ $\ldots, S_N$ таких, что $C\subset\bigcup\limits_{\alpha=1}^{N} S_\alpha, U_\alpha\supset S_\alpha, \bigcup\limits_{\alpha=1}^{N} U_\alpha\subset V$. По доказанному ранее для каждого U_α существует функция $F_\alpha\in C^\infty(M)$ такая, что $F_\alpha\equiv 1$ на S_α и $F_\alpha\equiv 0$ вне U_α. Рассмотрим функцию $F=1-\prod\limits_{\alpha=1}^{N}(1-F_\alpha)$. Тогда $F\equiv 1$ на C и $F\equiv 0$ вне $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha$, в частности, $F\equiv 0$ вне V. Лемма доказана.

Теорема 1 (существование «разбиения единицы»). *Пусть M — компактное гладкое многообразие; пусть $\{U_\alpha\}$ — произвольное конечное покрытие многообразия M координатными областями (например, открытыми шарами).*

Тогда существует набор функций $\varphi_\alpha(x)\in C^\infty(M)$ таких, что:

1) $\operatorname{supp}\varphi_\alpha\subset U_\alpha$ *для любого* α;
2) $1\geqslant\varphi_\alpha(x)\geqslant 0$ *для всех* $x\in M$;
3) $\sum\limits_\alpha\varphi_\alpha(x)\equiv 1$ *для всех* $x\in M$.

Доказательство. Рассмотрим систему $\{U_\alpha\}$, $1\leqslant\alpha\leqslant N$. Можно построить такую новую «уменьшенную» систему открытых шаров $\{V_\alpha\}$, $1\leqslant\alpha\leqslant N$, что $\overline{V}_\alpha\subset U_\alpha$ и $\{V_\alpha\}$ по-прежнему является покрытием многообразия M.

Рассмотрим пары (U_α, V_α). Согласно лемме 2 существуют функции $\psi_\alpha(x)\in C^\infty(M)$ такие, что $0\leqslant\psi_\alpha\leqslant 1$ на M, $\psi_\alpha\equiv 1$ на $\overline{V}_\alpha$ и $\psi_\alpha\equiv 0$ вне U_α. Положим $\psi(x)=\sum\limits_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha(x)$; очевидно, $\psi\in C^\infty(M)$ и $\psi(x)>0$ для любого $x\in M$. Положим, далее, $\varphi_\alpha=\psi_\alpha/\psi$. Ясно, что функции φ_α удовлетворяют условиям теоремы. Теорема доказана.

Система функций $\{\varphi_\alpha(x)\}$ называется *разбиением единицы, подчиненным покрытию* $\{U_\alpha\}$.

Замечание. Компактность многообразия M не является обязательным ограничением. Как это видно, доказательство существования разбиения единицы дословно переносится на многообразия, допускающие так называемые «локально конечные» покрытия (т. е. любая точка обладает окрестностью, пересекающейся только с конечным числом областей покрытия). Напомним, что хаусдорфово топологическое пространство называется *паракомпактным,* если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие. Таким образом, приведенное нами доказательство существования разбиения единицы годится для любого открытого многообразия, которое является паракомпактным хаусдорфовым пространством.

2. Простейшие применения разбиения единицы. Интеграл по многообразию и формула Стокса. Теорема о существовании разбиения единицы на многообразии имеет полезные следствия. Укажем некоторые из них. Для простоты предположим, что многообразие компактно.

Следствие 1. *На любом компактном многообразии существует риманова метрика.*

Доказательство. Рассмотрим открытое покрытие $\{U_\alpha\}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant N$, многообразия M шарами U_α с локальными координатами (x_α^i). В координатах $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ задаем, например, метрику $g_{ab}^{(\alpha)} = \delta_{ab}$. Надо «склеить» между собой все построенные на шарах U_α метрики $g_{ab}^{(\alpha)}$. По определению положим

$$g_{ab} = \sum_{\alpha=1}^{N} g_{ab}^{(\alpha)}(x)\,\psi_\alpha(x),$$

где $\{\psi_\alpha\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$. Гладкость g очевидна. Так как $\psi_\alpha(x) \geqslant 0$ для любого x и так как пространство римановых метрик образует выпуклый конус (т. е. если g_1, g_2 — две римановы метрики и c, d — положительные числа, то и $cg_1 + dg_2$ — риманова метрика), то определенная нами метрика (g_{ab}) является римановой.

Следствие 2. *На любом компактном многообразии существует риманова связность.*

Это вытекает из следствия 1.

Аналогичным приемом определяется интеграл от внешней формы ω степени $n = \dim M$ по многообразию M. В каждой отдельной карте U_α с локальными координатами $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ форма $\omega^{(n)}$ степени n имеет вид

$$\omega^{(n)}(x) = a_{12\ldots n}(x)\, dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n,$$

интеграл от $\omega^{(n)}$ по области U_α определяется обычным образом:

$$\int_{U_\alpha} \omega^{(n)} = \int_{U_\alpha} a_{12\ldots n}(x)\, dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n.$$

Для определения полного интеграла $\int\limits_{M^n} \omega^{(n)}$ следует «склеить» между собой интегралы $\int\limits_{U_\alpha} \omega^{(n)}$. По определению положим

$$\int\limits_{M^n} \omega^{(n)} = \int\limits_{M^n} \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha(x)\right) \omega^{(n)}(x) = \sum_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega^{(n)}(x).$$

(При этом напомним, что $\psi_\alpha(x) \equiv 0$ вне U_α.) Здесь $\{\psi_\alpha\}$ — разбиение единицы.

Перейдем к другим примерам использования разбиения единицы.

Дадим строгое доказательство общей формулы Стокса.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей ∂D. Например, D может задаваться неравенством: $f(x^1, \ldots, x^n) \geqslant 0$, $\operatorname{grad} f|_{\partial D} \neq 0$, где $x^1, \ldots, x^n$ — евклидовы координаты в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, $V^{n-1} = \partial D$ — гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$. Если в $\mathbb{R}^n$ задана ориентация, то фиксирован порядок координат $x^1, \ldots, x^n$ с точностью до четной перестановки. Это эквивалентно тому, что фиксирован порядок векторов репера $(e_1, \ldots, e_n)$, который можно гладко перемещать в $\mathbb{R}^n$. Пусть $n(P)$ (где $P \in \partial D$) — внешняя нормаль к ∂D. В окрестности любой точки $P \in \partial D$ можно ввести локальные гладкие координаты $y^1, \ldots, y^{n-1}$. Эти координаты определяют ориентацию границы ∂D; напомним, что эта ориентация считается согласованной с ориентацией D, если репер $\left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^{n-1}}, n(P)\right)$ получается из репера $(e_1, \ldots, e_n)$ линейным преобразованием с положительным детерминантом.

Теорема 2. *Пусть ω — внешняя дифференциальная форма степени $n-1$ на D. Тогда*

$$\int\limits_{D} d\omega = \int\limits_{\partial D} i^*(\omega),$$

где $i\colon \partial D \to D$ — вложение, $i^*(\omega)$ — ограничение формы ω с D на ∂D (определение см. в части I, § 22); *ориентация на ∂D согласована с ориентацией в D.*

Замечание. Порядок координат $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^{n-1}$, задаваемый ориентацией, необходим для вычисления интегралов от форм.

Доказательство. Рассмотрим конечное покрытие области D шарами U_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant N$, достаточно малого радиуса и фиксируем координатные отображения $h_\alpha\colon B^n \to \mathbb{R}^n$; $h_\alpha(B^n) = U_\alpha$, где B^n — стандартный шар в $\mathbb{R}^n$, а отображение h_α есть просто введение локальных координат в U_α. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — фиксированные координаты в B^n.

Можно считать (это следует из теоремы о неявных функциях), что покрытие $\{U_\alpha\}$ устроено так: либо $\partial D \cap U_\alpha = \varnothing$, либо

$\partial D \cap U_\alpha \neq \varnothing$ и пересечение $\partial D \cap U_\alpha$ определяется уравнением $x^n = 0$, где $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальные координаты в U_α.

Пусть $\{\varphi_\alpha(x)\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$, т. е.:

1) $\operatorname{supp}(\varphi_\alpha) \subset U_\alpha$ для любого α;
2) $\varphi_\alpha(x) \geqslant 0$ для любого $x \in \bigcup_\alpha U_\alpha$;
3) $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) \equiv 1$ для любого $x \in \bigcup_\alpha U_\alpha$.

Тогда

$$\int_{\partial D} i^*(\omega) = \sum_\alpha \int_{\partial D} i^*(\varphi_\alpha \omega), \qquad \int_D d\omega = \sum_\alpha \int_D d(\varphi_\alpha \omega).$$

Следовательно, достаточно доказать, что для любого α, $1 \leqslant \alpha \leqslant N$ (N — число областей покрытия), выполнено равенство

$$\int_{\partial D} i^*(\varphi_\alpha \omega) = \int_D d(\varphi_\alpha \omega).$$

Так как $\operatorname{supp}(\varphi_\alpha) \subset U_\alpha$, то $\operatorname{supp}(\varphi_\alpha \omega) \subset U_\alpha$. Пусть $x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n$ — локальные координаты в U_α; запишем в этих координатах

$$\varphi_\alpha \omega = \tilde{\omega}_\alpha = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k(x)\, dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_\alpha^k} \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n,$$

$a_k(x) \in C^\infty(D)$. Отсюда

$$d\tilde{\omega}_\alpha = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k(x)}{\partial x_\alpha^k}\right) dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n.$$

Случай 1. $U_\alpha \cap \partial D = \varnothing$. Тогда $\int_{\partial D} i^*(\varphi_\alpha \omega) = 0$, так как $\varphi_\alpha \equiv 0$ на ∂D. Так как $U_\alpha \cap \partial D = \varnothing$, то либо $U_\alpha \subset D$, либо $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \setminus D$. Если $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \setminus D$, то $\int_D d(\varphi_\alpha \omega) = 0$, и формула Стокса доказана. Пусть теперь $U_\alpha \subset D$. Надо доказать, что $\int_D d(\varphi_\alpha \omega) = 0$, т. е. что

$$\int_{U_\alpha} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k}\right) dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n = 0.$$

Координаты (x_α^i) позволяют отождествить U_α с шаром $B^n \subset \mathbb{R}^n$. Продолжим выражение под интегралом

$$\int_{U_\alpha = B^n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k}\right) dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n$$

на все пространство $\mathbb{R}^n$ нулем (у нас $\operatorname{supp}(a_k) \subset B^n$). Пусть $C^n = \{|x_k| \leqslant R,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$ — куб в $\mathbb{R}^n$ такой, что $C^n \supset B^n$; число $2R$ — сторона куба C^n. Тогда

$$\int\limits_{B^n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k} \right) dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{C_n} \frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k} dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{C^{n-1}} (-1)^\alpha \left(\int\limits_{-R}^{R} \frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k} dx_\alpha^k \right) dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_\alpha^k} \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n.$$

Далее,

$$\int\limits_{C^{n-1}} \left(\int\limits_{-R}^{R} \frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k} dx_\alpha^k \right) dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_\alpha^k} \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n =$$

$$= \pm \int\limits_{C^{n-1}} \{a_k(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^{k-1}, R, x_\alpha^{k+1}, \ldots, x_\alpha^n) -$$

$$- a_k(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^{k-1}, -R, x_\alpha^{k+1}, \ldots, x_\alpha^n)\} dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_\alpha^k} \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n = 0,$$

так как $a_k(x_\alpha^1, \ldots, \pm R, \ldots, x_\alpha^n) = 0$.

Итак, случай 1 полностью разобран.

Случай 2. $U_\alpha \cap \partial D \neq \varnothing$. Мы должны показать, что $\int\limits_{\partial D} i^*(\varphi_\alpha \omega) = \int\limits_{D} d(\varphi_\alpha \omega)$. Достаточно проверить, что $\int\limits_{\partial D \cap U_\alpha} i^*(\tilde{\omega}_\alpha) = \int\limits_{U_\alpha} d\tilde{\omega}_\alpha$. Запишем форму $\tilde{\omega}_\alpha = \varphi_\alpha \omega$ в координатах $x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n$:

$$\tilde{\omega}_\alpha = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_\alpha^k} \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n.$$

Имеем

$$i^*(\tilde{\omega}_\alpha) = (-1)^{n-1} a_n i^*(dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^{n-1}),$$

$$\int\limits_{\partial D} i^*(\tilde{\omega}_\alpha) = \int\limits_{\partial D} (-1)^{n-k} a_n dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^{n-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{D} \frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k} dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n.$$

Как и в случае 1, заменяем область интегрирования шаром B^n и продолжаем функции a_k нулем на все $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\int\limits_{B^n} d\tilde{\omega}_\alpha = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{C^n} \lambda \frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k} dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n,$$

где

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_\alpha^n > 0, \\ 0, & \text{если } x_\alpha^n \leqslant 0. \end{cases}$$

Далее,

$$\int\limits_{C^n} \lambda \frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k} dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n =$$

$$= \int\limits_{C^{n-1}} \left(\int\limits_{-R}^{R} \lambda \frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k} dx_\alpha^k \right) dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_\alpha^k} \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n = 0,$$

если $k \neq n$, так как $a_k(x_\alpha^1, \ldots, R, \ldots, x_\alpha^n) - a_k(x_\alpha^1, \ldots, -R, \ldots$ $\ldots, x_\alpha^n) = 0$. В случае $k = n$ ситуация меняется:

$$\int\limits_{C^n} \frac{\partial a_n}{\partial x_\alpha^n} dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n = (-1)^{n-1} \int\limits_{C^{n-1}} \left(\int\limits_{-R}^{R} \lambda \frac{\partial a_n}{\partial x_k^n} dx_\alpha^n \right) dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^{n-1}.$$

Далее, $\int\limits_{-R}^{R} \lambda \frac{\partial a_n}{\partial x_\alpha^n} dx_\alpha^n = a_n |_{\partial D}$ (функция $\lambda(x)$ разрывна на ∂D). Последняя формула есть прямое следствие формулы $\int\limits_a^b df(x) = f(b) - f(a)$. Итак,

$$\int\limits_{B^n} d\widetilde{\omega}_\alpha = \int\limits_{C^{n-1}} (-1)^{n-1} a_1 dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^{n-1},$$

что и требовалось. Случай 2 полностью разобран. Теорема доказана. (C^{n-1} всюду в этом доказательстве обозначает куб размерности $n-1$.)

Замечание. При доказательстве была использована «согласованность ориентации» области D и ее границы ∂D: дело в том, что при использовании формулы $\int\limits_a^b df(x) = f(b) - f(a)$ следует иметь в виду, что $b > a$, а это и дает направление внешней нормали $n(p)$ к ∂D; при изменении направления нормали интеграл изменил бы знак. Функция $a_n(k)$ при фиксированных $x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^{n-1}$ устроена так, как показано на рис. 60.

Задача. Докажите формулу Стокса для компактных многообразий с краем:

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega.$$

Здесь ∂M — край многообразия M, ориентация которого согласована с ориентацией самого многообразия (см. § 1, п. 3).

3. Инвариантные метрики. Существование разбиения единицы позволяет доказывать существование римановых метрик (на многообразиях), инвариантных относительно действия компактных групп преобразований.

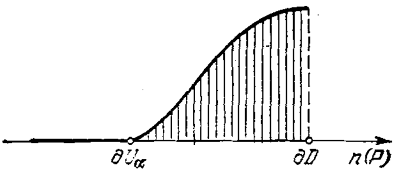

Рис. 60

Рассмотрим сначала действие конечной группы G на гладком компактном связном замкнутом многообразии M.

Теорема 3. *На многообразии M существует риманова метрика, инвариантная относительно действия группы G.*

Доказательство. Как было доказано выше, на M существует некоторая риманова метрика $g_{ab}(x)$. Искомую инвариантную метрику построим из метрики $g_{ab}(x)$ посредством усреднения по группе G. Обозначим через $\langle,\rangle_x$ скалярное умножение в T_x, порожденное метрикой $g_{ab}(x)$. Пусть N — порядок группы G. Построим на M новое скалярное умножение $(,)_x$ (а тем самым и новую риманову метрику), произведя «усреднение по группе»:

$$(a, b)_x = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \langle g(a), g(b) \rangle_{g(x)},$$

где $a, b \in T_x$. Эта формула, очевидно, задает такое скалярное произведение, что $(g(a), g(b))_{g(x)} = (a, b)_x$ для любых $x \in M$, a, $b \in T_x$, $g \in G$, т. е. $(\ ,\ )_x$ задает риманову метрику, инвариантную относительно действия группы G. Теорема доказана.

Аналогичная процедура приводит нас к римановым метрикам, инвариантным относительно действия непрерывных групп Ли. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Пусть G — связная компактная группа Ли, и пусть $t = (t^1, \ldots, t^m)$ — локальные координаты на G в окрестности единицы. Эти координаты порождают (например, с помощью правых сдвигов) локальные координаты в окрестности любой точки $\alpha \in G$. В силу гладкости умножения на G эта система окрестностей задает атлас (набор координатных окрестностей) на группе G. Поэтому можно считать, что координаты $(t^1, \ldots, t^m)$ обслуживают (с помощью правых сдвигов) все точки группы G.

Лемма 3. *На группе Ли G существует элемент объема, инвариантный относительно правых сдвигов и представимый в виде $d\mu(x) = \Omega\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^m$, где $x \in G$, Ω — постоянная, а $t^1, \ldots, t^m$ — локальные координаты в окрестности точки x, полученные правым сдвигом на x из системы координат в окрестности единицы.*

Замечание. Иногда говорят, что такая дифференциальная форма на G задает «правоинвариантную меру» на G.

Доказательство. Форму объема в единичной точке $1 \in G$ мы можем задать с помощью обычного определителя. Применяя правые сдвиги, «разносим» эту форму по всей группе G. Единственность (с точностью до постоянного множителя) следует из того, что кососимметрический тензор ранга m в m-мерном линейном пространстве $T_1(G)$ определен однозначно с точностью до постоянного множителя. Лемма доказана.

Существует стандартная символика, с помощью которой выражают свойство правой инвариантности для меры $d\mu(\alpha)$: $d\mu(gg_0) = d\mu(g)$ (замена переменных порождает умножение на якобиан замены). Иногда свойство правой инвариантности меры $d\mu(\alpha)$ выражают в интегральных терминах:

$$\int_G f(gg_0)\, d\mu(g) = \int_G f(g)\, d\mu(g),$$

где $f(g)$ — произвольная функция на G, для которой этот интеграл существует.

Аналогично строится левоинвариантная мера на группе G.

Пусть теперь компактная группа Ли G гладко действует на гладком многообразии M.

Теорема 4. *На многообразии M существует риманова метрика, инвариантная относительно группы G.*

Замечание. Если G действует на M не транзитивно, то таких инвариантных метрик на M будет, вообще говоря, много.

Доказательство. Построение искомой метрики копирует уже описанную нами процедуру усреднения метрики по действию конечной группы G. Рассмотрим на M какую-нибудь риманову метрику $g_{ab}(x)$, и пусть $\langle\, ,\rangle_x$ — соответствующее ей скалярное произведение в T_x. Построим на M новое скалярное произведение $(\, ,)_x$ в T_x (а тем самым и новую риманову метрику), положив по определению

$$(a, b)_x = \frac{1}{\mu(G)} \int_G \langle g(a), g(b)\rangle_{g(x)}\, d\mu(g),$$

где $x \in M$, a, $b \in T_x$, $d\mu(g)$ — правоинвариантная мера на G, $g \in G$, $\mu(G)$ — объем группы G. Ясно, что

$$(g_0(a), g_0(b))_{g_0(x)} = \frac{1}{\mu(G)} \int_G \langle gg_0(a), gg_0(b)\rangle_{gg_0(x)} d\mu(gg_0) =$$
$$= \frac{1}{\mu(G)} \int_G \langle g'(a), g'(b)\rangle_{g'(x)} d\mu(g') = (a, b)_x,$$

т. е. построенная метрика инвариантна относительно действия G на M. Теорема доказана.