Глава 3

СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ. ИНДЕКС ПЕРЕСЕЧЕНИЯ. ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 12. Понятие гомотопии

1. Определение гомотопии. Аппроксимация отображений и гомотопий гладкими. Рассмотрим два гладких (пусть класса C^∞) многообразия N и M и гладкое отображение $f\colon N \to M$.

Определение 1. *Гладкой* (*кусочно гладкой*, *непрерывной*) *гомотопией* (или *деформацией*) отображения f называется гладкое (кусочно гладкое, непрерывное) отображение цилиндра

$$F\colon N \times I \to M \quad (I = [0, 1])$$

такое, что $F(x, 0) = f(x)$ при любом $x \in N$. Говорят, что отображения $f_t\colon N \to M$, $f_t(x) = F(x, t)$, *гомотопны* исходному отображению $f = f_0$, а все отображение цилиндра F есть *гомотопия* или «процесс гомотопии».

Всевозможные отображения, гомотопные данному отображению f, образуют класс попарно гомотопных отображений (или гомотопический класс отображений). Само собой разумеется, возможно определение классов гладкой гомотопии любой степени гладкости l. В частности, при $l = 0$ получим класс непрерывных и непрерывно гомотопных отображений. Однако, как мы сейчас увидим, из теоремы аппроксимации непрерывных отображений гладкими отображениями вытекают следующие элементарные свойства гомотопии:

1) всякое непрерывное отображение аппроксимируется близким и гомотопным ему гладким отображением любого класса гладкости (в частности, C^∞);

2) два гладких отображения гладко гомотопны, если они непрерывно гомотопны.

Перейдем к подробностям.

Теорема 1. *Пусть M, N — гладкие компактные многообразия; f, $g\colon M \to N$ — непрерывные отображения. Тогда для любой римановой метрики на многообразии N существует такое число $\varepsilon > 0$, что из условия $\rho(f, g) < \varepsilon$ (здесь ρ — расстояние между отображениями; см. выше) следует, что отображения f и g гомотопны.*

Доказательство. Предположим, что на M задана риманова метрика; через ρ_0 мы обозначаем соответствующее расстояние. Ввиду компактности N существует $\varepsilon > 0$ такое, что если $p, q \in N$ и $\rho_0(p, q) < \varepsilon$, то существует единственная кратчайшая геодезическая, соединяющая p и q (см. § 29 части I). Пусть теперь f, g: $M \to N$ — непрерывные отображения такие, что $\rho(f, g) < \varepsilon$. Построим гомотопию F: $M \times I \to N$ с $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$. Для этого нужно задать значение $F(x, t)$ для произвольной точки $(x, t) \in M \times I$. Рассмотрим точки $f(x)$, $g(x) \in N$. Так как $\rho_0(f(x), g(x)) < \varepsilon$, то их можно соединить единственной кратчайшей геодезической $\gamma_{f(x), g(x)}(\tau)$. Так как, кроме точки x, нам еще задано значение t, то отрезок геодезической $\gamma_{f(x), g(x)}$ от $f(x)$ до $g(x)$ можно разделить в отношении $t:(1-t)$, и получившуюся точку мы и отнесем точке $(x, t) \in M \times I$ (рис. 72).

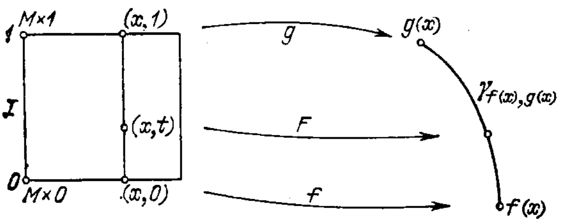

Рис. 72

Непрерывность построенного отображения $F(x, t)$ следует из теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных (для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, каковой является система уравнений для геодезических). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть f — произвольное непрерывное отображение гладкого многообразия M в гладкое многообразие N. Тогда f гомотопно гладкому отображению g: $M \to N$.*

Доказательство. Ранее мы доказали, что любое непрерывное отображение f: $M \to N$ может быть сколь угодно близко аппроксимировано гладким. Утверждение теоремы вытекает из предыдущей теоремы.

Задача. Докажите, что если отображение f уже является гладким на некотором подмногообразии $X \subset M$, то гомотопная ему гладкая аппроксимация g может быть выбрана так, что ограничения функций g и f на X совпадают.

Теорема 3. *Если гладкие отображения f, g: $M \to N$ непрерывно гомотопны, то они и гладко гомотопны.*

Эта теорема вытекает из существования гладкой аппроксимации для любого непрерывного отображения (в данном случае для исходной гомотопии F: $M \times I \to N$) и из предыдущих теорем этого пункта.

Аналогично доказывается следующее утверждение: *любое непрерывное отображение гладкого многообразия M в гладкое многообразие достаточно большого числа измерений гомотопно гладкому вложению. Если исходное отображение было гладким, то и гомотопия к вложению может быть сделана гладкой.*

Определение 2. Два гладких вложения f, g: $M \to N$ называются (гладко) *изотопными*, если существует гладкая гомотопия F: $M \times I \to N$ между отображениями f и g такая, что отображение f_t: $M \to N$, определенное по формуле $f_t(x) = F(x, t)$, является для каждого $t \in [0, 1]$ гладким вложением.

Теорема 4. *Любые два гладких вложения f, g гладкого многообразия M размерности n в евклидово пространство $\mathbb{R}^q$ достаточно большого числа измерений q (на самом деле $q \geqslant 2n+2$) изотопны.*

Доказательство. Если q достаточно велико, то вложения f и g можно связать непрерывной (а следовательно, и гладкой) гомотопией F: $M \times I \to \mathbb{R}^q$ (например, оба отображения f и g гомотопны отображению в точку). После этого гладкая гомотопия F: $M \times I \to N$ может быть превращена во вложение гладкой деформацией (деформация неподвижна на «основаниях» цилиндра $M \times 0$ и $M \times 1$). Это и дает искомую изотопию между f и g.

Доказанные теоремы позволят нам не делать различия между непрерывными и гладкими гомотопиями. В дальнейшем мы будем рассматривать классы непрерывной, кусочно гладкой или гладкой гомотопии класса C^∞ — той, которая в данном рассуждении более удобна.

Гомотопический класс отображения f обозначается через $[f]$; множество всех гомотопических классов отображений $N \to M$ обозначается через $[N; M]$.

2. Относительные гомотопии. В дальнейшем нам придется рассматривать гомотопии и гомотопические классы отображений, на которые наложены дополнительные ограничения. Приведем важнейшие из таких ограничений:

а) В многообразиях N и M отмечено по одной точке $x_0 \in N$ и $y_0 \in M$. Требуется, чтобы при всех отображениях f: $N \to M$ отмеченная точка x_0 переходила в точку y_0 (и при всех гомотопиях также). Такой класс отображений и гомотопий называется *связанным в точке*.

б) Многообразия N и M имеют края $\Gamma = \partial N$ и $\Delta = \partial M$. Требуется, чтобы при всех отображениях f: $N \to M$ и при их гомотопиях край Γ переходил в край Δ. Такой класс отображений называется *относительным* (относительно краев).

в) Многообразия N и M могут быть и некомпактны (открыты). Требуется, чтобы полный прообраз любой точки при отображении f: $N \to M$ был компактен. Это же требуется и для процессов гомотопии F: $N \times I \to M$. Такой класс отображений и гомотопий называется *собственным*.

г) Наиболее общий класс относительных отображений таков: пусть в N и M отмечено по множеству $A \subset N$ и $B \subset M$. Требуется, чтобы при всех отображениях f и гомотопиях F множество A отображалось в множество B. Совокупность соответствующих гомотопических классов обозначается $[(N, A);\ (M, B)]$.

§ 13. Степень отображения

1. Определение степени. Основной целью этого параграфа является изучение гомотопических классов отображений замкнутых ориентированных многообразий N и M одной размерности n, особенно в том случае, когда многообразие M является сферой. Рассмотрим гладкое отображение $f\colon N \to M$ и выберем точку $y_0 \in M$. Предположим, что отображение f является правильным по отношению к точке $y_0 \in M$. Это означает, что полный прообраз точки y_0 состоит из конечного числа точек x_i $(i = 1, \ldots, m)$ многообразия N с локальными координатами (x_i^β) около точек x_i и (y_0^α) около y_0, причем якобианы отображения $\det\left(\frac{\partial y_0^\alpha}{\partial x_i^\beta}\right)$ не равны нулю, $i = 1, \ldots, m$. Напомним, что в многообразиях N и M задана ориентация, т. е. все якобианы переходов от локальных координат одной окрестности к другой положительны.

Определение 1. *Степенью* гладкого отображения связных ориентированных замкнутых многообразий $f\colon N \to M$ в правильной точке по отношению к правильному значению $y_0 \in M$ называется число

$$\deg f = \sum_{f(x_i)=y_0} \operatorname{sgn} \det\left(\frac{\partial y_0^\alpha}{\partial x_i^\beta}\right)$$

(знаки якобианов отображений в точках x_i корректно определяются).

Имеет место важная

Теорема 1. *Степень отображения не зависит от выбора правильного значения y_0 и не меняется при гомотопиях.*

Доказательство. Сначала покажем, что степень не зависит от выбора правильного значения. Для близких к y_0 правильных значений это очевидно — прообразов столько же и знаки те же.

Пусть y_0 и y_1 — два правильных значения отображения f. Соединим эти точки y_0 и y_1 гладким несамопересекающимся путем в многообразии M с невырожденной касательной. Этот путь представляет собой одномерное многообразие γ. Согласно лемме о t-регулярности (см. § 10) путь γ можно выбрать таким образом, чтобы отображение f было t-регулярно на всем γ и правильно в концевых точках y_0, y_1. Рассмотрим полный прообраз $f^{-1}(\gamma)$,