г) Наиболее общий класс относительных отображений таков: пусть в N и M отмечено по множеству $A \subset N$ и $B \subset M$. Требуется, чтобы при всех отображениях f и гомотопиях F множество A отображалось в множество B. Совокупность соответствующих гомотопических классов обозначается $[(N, A);\ (M, B)]$.

§ 13. Степень отображения

1. Определение степени. Основной целью этого параграфа является изучение гомотопических классов отображений замкнутых ориентированных многообразий N и M одной размерности n, особенно в том случае, когда многообразие M является сферой. Рассмотрим гладкое отображение $f\colon N \to M$ и выберем точку $y_0 \in M$. Предположим, что отображение f является правильным по отношению к точке $y_0 \in M$. Это означает, что полный прообраз точки y_0 состоит из конечного числа точек x_i $(i = 1, \ldots, m)$ многообразия N с локальными координатами (x_i^β) около точек x_i и (y_0^α) около y_0, причем якобианы отображения $\det\left(\frac{\partial y_0^\alpha}{\partial x_i^\beta}\right)$ не равны нулю, $i = 1, \ldots, m$. Напомним, что в многообразиях N и M задана ориентация, т. е. все якобианы переходов от локальных координат одной окрестности к другой положительны.

Определение 1. *Степенью* гладкого отображения связных ориентированных замкнутых многообразий $f\colon N \to M$ в правильной точке по отношению к правильному значению $y_0 \in M$ называется число

$$\deg f = \sum_{f(x_i)=y_0} \operatorname{sgn} \det\left(\frac{\partial y_0^\alpha}{\partial x_i^\beta}\right)$$

(знаки якобианов отображений в точках x_i корректно определяются).

Имеет место важная

Теорема 1. *Степень отображения не зависит от выбора правильного значения y_0 и не меняется при гомотопиях.*

Доказательство. Сначала покажем, что степень не зависит от выбора правильного значения. Для близких к y_0 правильных значений это очевидно — прообразов столько же и знаки те же.

Пусть y_0 и y_1 — два правильных значения отображения f. Соединим эти точки y_0 и y_1 гладким несамопересекающимся путем в многообразии M с невырожденной касательной. Этот путь представляет собой одномерное многообразие γ. Согласно лемме о t-регулярности (см. § 10) путь γ можно выбрать таким образом, чтобы отображение f было t-регулярно на всем γ и правильно в концевых точках y_0, y_1. Рассмотрим полный прообраз $f^{-1}(\gamma)$, который в силу t-регулярности является гладким одномерным многообразием в N с краем, состоящим из двух частей: $f^{-1}(y_0)$ и $f^{-1}(y_1)$ (см. рис. 73 для $n=2$; точки (x_{i0}) — это прообраз $f^{-1}(y_0)$, а точки (x_{i1}) — прообраз $f^{-1}(y_1)$). (Около каждой точки на рис. 73 указан ее знак; обратите внимание, что у разных точек отрезка γ может быть разное число прообразов.) Поскольку у отрезка ровно две концевые точки, которые входят в край с противоположными знаками, мы непосредственно из рисунка усматриваем справедливость утверждения теоремы.

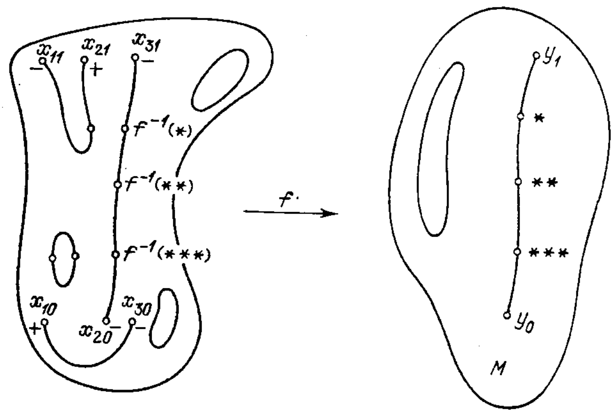

Рис. 73

Докажем теперь аналогичным образом утверждение теоремы об инвариантности степени относительно гомотопии отображения f. Пусть задана гладкая гомотопия F: $N\times I\to M$, где $f=F(x, 0)$. Можно считать, что весь процесс гомотопии — отображение F — правильно в точке y_0. Рассмотрим полный прообраз $F^{-1}(y_0)$ (см. рис. 74 для $n=1$; число прообразов точки y_0 для разных моментов t может быть различным, но алгебраическая сумма знаков постоянна).

Картинка здесь полностью аналогична рис. 73, так как $F^{-1}(y_0)$ есть одномерное неособое многообразие в $N\times I$ с двумя частями края, соответствующими $t=0$ (это — $f^{-1}(y_0)$) и $t=1$. Указанное в теореме целое число, очевидно, одинаково для $t=0$ и $t=1$. Теорема доказана.

2. Обобщения основного определения. Укажем полезные расширения определения степени:

А) Обобщение понятия степени отображения на класс относительных отображений между многообразиями с краем производится очевидным образом. Пусть задано отображение

$$f\colon (N, \partial N)\to(M, \partial M),$$

где M и N — компактные многообразия (с краем) одной размерности n. Так как край переходит в край, то полный прообраз внутреннего правильного значения $y_0 \in M$ лежит целиком во внутренней части N, и то же верно для ее прообраза при гомотопиях. Поэтому определена степень отображения $\deg f$, не зависящая от выбора правильного значения y_0 внутри M и не меняющаяся при гомотопиях в этом классе отображений,— доказательство этого факта копирует доказательство теоремы 1. Заметим, что края $\partial N = \Gamma$ и $\partial M = \Delta$ являются замкнутыми ориентированными многообразиями размерности $n-1$ (N и M ориентированы). Предположим, что края связны (в действительности это не очень существенно). Отображение f на краях также имеет степень $\deg f|_{\partial N}$. Имеет место

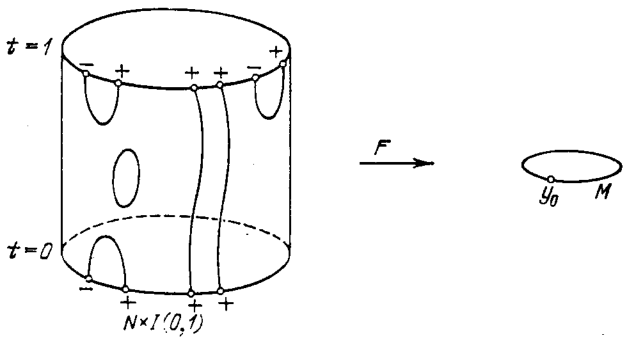

Рис. 74

Теорема 2. *Степень отображения края совпадает со степенью отображения самого многообразия*: $\deg f|_{\partial N} = \deg f$.

Доказательство. Прежде всего мы малой гладкой гомотопией изменим относительное отображение $f\colon N \to M$ таким образом, чтобы ни одна внутренняя точка из N не отображалась в точку края ∂M. Это делается так. Рассмотрим в малой ε-окрестности U_ε края ∂M нормальное единичное векторное поле $n(y)$, смотрящее внутрь многообразия M, и числовую C^∞-функцию $\varphi(y) \geqslant 0$ в той же ε-окрестности U_ε края ∂M, равную ε на крае ∂M, равную нулю на другом крае ε-окрестности и монотонно убывающую с удалением от края. Эту функцию φ мы продолжаем нулем на все M. Рассмотрим область $V = f^{-1}(U_\varepsilon) \subset N$. На V сосредоточена функция $\varphi^* = \varphi(f(x)) \geqslant 0$, причем максимум лежит на полном прообразе края. Определим другую C^∞-функцию $\psi(x) \geqslant 0$ на многообразии N, равную нулю на крае $\partial N = \Gamma$, равную единице за пределами малой δ-окрестности края и монотонно возрастающую с удалением от края.

Гомотопию отображения f мы определяем так: пусть образ точки $x \in N$ сдвинется по многообразию M от края по траекториям векторного поля $n(y)$ на расстояние $\psi(x)\varphi(f(x))$. Очевидно, точки края Γ не сдвинутся ($\psi(x) \equiv 0$) и точки вне V_ε также не сдвинутся ($\varphi(f(x)) \equiv 0$). Все остальные точки сдвинутся на положительное (но малое) расстояние.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Рассмотрим полный прообраз $f^{-1}(y_0)$ правильной точки отображения f, лежащей на крае ∂M. Весь этот полный прообраз содержится в крае ∂N. Заметим, что, сдвигая правильную точку внутрь многообразия N на достаточно малое расстояние, мы не изменим числа прообразов и их знаков (ориентации краев и многообразий согласованы) — все они изменятся непрерывно до прохода через вырождение. Поэтому числа $\deg f$ для края и для самого N совпадают. Теорема доказана.

Б) Второе расширение понятия степени отображения относится к классу собственных отображений. Очевидно, все определения и теорема 1 вместе с ее доказательством при этом полностью сохраняются.

В) Степень отображения определяется и в неориентируемом случае, но здесь знаки якобианов не имеют инвариантного смысла. Поэтому степень определяется только как вычет $\bmod 2$.

3. Гомотопическая классификация отображений многообразия в сферу. В том случае, когда многообразие M есть n-мерная сфера S^n, степень отображения является полным гомотопическим инвариантом. Имеет место

Теорема 3. *Два гладких отображения f, g: $N \to S^n$ замкнутого n-мерного ориентированного многообразия в n-мерную сферу гомотопны в том и только в том случае, если их степени совпадают.*

Доказательство. Сначала мы рассмотрим простой случай, когда имеется правильное значение $y_0 \in S^n$, числа прообразов которого при отображениях f и g точно равны степени $\deg f = \deg g$ (и равны друг другу). В этом случае гомотопию между f и g мы составим из следующих элементарных шагов:

Шаг 1. Деформируем отображение f так, чтобы прообразы $f^{-1}(y_0)$ и $g^{-1}(y_0)$ точно совпали.

Шаг 2. Так как знаки якобианов по условию все совпадают, деформируем f к отображению, дифференциал которого совпадает с дифференциалом отображения g в каждой точке полного прообраза $f^{-1}(y_0) = g^{-1}(y_0)$.

Шаг 3. Выберем малое $\varepsilon > 0$ и деформируем оба отображения f и g около всех прообразов точки y_0 так, чтобы в их ε-окрестностях по отношению к некоторым локальным системам координат отображения f и g стали линейными; при этом пусть образы ε-окрестностей диффеоморфно наложатся на сферу S^n, а их края перейдут в точку, противоположную точке y_0. Можно считать, что все дополнение к ε-окрестностям также переходит в эту точку, так как дополнение к точке y_0 в сфере S^n есть евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.

После этих деформаций отображения f и g совпадут.

Рассмотрим теперь общее отображение f, правильное в точке $y_0 \in S^n$. К этому отображению можно применить шаг 3 предыдущей деформации (хотя число прообразов больше степени $\deg f = m$). В результате мы приведем это отображение к каноническому виду: точка y_0 имеет $m+2q$ прообразов $x_1, \ldots, x_{m+2q}$; ε-окрестности этих прообразов линейно наворачиваются на сферу S^n, а дополнение этих окрестностей отображается в точку, противоположную y_0; знаки якобианов отображения f в точках $x_1, \ldots, x_m$ одинаковы, а знаки якобианов в точках x_{m+i}, x_{m+q+i} $(i=1, \ldots, q)$ противоположны. Построим отображение окрестности пути γ в $N^n \times I$ такое, что край переходит в точку y^* (рис. 75). Очевидно, это возможно ввиду знаков якобианов в точках (x_{m+i}, x_{m+q+i}). На ε-окрестностях остальных прообразов считаем гомотопию тождественной. Всю остальную часть многообразия $N^n \times I$ отправим в точку. Отображение F, уничтожающее пару прообразов, построено. Теорема доказана.

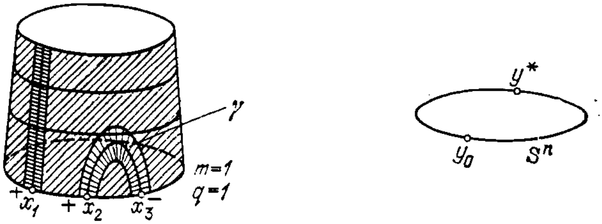

Рис. 75

Задача. Для отображений замкнутых неориентируемых n-мерных многообразий в сферу S^n определена степень по модулю 2. Докажите неориентируемый аналог теоремы 3.

Замечание. Построение гомотопии F при $n=1$ отличается от общего случая. Предлагаем читателю разобрать этот случай самостоятельно.

4. Простейшие примеры. Пример 1. Всякий многочлен степени n с вещественными коэффициентами задает собственное отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (так как уравнение $f(x)=c$ имеет не более n решений). Степень этого отображения равна 1, если n нечетно, и 0, если n четно (рис. 76 *а* и *б* соответственно). Отсюда следует, в частности, что многочлен нечетной степени всегда имеет вещественный корень: если имеется точка, прообраз которой пуст, то степень равна нулю.

Пример 2. Рассмотрим отображение $f\colon S^1 \to S^1$ окружности в окружность. Мы будем представлять себе окружность как прямую, у которой точки $x + 2\pi n$ склеены между собой при целых n. Аналогично отождествлены между собой все точки $y + 2\pi n$ в образе. Функция $y = f(x)$ задает отображение окружности в окружность, если для всякого x выполнено условие $f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi k$, где k — целое число. Из рассмотрения графика (см. рис. 77, на котором $k = 2$) видно, что $\deg f = k$.

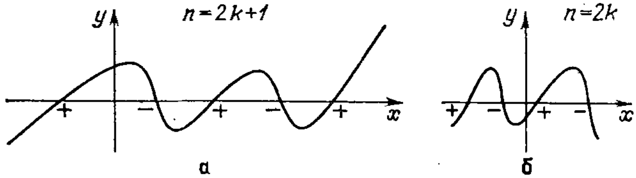

Рис. 76

Таким образом, для степени отображения получаем

$$k = \deg f = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{df}{dx}\right)dx.$$

Можно представлять себе окружность как кривую $|z| = 1$ в комплексной плоскости. Тогда всякое отображение $S^1 \to S^1$ гомотопно каноническому, имеющему вид $z \mapsto z^n$, где n — степень.

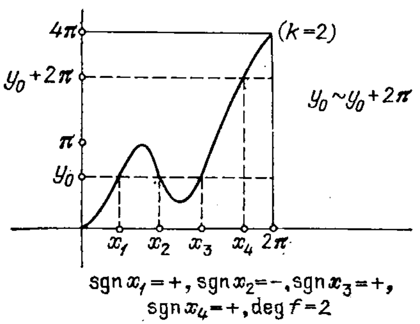

Рис. 77

Пример 3. Комплексный многочлен $w = f(z)$ степени n задает собственное отображение комплексной плоскости $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ или отображение между римановыми сферами $S^2 = \mathbb{C}P^1$,

$$f\colon S^2 \to S^2$$

(если добавить точку ∞). В частном случае, когда $f(z) = a_0 z^n$ $(a_0 \neq 0)$, это отображение, очевидно, имеет степень n. Заметим далее, что все многочлены степени n с ненулевым старшим членом задают гомотопные отображения. Гомотопия очевидна:

$$F(z, t) = a_0 z^n + (1 - t)[a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n],$$

где $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$; $0 \leqslant t \leqslant 1$. Очевидно, $F(z, 0) = f(z)$ и $F(z, 1) = a_0 z^n$, $a_0 \neq 0$.

Следствие 1 (теорема Гаусса). *Многочлен степени $n \neq 0$ имеет корень.*

Действительно, если уравнение $f(z)=0$ не имеет решений, то полный прообраз $f^{-1}(0)$ пуст и степень $\deg f=0$. Пришли к противоречию.

Проверьте, что степень рационального отображения $S^2 \to S^2$ равна максимуму степеней числителя и знаменателя.

Более общим примером является голоморфное (комплексно аналитическое) отображение между замкнутыми комплексными многообразиями

$$f\colon N \to M.$$

Имеет место простая

Теорема 4. *Если степень f равна q, то $q \geqslant 0$ и правильное значение $y_0 \in M$ отображения f имеет ровно q прообразов, причем знак якобиана для каждого прообраза положителен.*

Доказательство. Детерминант комплексного линейного отображения A всегда положителен (см. часть I, § 12):

$$\det_{\mathbb{R}} A = |\det_{\mathbb{C}} A|^2 \geqslant 0.$$

Применяя это к якобианам в прообразах регулярного значения y_0, получаем утверждение теоремы, так как по определению

$$\deg f = \sum_{i=1}^{q} \operatorname{sgn} \det_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial y_0^\alpha}{\partial x_i^\beta}\right)_{f(x_i)=y_0} = \sum_{i=1}^{q} (+1) = q.$$

Теорема доказана.

В рассмотренном выше примере 3 уравнение $f(z)=c$ имеет в общем случае ровно n решений — это видно из теоремы 4.

Другим примером голоморфного отображения является проекция римановой поверхности алгебраической n-значной функции на плоскость z, над которой определена эта n-значная функция (или на риманову сферу $S^2=\mathbb{C}P^1$). Здесь степень равна, очевидно, числу листов n.

Пример 4. Рассмотрим отображение f замкнутого n-мерного многообразия N в $\mathbb{R}^n$. Это отображение является, очевидно, собственным, как и любое отображение замкнутого многообразия N куда угодно. Поэтому определена степень f, и эта степень равна нулю. Для доказательства этого факта достаточно заметить, что в силу компактности N в $\mathbb{R}^n$ имеются точки y_0, полный прообраз $f^{-1}(y_0)$ которых пуст,— достаточно удаленные точки в $\mathbb{R}^n$.

Отсюда следует, что прообраз любой точки $y \in \mathbb{R}^n$, если она является правильным значением, состоит из четного числа точек.

Пример 5. Рассмотрим отображение между ориентированными многообразиями с краем $f\colon (N, \partial N) \to (M, \partial M)$, сужение которого на край является диффеоморфизмом: $\partial N \approx \partial M$; предположим также, что этот диффеоморфизм сохраняет ориентацию. В этом случае в силу теоремы 2 $\deg f = 1$. В частности, если задана замена координат $y = f(x)$ в области U в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\Gamma = \partial U$ и эта замена взаимно однозначна на границе, то f имеет степень 1 и внутри.

§ 14. Некоторые применения степени

1. Степень и интеграл. Изучим поведение интеграла от дифференциальной формы ранга n по n-мерному замкнутому ориентированному многообразию при отображениях конечной степени. Пусть f: $N \to M$ — гладкое отображение степени $q = \deg f$ и Ω — дифференциальная форма ранга $n = \dim M = \dim N$ на M, имеющая вид $\varphi_i(y)\, dy_i^1 \wedge \ldots \wedge dy_i^n$ в локальной системе координат (y_i^α) на M с номером i. Определены интегралы $\int_M \Omega$ по многообразию M от формы Ω, а также $\int_N f^*\Omega$ по многообразию N от формы $f^*\Omega$, имеющей (локально) вид

$$f^*\Omega = \varphi_i(f(x))\, dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^n \det\left(\frac{\partial y_i^\alpha}{\partial x_i^\beta}\right)$$

в области на N с координатами (x_j^α), точнее, в той ее части, которая попадает в область с координатами (y_i^α) при отображении f.

Теорема 1.

$$\int_N f^*\Omega = (\deg f) \int_M \Omega.$$

Доказательство. Рассмотрим область $U \subset M$, целиком состоящую из правильных значений отображения f и лежащую в достаточно малой окрестности правильного значения $y_0 \in M$. Полный прообраз $f^{-1}(y_0)$ состоит из конечного числа точек $x_1, \ldots, x_m$. Полный прообраз $f^{-1}(U)$ окрестности U точки y_0 есть объединение

$$f^{-1}(U) = U_1 \cup \ldots \cup U_m$$

непересекающихся множеств U_j с координатами (x_j^α), $j = 1, \ldots, m$; $\alpha = 1, \ldots, n$. Координаты в U обозначим через (y_0^α), $\alpha = 1, \ldots, n$. Все точки областей U_j регулярны, так как область U состоит лишь из правильных значений отображения f. В каждой области U_j отображение f взаимно однозначно:

$$y_0^\alpha = f_{(j)}^\alpha(x_j^1, \ldots, x_j^n).$$

По формуле замены переменных в кратком интеграле имеем

$$\int_{U_j} \varphi(y(x))\, dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^n = \operatorname{sgn}\det\left(\frac{\partial y_0^\alpha}{\partial x_j^\beta}\right) \int_U \varphi(y)\, dy_0^1 \wedge \ldots \wedge dy_0^n.$$