§ 9. Реализация компактных многообразий как поверхностей в $\mathbb{R}^N$

Рассмотрим гладкие многообразия M и N размерностей n и p. Напомним, что гладкое отображение f: $M \to N$ называется погружением, если ранг отображения $df|_x$: $T_x \to T_{f(x)}$ при любом x равен n. Это означает, что линейное отображение $df|_x$ касательных пространств является вложением для всех $x \in M$; в частности, отсюда следует, что $p \geqslant n$. Из теоремы о неявных функциях вытекает, что локально такое отображение f устанавливает диффеоморфизм между некоторой окрестностью $U(x)$ точки $x \in M$ и ее образом $f(U(x))$ в многообразии N. Однако, «в целом» отображение f вовсе не обязано быть взаимно однозначным.

Погружение f: $M \to N$ будем называть вложением, если f взаимно однозначно (т. е. устанавливает взаимно однозначное соответствие между M и $f(M)$).

Теорема. *Любое компактное гладкое многообразие может быть гладко вложено в $\mathbb{R}^n$ для достаточно большого N.*

Доказательство. Зафиксируем конечное покрытие $\{U_i\}$ многообразия M окрестностями, диффеоморфными $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim M$) и для каждого α построим отображение φ_i: $M \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, наворачивающее U_i на дополнение в S^n к одной точке и переводящее $M - U_i$ в эту точку. Ясно, что это отображение можно сделать гладким и имеющим невырожденный дифференциал в точках множества U_i. Отображения φ_i составляют отображение φ: $M \to \mathbb{R}^N$, где $N = (n+1)k$, k — число элементов покрытия:

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)),$$

и это отображение является вложением. Действительно, дифференциал $d_x\varphi$ мономорфен, потому что уже дифференциал $d_x\varphi_i$ мономорфен, если $x \in U_i$; далее, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ при $x \neq y$, потому что уже $\varphi_i(x) \neq \varphi_i(y)$, если $x \in U_i$. Теорема доказана.

Верхнюю оценку на размерность объемлющего евклидова пространства можно свести к числу $2n+1$. Более того, всякое отображение $M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ аппроксимируется гладким вложением (см. ниже). При $n = 1$ этот факт наглядно очевиден.

§ 10. Некоторые свойства гладких отображений многообразий

1. Аппроксимация непрерывных отображений гладкими. Докажем сначала возможность аппроксимации непрерывных отображений гладкими. Рассмотрим для простоты непрерывные отображения f: $M \to N$, где M, N — связные гладкие компактные многообразия без края. Как было доказано в предыдущих пунктах, M и N можно считать римановыми многообразиями, в частности,