цию $\lambda(x)$ такую, что $\lambda\equiv 1$ на $\overline{U}$, $\lambda\equiv 0$ вне W и $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ на $W\setminus U$. Можно считать, что на M задана риманова метрика; выберем две постоянные a и b такие, чтобы на компактном множестве $\operatorname{supp}\lambda\cap\operatorname{supp}(1-\lambda)=K$ выполнялись неравенства $0\leqslant a\leqslant|\operatorname{grad} f|$, $|\operatorname{grad}\lambda|\leqslant b$. Возьмем положительное $\eta<a/b$, не равное ни одной из разностей $f(x_i)-f(x_1)$. Тогда $f_1=f+\eta\lambda$ есть функция Морса такая, что $f_1(x_i)\neq f_1(x_1)$, $i>1$, и критические точки у f и у f_1 одни и те же. В самом деле, на K выполнено соотношение

$$|\operatorname{grad}(f+\eta\lambda)|\geqslant|\operatorname{grad} f|-|\eta\operatorname{grad}\lambda|>a-\eta b>0.$$

Ясно, что $|\operatorname{grad}\lambda|=0$ вне K, т. е. там $|\operatorname{grad} f_1|=|\operatorname{grad} f|$; в окрестности U имеем $f_1=f+\eta$ (сдвиг на постоянную).

Продолжая это построение для всех критических точек, получаем доказательство последнего утверждения теоремы. Теорема доказана.

§ 11. Применения теоремы Сарда

1. Существование вложений и погружений. Выше мы доказали возможность вложения любого связного гладкого компактного замкнутого многообразия M в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, где N — достаточно большое число. Сейчас мы докажем так называемую «слабую теорему Уитни».

Теорема 1 (Уитни). *Любое связное гладкое замкнутое n-мерное многообразие M можно гладко вложить в $\mathbb{R}^{2n+1}$ и погрузить в $\mathbb{R}^{2n}$. Всякое непрерывное отображение $M\to\mathbb{R}^{2n+1}$ $(M\to\mathbb{R}^{2n})$ аппроксимируется гладким вложением (погружением).*

Доказательство. Рассмотрим любое гладкое вложение $M\to\mathbb{R}^N$ (см. § 9). Идея доказательства состоит в последовательном проектировании вложенного многообразия $M\subset\mathbb{R}^N$ на гиперплоскости; на каждом шаге будем понижать размерность объемлющего пространства на единицу. Фиксируем в $\mathbb{R}^N$ начало координат O и рассмотрим пучок прямых, проходящих через O; эти прямые составляют проективное пространство $\mathbb{R}P^{N-1}$. Каждой прямой $l\in\mathbb{R}P^{N-1}$ поставим в соответствие ортогональную проекцию π_l пространства $\mathbb{R}^n$ на гиперплоскость $\mathbb{R}_l^{N-1}$, ортогональную l и проходящую через O.

Наша цель: выбрать такую прямую l, чтобы проекция $\pi_l(M)$ по-прежнему оставалась гладким подмногообразием в $\mathbb{R}_l^{N-1}$. Выясним сначала вопрос о погружении M. Нас удовлетворит любая проекция вида π_l, для которой дифференциал $d\pi_l\colon T_xM\to\mathbb{R}_l^{N-1}$ ни при каком $x\in M$ не имеет ненулевого ядра. Те направления $l\in\mathbb{R}P^{N-1}$, для которых $d\pi_l$ имеет ненулевое ядро, назовем *запрещенными направлениями первого типа*. Например, при проектировании гладкой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ на двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$ вдоль запрещенного направления возникает особенность, обычно называемая «*клювом*» (рис. 67).

Ясно, что запрещенными являются те и только те направления $l \in \mathbb{R}P^{N-1}$, для которых существует точка $x \in M$ такая, что $l \subset T_xM$ после подходящего параллельного переноса (рис. 68).

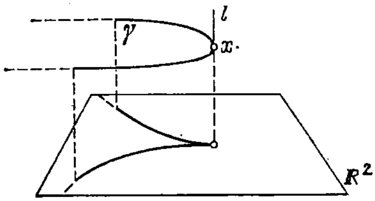

Рис. 67

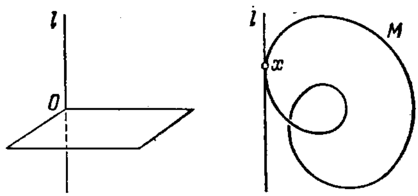

Рис. 68

Множество всех запрещенных направлений образует $(2n-1)$-мерное гладкое многообразие Q, точками которого являются пары (x, l), где $x \in M$, l — прямая $\left(\text{из } \mathbb{R}P^{N-1}\right)$, параллельная прямой, лежащей в T_xM. Точка $x \in M$ задается n параметрами, а прямая l задается $n-1$ параметром: $2n-1 = n+(n-1)$. (Докажите, что Q — гладкое многообразие!) Построим отображение $\alpha\colon Q \to \mathbb{R}P^{N-1}$ положив $\alpha(x, l) = l$. Очевидно, $\alpha(Q)$ и есть множество всех запрещенных направлений. Так как исходное вложение $M \subset \mathbb{R}^N$ гладко, то и отображение α гладко. В силу леммы Сарда $(N-1)$-мерная мера множества $\alpha(Q)$ равна нулю, если $N-1 > 2n-1$, т. е. $2n < N$. В частности, множество $\alpha(Q)$ всех запрещенных направлений в $\mathbb{R}P^{N-1}$ не покрывает все многообразие $\mathbb{R}P^{N-1}$ и существует $l_0 \notin \alpha(Q)$. Осуществив ортогональную проекцию $\pi_{l_0}\colon M \to \mathbb{R}^{N-1}_{l_0}$, получаем гладкое погружение M в $\mathbb{R}^{N-1}_{l_0}$ (если $2n < N$). Ясно, что это рассуждение пройдет и в случае, если с самого начала M было не вложено, а погружено в $\mathbb{R}^N$. Поэтому описанную процедуру проектирования можно применить и к полученному погружению $M \to \mathbb{R}^{N-1}$ и вообще продолжать до тех пор, пока $2n < N-k$, где число k указывает номер проектирования. Последним шагом будет тот, на котором $N-k = 2n+1$; тогда мы можем осуществить последнее проектирование $\pi_{l_0}\colon M \to \mathbb{R}^{2n}$, после чего процедура проектирования прекращается. Тем самым часть теоремы Уитни, относящаяся к возможности погружения M в $\mathbb{R}^{2n}$, доказана. Перейдем к вложениям.

Теперь нам нужно гарантировать отсутствие самопересечений у проекции $\pi_l(M)$ в $\mathbb{R}^{N-1}_l$. Рассмотрим *запрещенные направления второго типа*, проекция вдоль которых порождает самопересечения $\pi_l(M)$ в $\mathbb{R}_l^{N-1}$. Например, при проектировании гладкой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ на двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$, вдоль такого запрещенного направления возникает ситуация, показанная на рис. 69.

Ясно, что запрещенными направлениями второго типа являются те и только те направления $l \in \mathbb{R}P^{N-1}$, для которых существует пара точек x, $y \in M$, $x \neq y$, одновременно принадлежащих прямой l после подходящего параллельного переноса.

Множество всех запрещенных направлений второго типа образует $2n$-мерное гладкое открытое многообразие P, точками которого являются пары (x, y), x, $y \in M$, $x \neq y$; x и y независимо друг от друга пробегают M. Иными словами, $P = (M \times M) \setminus \Delta$, где $\Delta = \{(x, x)\}$ — диагональ в прямом произведении $M \times M$. Рассмотрим отображение β: $P \to \mathbb{R}P^{N-1}$, где $\beta(x, y)$ есть прямая, проходящая через начало координат и параллельная отрезку с концами x, y. Ясно, что β — гладкое отображение и, следовательно, по лемме Сарда множество $\beta(P)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}P^{N-1}$, если $2n < N - 1$, т. е. $2n + 1 < N$.

Заметим, что замыкание множества $\beta(P)$ в $\mathbb{R}P^{N-1}$ совпадает с объединением $\beta(P) \cup \alpha(Q)$.

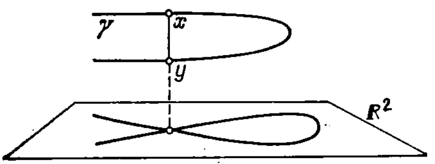

Рис. 69

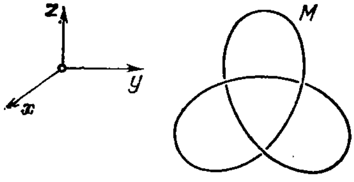

Рис. 70

Итак, множество $\overline{\beta(P)}$ всех запрещенных направлений как первого, так и второго типов не покрывает все многообразие $\mathbb{R}P^{N-1}$, если $N > 2n + 1$, и существует $l_0 \neq \overline{\beta(P)}$. Осуществив ортогональное проектирование π_{l_0}: $M \to \mathbb{R}_{l_0}^{N-1}$, получаем гладкое вложение M в $\mathbb{R}_{l_0}^{N-1}$. К этому вложению применяем такую же процедуру и т. д. Последним из таких последовательных проектирований будет проекция M в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Теорема доказана полностью.

Ясно, что в общем случае дальнейшее проектирование (с сохранением вложения) невозможно. Действительно, пусть окружность $M = S^1$ вложена в $\mathbb{R}^3$, образуя в $\mathbb{R}^3$ нетривиальный узел (см., например, рис. 70). Здесь $n = 1$, $N = 3 = 2n + 1$. Очевидно, что ортогональное проектирование этой заузленной окружности на любую двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$ будет давать кривую с самопересечениями. Это указывает на то, что использованный при доказательстве «слабой» теоремы Уитни «метод проекций» не позволяет продвинуться дальше по пути уменьшения размерности объемлющего евклидова пространства. Тем не менее оказывается, что использование более тонкой методики позволяет улучшить полученные нами выше оценки (мы не будем здесь излагать эту более тонкую методику).

Замечание. Известна более сложная теорема (мы ее не доказываем), что любое n-мерное многообразие M можно гладко вложить в $\mathbb{R}^{2n}$, но вложения $M \to \mathbb{R}^{2n}$ уже не плотны в пространстве отображений $M \to \mathbb{R}^{2n}$. В общем случае эта оценка уже неулучшаема. Так, например, замкнутое двумерное неориентируемое многообразие нельзя вложить в $\mathbb{R}^3$ (докажите!).

В некоторых частных случаях эти оценки можно улучшить. Так, например, любое двумерное ориентируемое многообразие реализуется в $\mathbb{R}^3$, что следует из классификации таких многообразий.

2. Построение функций Морса как функций высоты. Покажем теперь, как с помощью вложения $M \to \mathbb{R}^N$ можно дать новое доказательство существования функций Морса на гладких компактных многообразиях. Мы докажем, что функции Морса могут быть обнаружены среди довольно узкого класса функций на многообразии M, так называемых «функций высоты».

Если многообразие M гладко вложено в $\mathbb{R}^N$ и если задана прямая $\xi_l(t)$, идущая в направлении вектора l через начало координат в $\mathbb{R}^N$, то значение функции $h_l(x)$ (*функции высоты*) в точке $x \in M$ положим равным ортогональной проекции точки x на прямую $\xi_l(t)$ (мы считаем эту прямую числовой вещественной прямой).

Следующие свойства функции высоты $h_l(x)$ очевидны (проверьте их!):

1) множество функций высоты находится во взаимно однозначном соответствии с парами диаметрально противоположных точек сферы S^{N-1} или с точками проективного пространства $\mathbb{R}P^{N-1}$;

2) точка $x_0 \in M$ является критической точкой для функции высоты $h_l(x)$ тогда и только тогда, когда вектор l ортогонален подмногообразию M в точке x_0 (т. е. $l \perp T_{x_0}M$).

Выясним, когда критическая точка $x_0 \in M$ для функции $h_l(x)$ является невырожденной. Рассмотрим частный случай: когда многообразие M вложено в $\mathbb{R}^{m+1}$, где $m = \dim M$ (как гиперповерхность).

Напомним, что для гиперповерхностей $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ определено гауссово отображение r: $M \to S^m \to \mathbb{R}P^m$; а именно: $r(x) = n(x)$, где $n(x) \perp T_xM$ — единичный вектор нормали к M в точке x (вектор $n(x)$ перенесен параллельно в начало координат $0 \in \mathbb{R}^{m+1}$).

Лемма 1. *Точка $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ является невырожденной критической точкой для функции высоты $h_l(x)$ тогда и только* *тогда, когда она является регулярной точкой для гауссова отображения* $r\colon M \to \mathbb{R}P^m$; *здесь* $l \perp T_{x_0}M$.

Доказательство. Направим вдоль вектора l координатную ось x^{m+1}, а координаты $x^1, \ldots, x^m$ направим ортогонально к l; тогда плоскость $\mathbb{R}^m$ $(x^1, \ldots, x^m)$ можно считать касательной плоскостью к M в точке x_0. Около точки $x_0 \in M$ многообразие M можно задать уравнением $x^{m+1} = \varphi(x^1, \ldots, x^m)$, причем $d\varphi|_{x_0} = 0$. В достаточно малой области U около точки x_0 можно считать, что $x^1, \ldots, x^m$ — локальные координаты на гиперповерхности M, а «высота» $h_l(x)$ — это и есть функция $x^{m+1} = \varphi(x^1, \ldots, x^m)$. Аналогичные координаты $y^1, \ldots, y^m$ выберем на сфере в окрестности точки l. Повторяя вычисления, сделанные нами ранее при выводе формулы $Kd\sigma = f^*\Omega$, получаем, что в локальных координатах $x^1, \ldots, x^m$ и $y^1, \ldots, y^m$ в точке x_0 выполнено равенство

$$\left(\frac{\partial^2 h_l(x_0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right) = \left(\frac{\partial^2 \varphi(x_0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right) = \left(\left.\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right|_{x_0}\right), \qquad \det\left(\frac{\partial^2 h_l(x_0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right) = K.$$

Здесь K — гауссова кривизна гиперповерхности в точке x_0, $y^\alpha = r^\alpha(x^1, \ldots, x^m)$, $1 \leqslant \alpha \leqslant m$, — гауссово отображение, записанное в локальных координатах (x) и (y). Итак, условие регулярности гауссова отображения r в точке x_0, $\det\left(\left.\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right|_{x_0}\right) \neq 0$, в точности эквивалентно невырожденности гессиана функции высоты $h_l(x_0)$, $\det\left(\frac{\partial^2 h_l(x_0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right) \neq 0$. Лемма доказана.

Важное замечание. Если имеется вложение $M \subset \mathbb{R}^q$, где $q > m+1$ $(m = \dim M)$, то тогда можно определить $(q-1)$-мерное гладкое многообразие N — «границу трубчатой окрестности» подмногообразия M. Для этого нужно рассмотреть множество $(q-m)$-мерных дисков D_x^{q-m}, ортогональных подмногообразию M, имеющих центры в точках $x \in M$ и имеющих радиус $\varepsilon > 0$ (где ε достаточно мало). Объединение этих шаров (при малом $\varepsilon > 0$) дает q-мерное многообразие (называемое иногда трубчатой окрестностью подмногообразия M), граница (край) которого и обозначается через N. Это подмногообразие (вложенное в $\mathbb{R}^q$, если ε мало) отображается гауссовым отображением r в сферу S^{q-1}. Пусть $h_l(x)$ — функция высоты на M и N. Легко усмотреть (проверьте!), что каждая критическая точка $x_0 \in M$ для функции $h_l(x)$ порождает ровно две критические точки y_0 и y_0' на N, являющиеся двумя точками пересечения прямой l, проходящей через x_0 ортогонально многообразию M (рис. 71).

Далее, можно проверить, что критическая точка $x_0 \in M$ для функции $h_l(x)$ является невырожденной тогда и только тогда, когда точки y_0, y'_0 не вырождены для $h_l(x)$ (y_0 и y'_0 всегда одновременно вырождены или не вырождены). Таким образом, если $h_l(x)$ — функция Морса на N, то эта же функция является функцией Морса и на M. Отсюда следует, что все утверждения относительно существования и всюду плотности функций Морса среди множества функций высоты, доказанные для N, автоматически переносятся на многообразие M. Таким образом, то, что в доказанной выше лемме мы ограничились рассмотрением гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$, не ограничивает общности наших рассуждений.

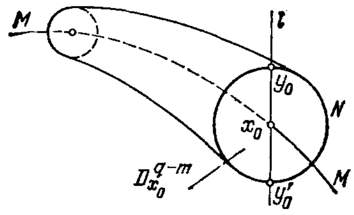

Рис. 71

Теорема 2. *Функция высоты $h_l(x)$ на гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$, $m = \dim M$, является функцией Морса тогда и только тогда, когда точка $(\pm l) \in \mathbb{R}P^m$ является регулярным значением для гауссова отображения r: $M \to \mathbb{R}P^m$. В частности, почти все функции высоты $h_l(x)$ являются функциями Морса.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из леммы 1. Второе утверждение следует из теоремы Сарда, так как регулярные значения гауссова отображения r: $M \to \mathbb{R}P^m$ всюду плотны в $\mathbb{R}P^m$ Теорема доказана.

Замечание. В силу сделанных выше дополнений для случая $M \subset \mathbb{R}^q$, $q > m+1$, теорема автоматически переносится на случай любого гладкого подмногообразия в $\mathbb{R}^q$ произвольной коразмерности (т. е. с любым $q - m > 0$).

3. Фокальные точки. Существуют и другие способы строить богатый запас весьма просто конструируемых функций Морса на гладких многообразиях. Не вдаваясь в подробности, опишем один такой способ.

Рассмотрим гладкое многообразие M и произвольное гладкое его вложение в $\mathbb{R}^q$. Фиксируем произвольную точку $p \in \mathbb{R}^q$ и свяжем с ней гладкую функцию L_p на вложенном подмногообразии M^m, положив $L_p(x) = |p - x|^2$, где $x \in M$, $|p - x|$ — длина вектора $p - x$. Можно доказать, что почти для всех точек $p \in \mathbb{R}^q$ функция $L_p(x)$ является функцией Морса на M. Множество функций вида $L_p(x)$ не совпадает с множеством функций высоты $h_l(x)$.

Выясним, при каких p функция $L_p(x)$ будет функцией Морса. Для этого мы обозначим через N совокупность пар (x, v), где $x \in M$ и $v \in \mathbb{R}^q$ — вектор, ортогональный M в точке x. Очевидно, N есть гладкое q-мерное многообразие (проверьте!). Рассмотрим гладкое отображение f: $N \to \mathbb{R}^q$, относящее паре $(x, v) \in N$ конец вектора v, отложенного из точки x.

Определение 1. Точка $p \in \mathbb{R}^q$ называется *фокальной точкой кратности* $\mu > 0$ для M, если $p = f(x, v)$ и якобиан отображения f в точке (x, v) имеет ранг $q - \mu$.

В силу теоремы Сарда почти все точки $p \in \mathbb{R}^q$ не являются фокальными точками для вложения $M \subset \mathbb{R}^q$; в частности, мера множества фокальных точек $p \in \mathbb{R}^q$ равна нулю.

Рассмотрим теперь «вторую квадратичную форму вложения $M \subset \mathbb{R}^q$». Будем считать, что многообразие M (локально) задано в $\mathbb{R}^q$ параметрически: $x = x(u^1, \ldots, u^m)$, где u^α, $1 \leqslant \alpha \leqslant m$,— локальные координаты на M, $x = (x^1, \ldots, x^q)$. Рассмотрим вектор $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} = x_{ij}$, и пусть v — нормаль к M в точке $x \in M$. Тогда можно составить скалярное произведение $\langle v, x_{ij} \rangle = \langle v, n_{ij}(x) \rangle$, где $n_{ij}(x)$ — нормальная компонента вектора x_{ij} в точке x (т. е. ортогональная проекция вектора x_{ij} на плоскость, нормальную к M в точке x). Обозначим через Q_v матрицу $\langle v, x_{ij} \rangle$; ее называют матрицей второй квадратичной формы многообразия M вдоль вектора v. Пусть $G = (g_{ij})$ — матрица первой квадратичной формы, т. е. метрика на M (эта метрика индуцирована вложением $M \subset \mathbb{R}^q$; в $\mathbb{R}^q$ рассматривается евклидова метрика). Можно считать, что локальные координаты $u^1, \ldots, u^m$ выбраны так, что $G(x) = E$ (единичная матрица) в некоторой точке x. Тогда в точке x имеем $G^{-1}Q_v = Q_v$; пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — собственные значения формы $G^{-1}Q_v = Q_v$ в точке x, т. е. λ_α — «главные кривизны» подмногообразия M вдоль направления v. Рассмотрим прямую, задаваемую уравнением $x + tv$ (т. е. прямую, определяемую вектором v в точке x).

Лемма 2. *Фокальными точками на прямой $x + tv$ являются те и только те точки, для которых $t = \lambda_i^{-1}$, $1 \leqslant i \leqslant m$.*

Доказательство. Локально N устроено как произведение $M \times \mathbb{R}^{q-m}$; поэтому на N можно ввести локальные координаты $x = x(u^1, \ldots, u^m)$, $t^1, \ldots, t^{q-m}$. Отображение f вблизи рассматриваемой точки устроено так: $f(x(u), t) = x(u) + \sum\limits_\alpha t^\alpha a_\alpha(u)$, где $\{a_\alpha(u)\}$ — репер в плоскости, нормальной к M в точке $x(u)$, гладко зависящий от u. Ясно, что df в этих координатах задается матрицей

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u^i} + \sum\limits_{\alpha=1}^{q-m} t^\alpha \dfrac{\partial a_\alpha(u)}{\partial u^i} \\ a_a(u) \end{pmatrix}.$$

В касательной плоскости $T_x(M)$ выберем базис $\left\{\dfrac{\partial x}{\partial u^\alpha}\right\}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant m$. Найдем параллелепипед, натянутый на образы базисных векторов (из N) после применения df. Тем самым мы вычислим якобиеву матрицу отображения f (т. е. $\det(df)$). Искомая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle + \sum_{\alpha=1}^{q-m} t^\alpha \left\langle \frac{\partial a_\alpha}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle & \sum_{\alpha=1}^{q-m} t^\alpha \left\langle \frac{\partial a_\alpha}{\partial u^i}, a_\beta \right\rangle \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Ясно, что ранг этой матрицы определяется рангом матрицы $A = \left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle + \sum_\alpha t^\alpha \left\langle \frac{\partial a_\alpha}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle \right)$. С другой стороны, $0 = \frac{\partial}{\partial u^i} \left\langle a_\alpha, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial a_\alpha}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle + \left\langle a_\alpha, \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} \right\rangle$, т. е. $A = \left(g_{ij} - \sum_\alpha t^\alpha \left\langle a_\alpha, \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} \right\rangle \right) = \left(g_{ij} - t \left\langle v, \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} \right\rangle \right)$. Таким образом, ранг матрицы (df) равен рангу матрицы $(g_{ij} - t\langle v, x_{ij}\rangle)$, что и требовалось. Лемма доказана.

Теперь рассмотрим точку $p \in \mathbb{R}^q$ и функцию $L_p(x) = |x-p|^2 = \langle x-p, \; x-p \rangle$. Тогда $\frac{\partial L_p(x)}{\partial u^i} = 2\left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, x \right\rangle - 2\left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, p \right\rangle = 2\left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, x-p \right\rangle$. Пусть $\left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, x-p \right\rangle = 0$; это эквивалентно тому, что вектор $x-p$ ортогонален $T_x(M)$. Далее,

$$\frac{\partial^2 L_p(x)}{\partial u^i \partial u^j} = \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}, \; x-p \right\rangle + \left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}, \; tv \right\rangle + g_{ij},$$

где $p = x + tv$. Таким образом, вырождение критической точки для функции $L_p(x)$ происходит тогда и только тогда, когда p — фокальная точка. Итак, если p — не фокальная точка, то $L_p(x)$ — функция Морса на $M \subset \mathbb{R}^q$.

Важное следствие. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^q$ — гладкое замкнутое подмногообразие. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что трубчатая окрестность $N_\varepsilon(M) = \{y \in \mathbb{R}^q \mid \rho(y, M) < \varepsilon\}$ является гладким q-мерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^q$ с краем $\partial N_\varepsilon(M)$, являющимся гладким $(q-1)$-мерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^q$. В частности, $N_\varepsilon(M)$ расслаивается на $(q-m)$-мерные диски $D_\varepsilon^{q-m}(x)$, $x \in M$, радиуса ε с центрами на M; аналогично многообразие $\partial N_\varepsilon(M)$ расслаивается на сферы $S_\varepsilon^{q-m-1}(x)$.*

Доказательство. Достаточно взять $\varepsilon < \min\limits_{i,x} \lambda_i^{-1}(x)$, где $x \in M$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда в $N_\varepsilon(M)$ нет фокальных точек многообразия $M \subset \mathbb{R}^q$ и, следовательно, все утверждения теоремы выполнены.

Это следствие обычно называется «теоремой о существовании трубчатой окрестности».