§ 9. Реализация компактных многообразий как поверхностей в $\mathbb{R}^N$

Рассмотрим гладкие многообразия M и N размерностей n и p. Напомним, что гладкое отображение f: $M \to N$ называется погружением, если ранг отображения $df|_x$: $T_x \to T_{f(x)}$ при любом x равен n. Это означает, что линейное отображение $df|_x$ касательных пространств является вложением для всех $x \in M$; в частности, отсюда следует, что $p \geqslant n$. Из теоремы о неявных функциях вытекает, что локально такое отображение f устанавливает диффеоморфизм между некоторой окрестностью $U(x)$ точки $x \in M$ и ее образом $f(U(x))$ в многообразии N. Однако, «в целом» отображение f вовсе не обязано быть взаимно однозначным.

Погружение f: $M \to N$ будем называть вложением, если f взаимно однозначно (т. е. устанавливает взаимно однозначное соответствие между M и $f(M)$).

Теорема. *Любое компактное гладкое многообразие может быть гладко вложено в $\mathbb{R}^n$ для достаточно большого N.*

Доказательство. Зафиксируем конечное покрытие $\{U_i\}$ многообразия M окрестностями, диффеоморфными $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim M$) и для каждого α построим отображение φ_i: $M \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, наворачивающее U_i на дополнение в S^n к одной точке и переводящее $M - U_i$ в эту точку. Ясно, что это отображение можно сделать гладким и имеющим невырожденный дифференциал в точках множества U_i. Отображения φ_i составляют отображение φ: $M \to \mathbb{R}^N$, где $N = (n+1)k$, k — число элементов покрытия:

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)),$$

и это отображение является вложением. Действительно, дифференциал $d_x\varphi$ мономорфен, потому что уже дифференциал $d_x\varphi_i$ мономорфен, если $x \in U_i$; далее, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ при $x \neq y$, потому что уже $\varphi_i(x) \neq \varphi_i(y)$, если $x \in U_i$. Теорема доказана.

Верхнюю оценку на размерность объемлющего евклидова пространства можно свести к числу $2n+1$. Более того, всякое отображение $M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ аппроксимируется гладким вложением (см. ниже). При $n = 1$ этот факт наглядно очевиден.

§ 10. Некоторые свойства гладких отображений многообразий

1. Аппроксимация непрерывных отображений гладкими. Докажем сначала возможность аппроксимации непрерывных отображений гладкими. Рассмотрим для простоты непрерывные отображения f: $M \to N$, где M, N — связные гладкие компактные многообразия без края. Как было доказано в предыдущих пунктах, M и N можно считать римановыми многообразиями, в частности, можно считать M и N метрическими пространствами; пусть ρ — метрика (расстояние) на многообразии N.

Тогда можно ввести естественное понятие расстояния между отображениями M в N, положив

$$\rho(f, g) = \max_{x \in M} \rho(f(x), g(x)).$$

Таким образом, непрерывные отображения $M \to N$ для компактных M и N образуют метрическое пространство.

Воспользуемся теперь следующим фактом, известным из курса анализа.

Предложение. *Пусть $f(x^1, \ldots, x^n)$ — непрерывная функция на открытой области $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого открытого множества $V \subset U$ такого, что $\bar{V} \subset U$, существует функция $g(x^1, \ldots, x^n)$ такая, что: 1) функция $g(x^1, \ldots, x^n)$ является гладкой на V; 2) $g|_{U \setminus V} = f|_{U \setminus V}$; 3) $\max_{x \in \bar{V}} |f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$; 4) функция $g(x^1, \ldots, x^n)$ является гладкой во всех точках, где была гладкой функция $f(x^1, \ldots, x^n)$.*

Доказательство мы опускаем. Докажем теперь следующую важную аппроксимационную теорему.

Теорема 1. *Любое непрерывное отображение $f\colon M \to N$ можно сколь угодно близко аппроксимировать гладкими отображениями: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое гладкое отображение $g\colon M \to N$, что $\rho(f, g) < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $U \subset N$ — открытое подмножество, гомеоморфное области V, $V \subset \mathbb{R}^n$ $(\dim N = n)$; пусть $\varphi\colon U \to V$ — соответствующий гомеоморфизм (например, в качестве U можно взять любую координатную окрестность гладкого многообразия N,

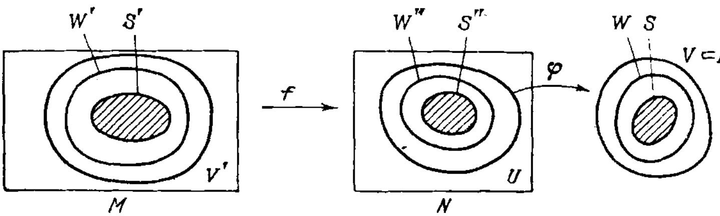

Рис. 61

а в качестве φ — соответствующее координатное отображение). Пусть $S \subset \bar{S} \subset W \subset \bar{W} \subset V \subset \mathbb{R}^n$. Положим $W'' = \varphi^{-1}(W)$, $S'' = \varphi^{-1}(S)$, $V' = f^{-1}(U)$, $W' = f^{-1}(W'')$, $S' = f^{-1}(S'')$ (см. рис. 61). Так как $\bar{S}'' \subset W'' \subset \bar{W}'' \subset U$, то существует положительное $\eta < \varepsilon$ такое, что $\rho(W'', N \setminus U) > \eta > 0$, $\rho(S'', N \setminus W'') > \eta > 0$. Согласно сформулированному выше предложению существует такое непрерывное отображение $\tilde{g}\colon V' \to \mathbb{R}^n$, гладкое на S' и во всех точках, где было гладко f, что $\tilde{g}|_{V'\setminus W'} \equiv (\varphi\circ f)|_{V'\setminus W'}$ и $\rho(f, \varphi^{-1}\circ\tilde{g}) \leqslant \eta < \varepsilon$. Тогда $(\varphi^{-1}\circ\tilde{g})V' \subset U$. Таким образом, мы получили отображение $g' = \varphi^{-1}\circ\tilde{g}$: $V' \to U$, гладкое на $S' \subset M$. В то же время можно считать (см. выше), что $g'|_{V'\setminus W'} \equiv f|_{V'\setminus W'}$, а потому g' можно непрерывно продолжить на все многообразие M, положив $f = g$ на $M\setminus W'$ и $g = g'$ на V'. Таким образом, построено непрерывное отображение g: $M \to N$, гладкое на S' и во всех точках, где было гладко f, такое, что $\rho(f, g) < \varepsilon$. Покрывая многообразие M открытыми областями, гомеоморфными областям в M, и повторяя описанный выше процесс достаточное число раз, получаем утверждение теоремы.

Замечание 1. Из доказательства теоремы виден локальный характер аппроксимации: отображение f последовательно аппроксимируется гладким на картах многообразия M. Поэтому, если отображение f было уже гладким на открытой области U, $U \subset M$, то для любого замкнутого множества $V \subset U$ можно считать, что $f \equiv g$ на V.

Замечание 2. В дальнейшем мы покажем, что если M, N — гладкие связные замкнутые многообразия, то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что из неравенства $\rho(f, g) < \varepsilon_0$ (где f, g: $M \to N$ — два непрерывных отображения) следует, что f и g гомотопны. В частности, в доказанной выше теореме можно считать, что гладкое отображение g, аппроксимирующее f, гомотопно f (определение гомотопии см. ниже).

2. Теорема Сарда. Рассмотрим гладкое отображение f: $M \to N$. Пусть $C = C(f) \subset M$ — множество таких $x \in M$, что дифференциал df_x: $T_x \to T_{f(x)}$ имеет ранг, меньший $n = \dim N$. Множество $C \subset M$ будем называть *множеством критических точек* отображения f, $f(C)$ — *множеством критических значений* отображения f.

Напомним определение множества меры нуль. Говорят, что множество $B \subset \mathbb{R}^n$ имеет (n-мерную) меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ множество B можно покрыть счетным числом n-мерных кубов таких, что их суммарный объем меньше ε. Из курса анализа известно, что дополнение $\mathbb{R}^n \setminus B$ — всюду плотное множество в $\mathbb{R}^n$. Это определение распространяется на подмножества n-мерных многообразий: множество $B \subset N$ имеет меру нуль, если для любого координатного отображения φ: $U \to \mathbb{R}^n$, где U — открытое множество в N, образ $\varphi(U \cap B)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2 (Сард). *Пусть f: $M \to N$ — гладкое (класса C^∞) отображение гладкого многообразия M в гладкое многообразие N. Тогда множество критических значений $f(C)$ имеет меру нуль в N.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать эту теорему в следующей формулировке: пусть f: $U \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, где U — открытое множество в $\mathbb{R}^m$; тогда мера множества $f(C)$ равна нулю. Доказательство проведем индукцией по размерности m. При $m=0$ и при $n=0$ утверждение очевидно; поэтому будет считать, что $m, n \geqslant 1$.

Обозначим через C_i подмножество области U, составленное из таких x, что все частные производные от f порядка $\leqslant i$ равны нулю в точке x. Получаем убывающую последовательность замкнутых множеств: $C \supset C_1 \supset C_2 \ldots$

Лемма 1. *Мера множества $f(C \setminus C_1)$ равна нулю.*

Доказательство. Можно считать, что $n \geqslant 2$, так как $C = C_1$ при $n=1$. Нам потребуется следующий частный случай теоремы Фубини (доказательство см. в курсе анализа): множество $A \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ имеет n-мерную меру нуль, если оно пересекается с каждой гиперплоскостью $q \times \mathbb{R}^{n-1}$ $(q \in \mathbb{R}^1)$ по множеству $(n-1)$-мерной меры нуль.

Пусть $x' \in C \setminus C_1$. Мы укажем такую открытую окрестность $V \subset \mathbb{R}^m$, что множество $f(V \cap C)$ имеет меру нуль. Так как $C \setminus C_1$ можно покрыть счетным числом таких окрестностей, то отсюда получим, что и вся разность $C \setminus C_1$ имеет меру нуль.

Так как $x' \notin C_1$, то по крайней мере одна из частных производных, например $\dfrac{\partial f_1}{\partial x^1}$, отлична от нуля в точке x'. Определим отображение h: $U \to \mathbb{R}^m$ формулой $h(x) = (f_1(x), x_2, \ldots, x_m)$. Так как ранг g отображения dh_x равен m, то h — диффеоморфизм некоторой открытой окрестности $V = V(x') \subset U$ точки x' на некоторую открытую окрестность V' точки $h(x')$. Рассмотрим композицию $g = f \circ h^{-1}$: $V' \to \mathbb{R}^n$. Множество C' критических точек отображения g совпадает с $h(V \cap C)$, т. е. $g(C') = f(V \cap C)$ есть множество критических значений для g (рис. 62).

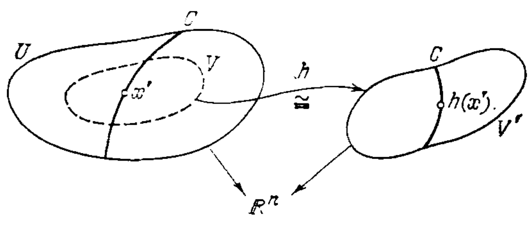

Рис. 62

Каждая точка $(t, x_2, \ldots, x_m) \in V'$ переходит при отображении g в точку $g(t, x_2, \ldots, x_m)$ гиперплоскости $t \times \mathbb{R}^{n-1}$. Отсюда получаем, что g переводит гиперплоскости в V' в гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$. (Впрочем, можно было бы не вводить диффеоморфизм h и работать непосредственно с криволинейными гиперповерхностями.)

Рассмотрим семейство гладких отображений g^t: $(t \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V' \to t \times \mathbb{R}^{n-1}$. Точка $\alpha \in t \times \mathbb{R}^{m-1}$ является критической точкой отображения g^t тогда и только тогда, когда α есть критическая точка отображения g. В самом деле,

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x^j}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ * & \dfrac{\partial g_i^t}{\partial x^j}\end{pmatrix}.$$

В силу предположения индукции мера множества критических значений отображения g^t имеет меру нуль в $t\times\mathbb{R}^{n-1}$. Следовательно, мера пересечения $g(C')\cap(t\times\mathbb{R}^{n-1})$ равна нулю при всех t, и из теоремы Фубини следует, что $g(C')$ имеет меру нуль, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Мера множества $C_i\backslash C_{i+1}$ равна нулю при $i\geqslant 1$.*

Доказательство. Рассуждения частично аналогичны схеме доказательства леммы 1. Пусть $x'\in C_i\backslash C_{i+1}$, т. е. в этой точке все частные производные координатных функций отображения f порядка $\leqslant i$ равны нулю и существует набор индексов r; $s_1, s_2, \ldots$ $\ldots, s_{i+1}$ такой, что $\dfrac{\partial^{i+1}f_r}{\partial x_{s_1}\ldots\partial x_{s_{i+1}}}\neq 0$ в точке x'. Обозначим через W функцию $\dfrac{\partial^i f_r}{\partial x_{s_2}\ldots\partial x_{s_{i+1}}}$. Тогда

$$W(x')=0;\quad \left.\frac{\partial W}{\partial x_{s_1}}\right|_{x'}\neq 0.$$

Можно считать, что $s_1=1$. Определим отображение $h\colon U\to\mathbb{R}^m$ формулой $h(x)=(W(x), x_2, \ldots, x_n)$. Тогда h — диффеоморфизм некоторой окрестности V точки x на некоторое открытое множество $V'\subset\mathbb{R}^m$. Рассмотрим образ множества $C_i\cap V$ при отображении h. Так как в качестве координаты $W(x)$ взята одна из производных i-го порядка, то множество $h(C_i\cap V)$, в точках которого все такие производные равны нулю, содержится в гиперплоскости $W(x)=0$. Итак, h отображает $C_i\cap V$ в $0\times\mathbb{R}^{m-1}$.

Как и в лемме 1, рассмотрим композицию $g=f\circ h^{-1}\colon V'\to\mathbb{R}$ и ее ограничение $g'\colon(0\times\mathbb{R}^{m-1})\cap V'\to\mathbb{R}^n$. В силу предположения индукции мера множества критических значений для g' равна нулю. Далее, любая точка множества $h(C_i\cap V)$ является критической для g', так как в этих точках все производные порядка $\leqslant i$ равны нулю (в частности, ранг f меньше n). Итак, мера множества $g'\circ h(C_i\cap V)=f(C_i\cap V)$ равна нулю в $\mathbb{R}^n$. Покрывая $C_i\backslash C_{i+1}$ счетным числом таких окрестностей V, мы и получаем утверждение леммы.

Второй шаг отличался от первого шага тем, что в лемме 1 мы не могли, вообще говоря, поместить множество C в гиперплоскость $0\times\mathbb{R}^{m-1}$, так как определение множества C как множества, где ранг f меньше n, не позволяет выделить никакой гиперплоскости, как в лемме 2.

Лемма 3. *Мера множества $f(C_k)$ равна нулю при достаточно большом k.*

Доказательство. Покроем C_k счетным числом кубов с ребром δ, где δ достаточно мало. Возьмем один из этих кубов $I^m\subset U$ и покажем, что мера множества $f(C_k\cap I^m)$ равна нулю. Из определения C_k и формулы Тейлора получаем: $f(x+h)=f(x)+R(x, h)$, где $\|R(x, h)\|\leqslant\alpha\cdot\|h\|^{k+1}$; $x\in C_k$, $x+h\in I^m$. Постоянная α зависит только от f и I^m. Разделим I^m на r^m кубов с ребром δ/r. Обозначим через I_1 куб разбиения, содержащий точку $x\in C_k$. Любая точка куба I_1 имеет вид $x+h$, где $\|h\|\leqslant\sqrt{m}\cdot(\delta/r)$. Следовательно, $f(I_1)$ лежит в кубе с ребром a/r^{k+1} с центром в точке $f(x)$, где $a=2\alpha(\sqrt{m}\delta)^{k+1}$. Тогда $f(C_k\cap I^m)$ содержится в объединении r^m кубов разбиения, имеющих суммарный объем $\leqslant r^m(a/r^{k+1})^n=a^n r^{m-n(k+1)}$. Если $k+1>m/n$, то этот объем стремится к нулю при $r\to\infty$. Лемма доказана.

Сопоставляя леммы 1, 2, 3, мы получаем утверждение теоремы Сарда.

Следствие 1. *Множество $N\setminus f(C)$ (где f: $M\to N$ — гладкое отображение, а C — множество критических точек) всюду плотно в N.*

Следствие 2. *Если f: $M\to N$ — гладкое отображение и $\dim M<\dim N$, то мера множества $f(M)$ равна нулю в N. В частности, образ $f(M)$ не заполняет все N.*

Ниже мы применим теорему Сарда к доказательству теорем Уитни о вложении и погружении гладких многообразий.

Определение 1. Точку $x\in M$ назовем *регулярной* для гладкого отображения f: $M\to N$, если она не является критической, т. е. если ранг отображения df_x равен $n=\dim N$. Точку $g\in N$ назовем *правильным* (*регулярным*) значением гладкого отображения f: $M\in N$, если все ее прообразы — регулярные точки в M (если $f^{-1}(y)=\varnothing$, то точка y также является правильным значением). Если y есть правильное значение отображения f, то само отображение f называют *правильным по отношению к точке y*.

Таким образом, дополнение в M к множеству регулярных точек совпадает с множеством критических точек отображения f, а дополнение в N к множеству правильных значений совпадает с множеством критических значений отображения f.

Напомним, что если f: $M\to N$ — гладкое отображение и $y\in N$ — правильное значение, то $f^{-1}(y)$ — гладкое подмногообразие в M (это следует из теоремы о неявной функции).

Для дальнейшего нам будет полезно следующее утверждение, которое легко выводится из теоремы Сарда.

Следствие. *Множество гладких отображений $f: M \to N$, для которых $y \in N$ — правильное значение, всюду плотно в пространстве всех гладких отображений.*

Доказательство. Надо доказать, что сколь угодно близко от отображения f найдется гладкое отображение $g: M \to N$, для которого $y \in N$ — правильное значение. В силу теремы Сарда множество регулярных значений отображения $f: M \to N$ всюду плотно в N, т. е. в любой открытой окрестности $U \subset N$ точки y найдется регулярное значение y' для f. Предположим, что U диффеоморфно диску D^n, и рассмотрим координатное отображение $\varphi: U \to D^n$; положим $z = \varphi(y)$, $z' = \varphi(y')$. Тогда существует диффеоморфизм $h: D^n \to D^n$, тождественный вблизи границы диска и такой, что $h(z') = z$ и $|h(t) - t| < \varepsilon = \rho(z, z')$ при $t \in D^n$. Построим, далее, соответствующий диффеоморфизм $h': N \to N$ и положим $g = h' \circ f$; очевидно, y — регулярное значение для g.

Для дальнейшего нам потребуется несколько более сильное утверждение, чем предыдущее следствие. А именно: построенный выше диффеоморфизм $h': N \to N$ можно выбрать таким образом, что отображение $g = h' \circ f$ будет близко к f не только в прежнем смысле (т. е. $\rho(f, g) = \max |f(x) - g(x)| < \varepsilon$), но и будет близко к f вместе со всеми первыми производными. Доказательство существования такого диффеоморфизма оставляем читателю в качестве упражнения.

3. Трансверсальная регулярность. Перейдем к изучению важного понятия t-регулярности (трансверсальной регулярности).

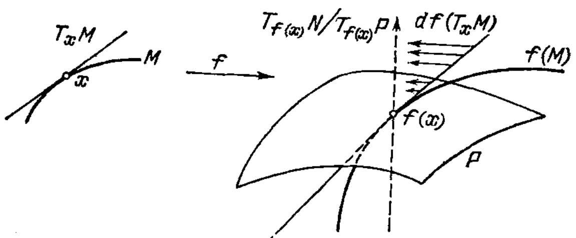

Рис. 63.

Определение 2. Пусть $P \subset N$ — гладкое подмногообразие коразмерности k (коразмерность по определению есть $\dim N - \dim P$) гладкого многообразия N и $f: M \to N$ — гладкое отображение. Отображение f называется *трансверсально регулярным вдоль* P, если ранг отображения $df: T_x \to T_{f(x)}N/T_{f(x)}P$ равен k (ранг df равен k по модулю векторов, касательных к P). Иначе говоря, подпространства $df(T_x)$ и $T_{f(k)}P$ порождают все касательное пространство $T_{f(x)}N$; как говорят, «образ $f(M)$ трансверсален к P в точке $f(x)$» (рис. 63).

Отметим важное свойство t-регулярных отображений: полный прообраз $f^{-1}(P) \subset M$ является гладким подмногообразием в M той же коразмерности k, т. е. размерности $-n+(m+p)$, где $n=\dim N$, $m=\dim M$, $p=\dim P$. Доказательство следует из теоремы о неявной функции.

Теорема 3. *Пусть M, $N\supset P$ — гладкие многообразия. Тогда множество отображений g: $M\to N$, t-регулярных вдоль P, всюду плотно в пространстве всех гладких отображений f: $M\to N$, т. е. в любой окрестности произвольно гладкого отображения существует t-регулярное вдоль P отображение.*

Доказательство. Пусть дано отображение f: $M\to N$; требуется доказать, что сколь угодно близко от f найдется отображение g, t-регулярное вдоль P. Отметим сначала следующее утверждение, непосредственно вытекающее из определения t-регулярности.

Пусть f: $M\to N$ — гладкое отображение, $x\in M$; U — открытая окрестность точки x в M, V — открытая окрестность точки $f(x)$ в N; предположим, что отображение f: $U\to V$ t-регулярно вдоль $P\subset N(P\cap V\subset V)$; тогда это свойство выполнено и для гладких отображений, достаточно близких к f вместе со всеми первыми производными.

Из этого замечания следует, что утверждение теоремы достаточно доказать локально, т. е. достаточно рассмотреть случай $U=\mathbb{R}^m$, $V=\mathbb{R}^n$; $P=\mathbb{R}^p\subset\mathbb{R}^n$; тогда f можно записать в виде $f(x_1, \ldots, x_m)=(f_1(x), \ldots, f_p(x), f_{p+1}(x), \ldots, f_n(x))$. В этой записи t-регулярность f вдоль P эквивалентна утверждению, что для отображения α: $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{n-p}$, определяемого формулой $\alpha(x)=(f_{p+1}(x), \ldots, f_n(x))$, точка 0 является регулярным значением. По доказанному ранее множество отображений, для которых 0 есть регулярное значение, всюду плотно в пространстве всех гладких отображений, т. е. существуют гладкие функции $g_{p+1}, \ldots$ $\ldots, g_n$, задающие отображение α': $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{n-p}$, близкое к отображению α вместе со всеми первыми производными (см. следствие выше) и такое, что отображение

$$g(x_1, \ldots, x_m)=(f_1(x), \ldots, f_p(x), g_{p+1}(x), \ldots, g_n(x))$$

t-регулярно вдоль P. Если исходное отображение f: $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ было t-регулярно вдоль P около границы ∂V, то, взяв гладкую функцию

$$\varphi=\begin{cases}0 \text{ на } \partial V,\\ 1 \text{ на } K,\end{cases}$$

где $K\subset V$ — компактное множество, мы можем положить $\rho=f(1-\varphi)+\varphi\cdot g$. Ясно, что $\rho(x)$ t-регулярно вдоль P и $\rho(x)\equiv f(x)$ на ∂V; $\rho(x)\equiv g(x)$ на K. Здесь мы использовали то, что отображения f и g близки не только в том смысле, что $\rho(f, g)=\max\limits_{(x)}|f(x)-g(x)|<\varepsilon$, но близки также и все их первые производные. Эта близость обеспечивает t-регулярность отображения $f(1-\varphi)+\varphi g=f+\varphi(f-g)$ около границы V в силу малости самого возмущения $\varphi(f-g)$ и малости производных этого возмущения около границы V. Теорема доказана.

Понятие t-регулярности позволяет ввести важное понятие трансверсально пересекающихся подмногообразий. Пусть M и P — два гладких подмногообразия гладкого многообразия N. Будем говорить, что M и P *пересекаются трансверсально*, если включение i_M: $M\to N$ t-регулярно вдоль P. Это означает, что в каждой точке x пересечения $M\cap P$ касательные пространства T_xM и T_xP порождают все T_xN. Отношение трансверсальности пересечения симметрично, т. е. в приведенном выше определении можно было бы вместо i_M рассмотреть включение i_P: $P\to N$ (проверьте!).

Пересечение $M\cap P$ двух трансверсально пересекающихся подмногообразий является гладким подмногообразием.

Доказанная выше теорема Сарда (и следствие из нее) показывает, что трансверсально регулярных отображений настолько много, что их можно обнаружить в сколь угодно малой окрестности любого гладкого отображения; в этом смысле t-регулярные отображения «типичны». Теорема Сарда позволяет путем сколь угодно малых шевелений исходного отображения (в классе всех гладких отображений) привести его «*в общее положение*» (сделать t-регулярным). Теоремы такого сорта являются обоснованиями, как говорят, *приведения в общее положение.*

Замечание. В проведенных нами до сих пор конструкциях «малые шевеления» осуществлялись в классе всех гладких отображений. Однако иногда бывает полезно приводить отображение в общее положение только с помощью вариаций (шевелений) из довольно узкого класса. Полезна также следующая

Теорема 4. *Пусть A, M, N, P — гладкие многообразия, причем P — подмногообразие многообразия N, и пусть f: $A\times M\to N$ — гладкое отображение, t-регулярное вдоль P. Тогда множество всех точек $a\in A$, для которых $f_a=f(a, x)$: $M\to N$ t-регулярно вдоль P, всюду плотно в A.*

Замечание. Многообразие A можно рассматривать как «многообразие параметров», с помощью которых может осуществляться приведение исходного отображения $f(a_0, x)$: $M\to N$ в общее положение.

Доказательство теоремы 4. Пусть f: $A\times M\to N$ t-регулярно вдоль P; рассмотрим $Q=f^{-1}(P)\subset A\times M$. Если слой $a\times M$ пересекает Q трансверсально, то $T(A\times M)=T(Q)\oplus H$, где $H\subset T(a\times M)$ (рис. 64).

Отсюда следует, что df отображает H на плоскость, дополняющую $T(P)$ до $T(N)$ в $T(N)$, т. е. $f(a, *)$ t-регулярно вдоль P. Верно и обратное: если $f(a, *)$ t-регулярно вдоль P, то подмногообразия $a\times M$ и Q пересекаются трансверсально. Наконец, $a\times M$ пересекает Q трансверсально тогда и только тогда, когда при ограничении проекции p: $A \times M \to A$ на подмногообразие Q точка $a \in A$ является регулярным значением проекции p: $Q \to A$. В силу теоремы Сарда множество таких точек всюду плотно в A. Теорема доказана.

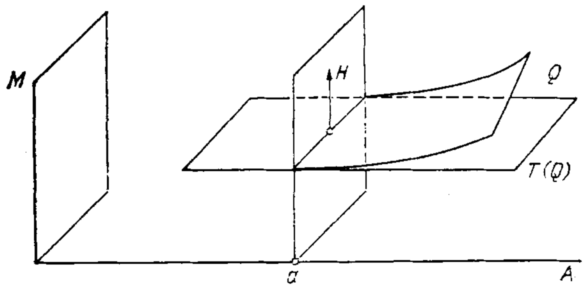

Рис. 64

Из теоремы 4 извлекаются полезные следствия. Пусть, например, f: $M \to N$ — гладкое отображение. Дадим новое описание множества регулярных значений для f в N. Рассмотрим отображение F: $M \times N \to N \times N$, где $F(x, y) = (f(x), y)$. Легко видеть, что $n \in N$ является регулярным значением для f тогда и только тогда, когда отображение $F(x, y)$: $M \times N \to N \times N$ t-регулярно вдоль диагонали $\Delta \subset N \times N$. Следовательно, в силу теоремы 4 множество регулярных значений $n \in N$ всюду плотно в N.

Замечание. Важный случай трансверсального пересечения — случай, когда подмногообразия M и P имеют в многообразии N дополнительные размерности, т. е. когда $m + p = n$, где $m = \dim M$, $p = \dim P$, $n = \dim N$. Тогда эти подмногообразия пересекаются по отдельным изолированным точкам. Если же $m + p < n$, то приведением подмногообразий M и P в общее положение можно добиться устранения их пересечений — «развести» M и P в N.

4. Функции Морса. Выше мы ввели для гладких отображений f: $M \to N$ важное понятие критических точек. Рассмотрим частный случай, когда $N = \mathbb{R}^1$ — вещественная прямая. В этом случае отображение f можно интерпретировать как гладкую скалярную функцию на M; так как $\dim T_{f(x)}\mathbb{R}^1 = 1$, то точка $x \in M$является критической (т. е. ранг df_x меньше 1) тогда и только тогда, когда $df_x = 0$. Критические точки x гладкой скалярной функции $f(x)$ на M находятся из системы уравнений $\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$, т. е. $\operatorname{grad} f(x) = 0$ (это было очевидно заранее).

Определение 3. Критическая точка $x_0 \in M$ гладкой функции $f(x)$ называется *невырожденной*, если матрица $\left(\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^i \partial x^j}\right)$ не вырождена. Функция f на многообразии M называется *функцией Морса*, если все ее критические точки не вырождены.

Замечание. Определение невырожденной критической точки корректно в том смысле, что свойство невырожденности матрицы билинейной формы $\left(\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^i \partial x^j}\right)$ (эта матрица называется *гессианом* функции f в точке x_0) не зависит от выбора локальной системы координат в окрестности критической точки x_0. Можно трактовать $d^2 f$ как симметричную билинейную форму на $T_x(M)$. Пусть $a, b \in T_{x_0}(M)$; включим векторы a и b в гладкие локальные (в окрестности точки x_0) векторные поля A и B соответственно и положим $d^2 f(a, b) = \partial_A \partial_B (f)_{x_0}$, где через $\partial_B(f)$ обозначена производная от f по направлению векторного поля B. Легко видеть, что форма $d^2 f$ симметрична и ее матрица относительно базиса $e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, e_m = \frac{\partial}{\partial x^m}$ в $T_{x_0}(M)$ имеет вид $\left(\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^i \partial x^j}\right)$.

Определение 4. *Индексом* невырожденной критической точки x_0 для функции f называется максимальная размерность подпространств $V \subset T_{x_0}(M)$, на которых гессиан $d^2 f$ отрицательно определен (т. е. число отрицательных квадратов после приведения $d^2 f$ к диагональному виду).

Возникает естественный вопрос: существуют ли на многообразии функции Морса и как много их? Например, будут ли они всюду плотны в пространстве всех гладких функций на многообразии M? Ответ на оба вопроса положительный; мы извлечем его из теоремы 5. Тем самым мы продемонстрируем, что существование и всюду плотность функций Морса является фактом «общего положения», т. е. эти функции «типичны» в пространстве всех гладких функций.

Теорема 5. 1) *На любом гладком компактном многообразии существуют функции Морса.* 2) *Функции Морса всюду плотны в пространстве всех гладких функций на многообразии.* 3) *Каждая функция Морса имеет на компактном многообразии только конечное число критических точек (в частности, все они изолированы) $x_1, \ldots, x_N$.* 4) *Существует всюду плотное подмножество R в множестве функций Морса такое, что у любой функции $f \in R$ каждому ее критическому значению отвечает только одна критическая точка на M (т. е. $f(x_i) \neq f(x_j)$, если $i \neq j$).*

Доказательство. Для компактного многообразия M изолированность (и, следовательно, конечность) невырожденных критических точек очевидна из определения невырожденности $d^2 f$ (см. выше). Рассмотрим теперь произвольную гладкую функцию f на M; докажем, что сколь угодно близко от f найдется функция Морса g (близость понимается в пространстве гладких функций на M). Для этого нужно рассмотреть «шевеления» (возмущения) функции f и обнаружить среди этих возмущенных функций функцию Морса.

Рассмотрим отображение α_f: $M \to T^*M$, определенное формулой $\alpha_f(x) = df_x$. Здесь через T^*M обозначено пространство кокасательного расслоения к многообразию M, т. е. $2m$-мерное гладкое многообразие, точками которого являются пары (x, ξ), где ξ — ковектор, т. е. $\xi \in T_x^* M$. Линейный функционал df_x: $T_x(M) \to \mathbb{R}^1$ принадлежит $T_x^*(M)$. Включим отображение α_f в s-параметрическое семейство отображений A, являющихся возмущениями отображения α_f. Для этого покроем M конечным числом открытых шаров $\{U_j\}$, $1 \leqslant j \leqslant k$, и каждый шар включим в больший шар V_j, так что $\overline{U}_j \subset V_j$. На каждом V_j построим набор из m линейных независимых функций $\left\{l_{V_j}^1(x), \ldots, l_{V_j}^m(x)\right\}$; например, в качестве таких функций можно взять локальные координаты на шаре V_j. Для каждой пары (V_j, U_j) построим гладкую функцию $\varphi_j(x)$ на M такую, что $\varphi_j(x) \equiv 1$ на $\overline{U}_j$, $\varphi_j(x) \equiv 0$ вне V_j и $0 \leqslant \varphi_j(x) \leqslant 1$ в $V_j \backslash U_j$ (существование таких функций нами доказано выше). Продолжим функции $l_{V_j}^i(x)$ гладко на все многообразие M, положив $\bar{l}_{V_j}^i(x) = l_{V_j}^i(x)\,\varphi_j(x)$. Рассмотрим линейное пространство A гладких функций на M следующего вида:

$$f(x) + \sum_{V_j, i} a_{V_j}^i \bar{l}_{V_j}^i(x)\,\varphi_j(x) = g(x, a).$$

Здесь $f(x)$ — исходная функция, $a_{V_j}^i$ — вещественные числа. Координатами в этом линейном пространстве A служат числа $a_{V_j}^i$, $1 \leqslant i \leqslant n$; $1 \leqslant j \leqslant n$. Ясно, что $\dim A = mk$, где k — число элементов открытого покрытия многообразия M. Рассмотрим отображение ψ: $A \times M \to T^*M$, положив $\psi(g, x) = dg_x \in T_x^* M$. Очевидно, что ψ — гладкое отображение. Выделим в многообразии T^*M m-мерное подмногообразие $P = \{(x, 0)\}$, $x \in M$, диффеоморфное M (так называемое «нулевое сечение кокасательного расслоения»). Мы утверждаем, что отображение ψ гладкого многообразия $A \times M$ t-регулярно вдоль P. Для доказательства достаточно убедиться в том, что при проекции π_x: $T_{(x,0)}(T^*M) \to T_x^* M$ образ плоскости $d\psi T_{(x,0)}(A \times M)$ эпиморфно накрывает T_x^*M (рис. 65). Но это очевидно из построения многообразия A: линейные возмущения $l(x)$ функции $f(x)$ накрывают своими градиентами всю плоскость T_x^*M, поскольку все они были выбраны линейно независимыми в каждом шаре V_j. В силу теоремы 4 свойством t-регулярности будут обладать тогда и почти все индивидуальные отображения $\psi(a_0, x)$: $M \to T^*M$ (при фиксированных a_0). Более того (см. теорему 4), отсюда следует, что сколь угодно близко к исходному отображению α_f: $M \to T^*M$ (имеющему вид $\alpha_f(x) =$

$=\psi(0, x)$ и соответствующему нулевым значениям параметров $\left\{a^i_{V_j}\right\}$) найдется отображение $\psi(g, x)=dg_x=\alpha_g(x)$, t-регулярное вдоль P (нулевого сечения T^*M). Итак, мы нашли функцию $g(x)$ на M (малое возмущение функции f с помощью линейных функций) такую, что α_g: $M\to T^*M$ t-регулярно вдоль P (рис. 66).

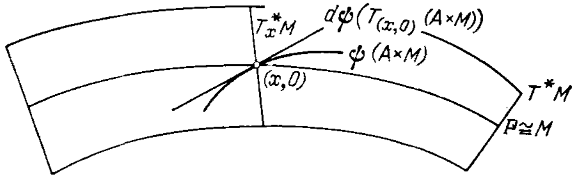

Рис. 65

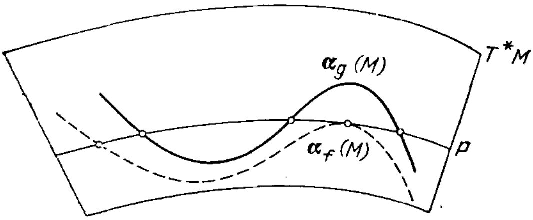

Рис. 66

Рассмотрим пересечение $a_g(M)\cap P$. Ясно, что оно состоит в точности из критических точек функции $g\,(dg_x\equiv 0)$. Далее, критическая точка $x_0\in M$ является невырожденной для функции $g(x)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_g(M)$ и P пересекаются трансверсально в этой точке $(x_0, 0)\in P$. В самом деле, условие трансверсальности P и $\alpha_g(M)$ в точке $(x_0, 0)$ означает, что проекция касательной плоскости к $\alpha_g(M)$ в точке $(x_0, 0)$ на плоскость $T^*_{x_0}M$ (трансверсальную к P в T^*M) является изоморфизмом и совпадает с гессианом функции g. Изоморфность этой проекции и невырожденность гессиана, таким образом, эквивалентны.

Итак, нами доказаны как существование, так и всюду плотность функций Морса. Осталось доказать всюду плотность таких функций Морса, у которых на каждом критическом уровне (т. е. на каждом прообразе критического значения) находится ровно одна критическая точка.

Рассмотрим произвольную функцию Морса $f(x)$ на M, и пусть $x_1, \ldots, x_N$ — ее критические точки. Предположим, что функция $f(x)$ на M принимает значения, лежащие между 0 и 1. Пусть U, W — две открытые окрестности точки x_1 такие, что $\overline{U}\subset W$, $\overline{W}$ компактно и что $x_i\notin\overline{W}$ при $i>1$. Построим на M гладкую функцию $\lambda(x)$ такую, что $\lambda\equiv 1$ на $\overline{U}$, $\lambda\equiv 0$ вне W и $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ на $W\backslash U$. Можно считать, что на M задана риманова метрика; выберем две постоянные a и b такие, чтобы на компактном множестве $\operatorname{supp}\lambda\cap\operatorname{supp}(1-\lambda)=K$ выполнялись неравенства $0\leqslant a\leqslant|\operatorname{grad} f|$, $|\operatorname{grad}\lambda|\leqslant b$. Возьмем положительное $\eta<a/b$, не равное ни одной из разностей $f(x_i)-f(x_1)$. Тогда $f_1=f+\eta\lambda$ есть функция Морса такая, что $f_1(x_i)\neq f_1(x_1)$, $i>1$, и критические точки у f и у f_1 одни и те же. В самом деле, на K выполнено соотношение

$$|\operatorname{grad}(f+\eta\lambda)|\geqslant|\operatorname{grad} f|-|\eta\operatorname{grad}\lambda|>a-\eta b>0.$$

Ясно, что $|\operatorname{grad}\lambda|=0$ вне K, т. е. там $|\operatorname{grad} f_1|=|\operatorname{grad} f|$; в окрестности U имеем $f_1=f+\eta$ (сдвиг на постоянную).

Продолжая это построение для всех критических точек, получаем доказательство последнего утверждения теоремы. Теорема доказана.

§ 11. Применения теоремы Сарда

1. Существование вложений и погружений. Выше мы доказали возможность вложения любого связного гладкого компактного замкнутого многообразия M в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, где N — достаточно большое число. Сейчас мы докажем так называемую «слабую теорему Уитни».

Теорема 1 (Уитни). *Любое связное гладкое замкнутое n-мерное многообразие M можно гладко вложить в $\mathbb{R}^{2n+1}$ и погрузить в $\mathbb{R}^{2n}$. Всякое непрерывное отображение $M\to\mathbb{R}^{2n+1}$ $(M\to\mathbb{R}^{2n})$ аппроксимируется гладким вложением (погружением).*

Доказательство. Рассмотрим любое гладкое вложение $M\to\mathbb{R}^N$ (см. § 9). Идея доказательства состоит в последовательном проектировании вложенного многообразия $M\subset\mathbb{R}^N$ на гиперплоскости; на каждом шаге будем понижать размерность объемлющего пространства на единицу. Фиксируем в $\mathbb{R}^N$ начало координат O и рассмотрим пучок прямых, проходящих через O; эти прямые составляют проективное пространство $\mathbb{R}P^{N-1}$. Каждой прямой $l\in\mathbb{R}P^{N-1}$ поставим в соответствие ортогональную проекцию π_l пространства $\mathbb{R}^n$ на гиперплоскость $\mathbb{R}_l^{N-1}$, ортогональную l и проходящую через O.

Наша цель: выбрать такую прямую l, чтобы проекция $\pi_l(M)$ по-прежнему оставалась гладким подмногообразием в $\mathbb{R}_l^{N-1}$. Выясним сначала вопрос о погружении M. Нас удовлетворит любая проекция вида π_l, для которой дифференциал $d\pi_l$: $T_xM\to\mathbb{R}_l^{N-1}$ ни при каком $x\in M$ не имеет ненулевого ядра. Те направления $l\in\mathbb{R}P^{N-1}$, для которых $d\pi_l$ имеет ненулевое ядро, назовем *запрещенными направлениями первого типа.* Например, при проекти-