случае в силу теоремы 2 $\deg f = 1$. В частности, если задана замена координат $y = f(x)$ в области U в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\Gamma = \partial U$ и эта замена взаимно однозначна на границе, то f имеет степень 1 и внутри.

§ 14. Некоторые применения степени

1. Степень и интеграл. Изучим поведение интеграла от дифференциальной формы ранга n по n-мерному замкнутому ориентированному многообразию при отображениях конечной степени. Пусть $f\colon N \to M$ — гладкое отображение степени $q = \deg f$ и Ω — дифференциальная форма ранга $n = \dim M = \dim N$ на M, имеющая вид $\varphi_i(y)\, dy_i^1 \wedge \ldots \wedge dy_i^n$ в локальной системе координат (y_i^α) на M с номером i. Определены интегралы $\int\limits_M \Omega$ по многообразию M от формы Ω, а также $\int\limits_N f^*\Omega$ по многообразию N от формы $f^*\Omega$, имеющей (локально) вид

$$f^*\Omega = \varphi_i(f(x))\, dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^n \det\left(\frac{\partial y_i^\alpha}{\partial x_i^\beta}\right)$$

в области на N с координатами (x_j^α), точнее, в той ее части, которая попадает в область с координатами (y_i^α) при отображении f.

Теорема 1.

$$\int\limits_N f^*\Omega = (\deg f) \int\limits_M \Omega.$$

Доказательство. Рассмотрим область $U \subset M$, целиком состоящую из правильных значений отображения f и лежащую в достаточно малой окрестности правильного значения $y_0 \in M$. Полный прообраз $f^{-1}(y_0)$ состоит из конечного числа точек $x_1, \ldots, x_m$. Полный прообраз $f^{-1}(U)$ окрестности U точки y_0 есть объединение

$$f^{-1}(U) = U_1 \cup \ldots \cup U_m$$

непересекающихся множеств U_j с координатами (x_j^α), $j = 1, \ldots, m$; $\alpha = 1, \ldots, n$. Координаты в U обозначим через (y_0^α), $\alpha = 1, \ldots, n$. Все точки областей U_j регулярны, так как область U состоит лишь из правильных значений отображения f. В каждой области U_j отображение f взаимно однозначно:

$$y_0^\alpha = f_{(j)}^\alpha(x_j^1, \ldots, x_j^n).$$

По формуле замены переменных в кратком интеграле имеем

$$\int\limits_{U_j} \varphi(y(x))\, dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^n = \operatorname{sgn} \det\left(\frac{\partial y_0^\alpha}{\partial x_j^\beta}\right) \int\limits_U \varphi(y)\, dy_0^1 \wedge \ldots \wedge dy_0^n.$$

Из этой формулы, суммируя по всем U_j, получаем

$$\int\limits_{f^{-1}(U)} f^*\Omega = \left(\sum_j \operatorname{sgn}\det\left(\frac{\partial y_0^\alpha}{\partial x_j^\beta}\right)\right)\int\limits_U \Omega = (\deg f)\int\limits_U \Omega.$$

Далее, если на некотором множестве $V \subset N$ якобиан отображения f обращается в нуль, то на множестве V форма $f^*\Omega$ также обращается в нуль. По лемме Сарда (см. § 10) множество правильных точек в M является открытой всюду плотной областью; теорема тем самым доказана в силу выведенной выше формулы, так как интеграл является аддитивной функцией области.

Замечание. Теорема 1 верна также для собственных отображений, если форма Ω финитна (имеет компактный носитель на M) и для отображений многообразий с краем.

Следствие 1 (см. пример 5 в § 13). Если имеется замена переменных, взаимно однозначная на гладкой границе компактной области в $\mathbb{R}^n$, то $|\deg f| = 1$ и интегралы от форм Ω и $f^*\Omega$ совпадают по модулю (хотя замена может и не быть взаимно однозначной во внутренних точках).

2. Степень векторного поля на гиперповерхности. Рассмотрим теперь гладкое векторное поле $(\xi^\alpha(x)) = \xi$, $\alpha = 1, \ldots, n$, заданное в некоторой области U n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с координатами $x^1, \ldots, x^n$ и обращающееся в нуль в этой области. В этом случае в области U определено единичное векторное поле $n(x) = \frac{\xi(x)}{|\xi(x)|}$. Тем самым определено сферическое (гауссово) отображение f области U на сферу S^{n-1}:

$$f(x) = n(x),$$

где вектор $n(x)$ в правой части исходит из начала координат. Если Q — любая замкнутая гиперповерхность, лежащая целиком в U, то определена степень $\deg f|_Q$ отображения f на Q. Эта степень называется степенью векторного поля на гиперповерхности Q. Предположим, что гиперповерхность Q локально задана в параметрическом виде

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, \ldots, u^{n-1}), \qquad \alpha = 1, \ldots, n.$$

На сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ и даже на всей области $\mathbb{R}^n \setminus 0$ определена замкнутая дифференциальная форма Ω ранга $n-1$ (форма объема на S^{n-1}), имеющая вид

$$\Omega = \frac{1}{\gamma_n}\,\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^i x^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n}{((x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2)^{n/2}}$$

(где значок $\widehat{dx^i}$ означает, что этот дифференциал пропущен).

Нормировочный коэффициент γ_n подобран из условия

$$\int_{S^{n-1}} \Omega = 1.$$

Для плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y имеем $(n=2)$

$$\Omega = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}\right)$$

или $\Omega = \frac{d\varphi}{2\pi}$ в полярной системе координат. Для $\mathbb{R}^3$ с координатами x, y, z имеем $(n=3)$

$$\Omega = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dy \wedge dx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

или $\Omega = \frac{1}{4\pi}|\sin\theta|\,d\theta\,d\varphi$ в сферической системе координат.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 2. *Для любого векторного поля $\xi(x)$ и замкнутой гиперповерхности Q степень поля ξ на Q равна $\int_Q f^*\Omega$, где f — гауссово сферическое отображение*:

$$\deg f = \deg_Q \xi = \frac{1}{\gamma_n}\int_Q \frac{1}{|\xi|^n} \det \begin{vmatrix} \xi^1 & \ldots & \xi^n \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial u^1} & \ldots & \frac{\partial \xi^n}{\partial u^1} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial u^{n-1}} & \ldots & \frac{\partial \xi^n}{\partial u^{n-1}} \end{vmatrix} du^1 \wedge \ldots \wedge du^{n-1}.$$

Это следствие вытекает из определения $f^*(\Omega)$ и вида формы Ω, указанного выше. При $n=2$ имеем

$$\deg f = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{dt}{|\xi|^2}\left(\xi^1 \frac{d\xi^2}{dt} - \xi^2 \frac{d\xi^1}{dt}\right),$$

где t — параметр на кривой, а $\xi^1(t)$, $\xi^2(t)$ — координаты векторного поля на кривой. При $n=3$ имеем $\gamma_3 = 4\pi$,

$$\deg f = \frac{1}{4\pi}\iint_Q \frac{du\,dv}{|\xi|^3} \det \begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial u} & \frac{\partial \xi^2}{\partial u} & \frac{\partial \xi^3}{\partial u} \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial v} & \frac{\partial \xi^2}{\partial v} & \frac{\partial \xi^3}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{4\pi}\iint_Q \frac{du\,dv}{|\xi|^3}\left\langle \xi, \left[\frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial v}\right]\right\rangle.$$

Рассмотрим особо случай, когда векторное поле $\xi(x)$ единично ($|\xi| = 1$) и направлено ортогонально к поверхности Q во внешнюю сторону.

В этом случае мы знаем (см. часть I, § 26), что форма $f^*\Omega$ имеет вид

$$f^*\Omega = K d\sigma = K\sqrt{g}\, du^1 \wedge \ldots \wedge du^{n-1},$$

где K — гауссова кривизна гиперповерхности (произведение главных кривизн), $d\sigma = \sqrt{g}\, du^1 \wedge \ldots \wedge du^{n-1}$ — стандартный элемент объема, порожденный метрикой на поверхности Q, индуцированной вложением Q в $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой. Для $n=2$ имеем $d\sigma = dl$ (натуральный параметр) и $K = k$ (кривизна кривой). При $n=3$ K — это обычная гауссова кривизна поверхности и $d\sigma = \sqrt{EG-F^2}\, du \wedge dv$ — обычный элемент площади.

Мы получили следующее утверждение.

Теорема 2. *Интеграл от кривизны K по замкнутой поверхности с точностью до множителя γ_n (площадь единичной сферы в n-мерном пространстве) совпадает со степенью гауссова отображения.*

3. Число Уитни. Формула Гаусса — Бонне. Нашей задачей теперь является вычисление степени гауссова отображения. Мы проделаем это лишь для наиболее важных случаев $n=2$, 3 (кривые и поверхности).

Случай $n=2$ (кривые). Пусть имеется замкнутая кривая $\gamma = (x(t), y(t))$ в $\mathbb{R}^2$ общего положения. Последнее означает, что $x(t+2\pi) = x(t)$, $y(t+2\pi) = y(t)$, вектор $(\dot{x}, \dot{y})$ отличен от нуля при всех t и все самопересечения кривой в $\mathbb{R}^2$ двойные, причем касательные векторы к ветвям линейно независимы в точке их пересечения (рис. 78).

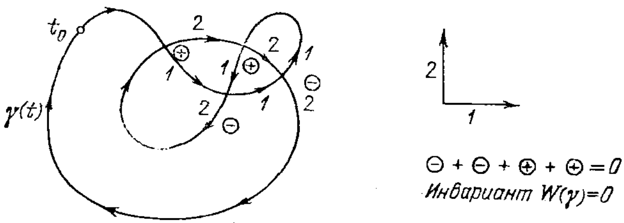

Рис. 78

Зафиксируем на кривой точку t_0, не являющуюся точкой самопересечения. Числом Уитни $W(\gamma)$ или алгебраическим числом точек самопересечения называется сумма $\sum(\pm 1)$ знаков всех точек самопересечения для плоской кривой общего положения. Знак точке самопересечения приписывается так: в плоскости задан ориентирующий репер [1, 2] (см. рис. 78). Мы идем по направленной кривой γ от точки t_0; когда мы первый раз встречаем точку самопересечения, то на касательном векторе этой ветви ставим номер *1*; когда второй раз встречаем эту же точку, то на этой ветви ставим номер *2*. Таким образом, каждой точке самопересечения отвечает репер, знак которого либо совпадает с ориентирующим репером в $\mathbb{R}^2$, либо противоположен ему (см. рис. 78). В первом случае точка имеет знак $+$, во втором — знак $-$. Для четности числа Уитни, т. е. для четности числа точек самопересечения кривой, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Четность числа точек самопересечения кривой противоположна четности числа* $\deg f$.

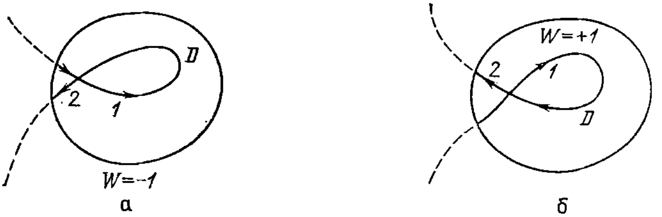

Рис. 79

Доказательство. Для несамопересекающейся кривой $W(\gamma)=0$ и $\deg f=+1$. Таким образом, в этом случае утверждение теоремы правильно. Докажем теорему индукцией по числу точек самопересечения. Предположим сначала, что у регулярной кривой общего положения γ можно найти «минимальный» замкнутый кусок около одной точки самопересечения, не содержащий внутри себя ни одной точки кривой и не содержащий на себе начальной точки t_0 (рис. 79). Окружим этот кусок кривой γ областью D, внутри которой нет других точек кривой, где мы будем

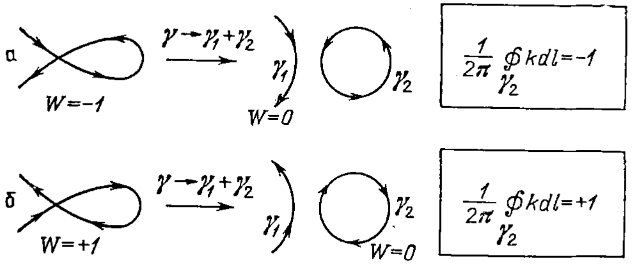

Рис. 80

производить все перестройки кривой. Перестройки кривой с сохранением направления производятся естественным образом (рис. 80, *а*, *б*): $\gamma\to\gamma_1+\gamma_2$. В результате обеих перестроек в случаях *а*) и *б*) число точек самопересечения уменьшается на 1. При отбрасывании образовавшегося замкнутого несамопересекающегося куска интеграл (т. е. степень $\deg f$) увеличивается на 1 в случае *а*) и уменьшается на 1 в случае *б*). Точно так же ведет себя и число $W(\gamma)$. В этом частном случае теорема доказана.

В общем случае мы будем действовать точно так же, выбирая каждый раз точку самопересечения таким образом, чтобы кривая γ_2 (рис. 81) была несамопересекающейся (допускается ее пересечение с кривой γ_1). Мы совершаем перестройку кривой, следуя рис. 80, *а* или *б*. Кривые γ_1 и γ_2 могут пересечься, однако число точек их пересечения четно. Поэтому приведенное выше рассуждение остается полностью неизменным. Теорема доказана.

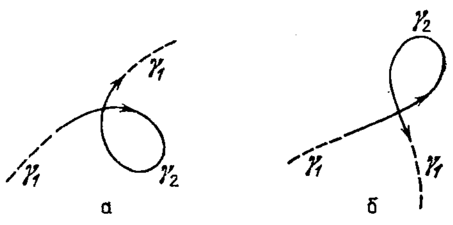

Рис. 81

Замечание. Если на отрезке γ_2 нет точки t_0, то оба целых числа $W(\gamma)$ и $\deg f$ ведут себя одинаково при перестройке (как целые числа, а не только $\bmod 2$). При выборе t_0 на внешнем контуре γ можно показать, что такой отрезок γ_2 найдется, и перестройка всегда возможна. Используя это, можно получить уточнение теоремы: число $W(\gamma)$ равно либо $\deg f + 1$, либо $\deg f - 1$, причем это может зависеть от выбора t_0 на внешней части γ (вне точек пересечения) (рис. 82).

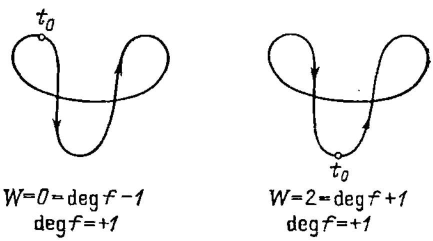

Рис. 82

Случай $n=3$ (поверхности). Вычислим теперь степень гауссова отображения $f\colon Q\to S^2$ для гладкой замкнутой ориентированной поверхности Q в $\mathbb{R}^3$. По определению степень отображения равна числу прообразов регулярного значения $y_0 \in S^2$ отображения f. Можно предположить, что эта точка y_0 есть верхний полюс сферы с координатами $(0, 0, 1)$ (сфера задана в пространстве $\mathbb{R}^3$). Мы будем предполагать (без ограничения общности), что противоположный полюс $\overset{*}{y_0} = (0, 0, -1)$ также является правильной точкой. Одновременная правильность пары противоположных точек сферы равносильна правильности точки проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ при сквозном отображении

$$Q \xrightarrow{f} S^2 \to \mathbb{R}P^2.$$

При этих условиях имеет место

Лемма 1. *Рассмотрим функцию высоты φ на поверхности Q, значение которой в точке $P\in Q$ совпадает с координатой $z=\varphi(P)$.*

Все критические точки этой функции невырождены, и множество критических точек совпадает с объединением двух прообразов: $f^{-1}(y_0) \cup f^{-1}(y_0^*)$.

Доказательство. Градиент функции $\varphi(P)=z$ обращается на Q в нуль там, где ось z ортогональна к Q. Эти точки и являются объединением прообразов $f^{-1}(y_0) \cup f^{-1}(y_0^*)$ обоих полюсов. Якобиан отображения $Q \xrightarrow{f} S^2$ в точках прообраза $f^{-1}(y_0)$, как устанавливалось в части I (см. § 26), в точности совпадает в специальных координатах с определителем гессиана функции $z=\varphi$, совпадающим с гауссовой кривизной. Для прообразов $f^{-1}(y_0^*)$ то же самое верно для функции $z=-\varphi$. Тем самым невырожденность прообразов $f^{-1}(y_0^*) \cup f^{-1}(y_0)$ равносильна условию $K \neq 0$ или условию неравенства нулю гессиана функции φ или $-\varphi$. Лемма доказана.

Заметим теперь, что имеет место очевидное равенство

$$\det\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^i \partial u^j}\right) = (-1)^{n-1} \det\left(\frac{\partial^2(-\varphi)}{\partial u^i\, \partial u^j}\right),$$

где $u^1, \ldots, u^{n-1}$ — локальные координаты около любой точки на поверхности Q. Это и различает случаи четного и нечетного значений n. Для нашего случая $n-1=2$. Отсюда следует, что знаки якобианов отображения f во всех точках объединения $f^{-1}(y_0) \cup \cup f^{-1}(y_0^*)$ те же самые, что знаки гауссовой кривизны K в этих точках. При определении знаков нет нужды различать направления внешней и внутренней нормали к поверхности Q или функции φ и $-\varphi$. Суммированием вкладов всех точек со знаками получается

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$2 \deg f = \sum_{p_j} (-1)^{\alpha(P_j)},$$

здесь суммирование распространяется на множество критических точек функции высоты $\varphi=z$, $\alpha(P_i)=0$ *для минимумов и максимумов, где* $\operatorname{sgn} K=+1$, *и* $\alpha(P_i)=1$ *для седел, где* $\operatorname{sgn} K=-1$.

Покажем теперь, что для поверхностей с g ручками число, стоящее в правой части, есть в точности $2-2g$. Легко предъявить вложение поверхности в $\mathbb{R}^3$, где функция высоты φ будет иметь 1 минимум, 1 максимум и ровно $2g$ седел (рис. 83; на нем отмечены стационарные точки). Для этих вложений поверхностей с g ручками получаем

$$2 \deg f = \frac{1}{2\pi}\int_Q K d\sigma = 2-2g.$$

Конечно, возможны другие вложения поверхностей в $\mathbb{R}^3$. Однако мы знаем, что $K = R/2$, где R — скалярная кривизна (см. часть I, § 30). Кроме того, мы знаем, что величина $\int\limits_Q R d\sigma$ не меняется при малой вариации метрики на двумерном многообразии Q, так

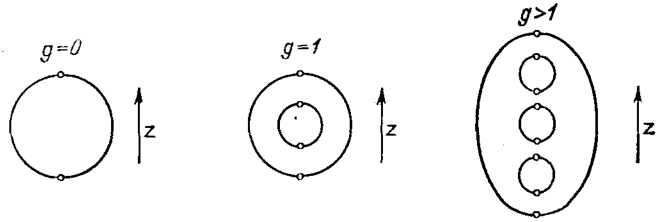

Рис. 83

как $\delta \int R d\sigma = 0$ (см. часть I, § 37). Пусть $g_{ij}^{(0)}$ и $g_{ij}^{(1)}$ — две римановы метрики на поверхности Q. Рассмотрим семейство метрик

$$g_{ij}(t) = t g_{ij}^{(1)} + (1-t) g_{ij}^{(0)}.$$

Очевидно, метрика $g_{ij}(t)$ положительна при всех $t \in [0, 1]$, $g_{ij}(0) = g_{ij}^{(0)}$ и $g_{ij}(1) = g_{ij}^{(1)}$. Отсюда следует, что интеграл $\int\limits_Q R d\sigma$ одинаков для метрик $g_{ij}^{(0)}$ и $g_{ij}^{(1)}$. Тем самым доказана

Теорема 4 (Гаусс — Бонне). *Для поверхности Q с g ручками и любой римановой метрики на ней верна формула*

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_Q R d\sigma = 2 - 2g.$$

4. Индекс особой точки векторного поля. Рассмотрим теперь гауссово отображение в окрестности изолированной особой точки векторного поля. Пусть $\xi = \xi(x)$ — векторное поле, заданное в окрестости некоторой точки x_0 пространства $\mathbb{R}^n$. Следуя принятой терминологии, мы говорим, что x_0 есть *особая точка* поля ξ, если $\xi(x_0) = 0$; особая точка x_0 называется *изолированной*, если ξ не обращается в нуль в отличных от x_0 точках достаточно малой окрестности точки x_0; особая точка x_0 называется невырожденной, если

$$\det \left(\left. \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \right|_{x=x_0} \right) \neq 0.$$

Лемма 3. *Невырожденная особая точка всегда изолирована.*

Доказательство. Уравнение $\xi^\alpha(x) = 0$ имеет решение $x = x_0$. Так как $\det \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \neq 0$ при $x = x_0$, то утверждение леммы следует из теоремы о неявных функциях.

Корнями невырожденной особой точки называются собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы $\left(\left.\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right|_{x=x_0}\right)$.

Индексом невырожденной особой точки x_0 называется знак

$$\operatorname{sgn}\det\left(\left.\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right|_{x=x_0}\right)=\operatorname{sgn}(\lambda_1\ldots\lambda_n).$$

Для градиентных полей $\xi^\alpha=\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ индекс особой точки совпадает со знаком гессиана:

$$\operatorname{sgn}\det\left(\left.\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right|_{x=x_0}\right)=\operatorname{sgn}\det\left(\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\right|_{x=x_0}\right)=(-1)^{i(x_0)},$$

где $i(x_0)$ равно числу отрицательных квадратов в каноническом виде квадратичной формы $d^2f\,|_{x=x_0}$.

Рассмотрим сферу $Q_\varepsilon=S^{n-1}$ малого радиуса $\varepsilon>0$, окружающую изолированную особую точку x_0, так что поле ξ не обращается на сфере Q_ε в нуль. Согласно сказанному в п. 2 определено сферическое гауссово отображение

$$f_{x_0}: Q_\varepsilon\to S^{n-1}.$$

Определение. *Индексом* изолированной особой точки x_0 векторного поля ξ называется степень гауссова отображения:

$$\operatorname{ind}_{x_0}(\xi)=\deg f_{x_0}.$$

Оказывается, что если точка x_0 не вырождена, то это определение совпадает с предыдущим.

Теорема 5. *Для невырожденной особой точки x_0 поля $\xi(x)$ имеет место равенство*

$$\deg f_{x_0}=\operatorname{sgn}\det\left(\left.\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right|_{x=x_0}\right).$$

Доказательство. В достаточно малой окрестности точки x_0 векторное поле $\xi(x)$ гомотопно линейному векторному полю $\xi^{(1)\beta}(x)=\left.\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\gamma}\right|_{x=x_0}(x^\gamma-x_0^\gamma)$, причем в процессе гомотопии поле $\xi(x,t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ обращается в нуль только в точке x_0 при всех t и $\xi(x,0)=\xi(x)$, $\xi(x,1)=\xi^{(1)}(x)$. Действительно, поле ξ имеет вид

$$\xi(x)=\xi^{(1)}(x)+\xi^{(2)}(x),$$

где $|\xi^{(2)}(x)|=o(|\xi^{(1)}|)$. Мы полагаем

$$\xi(x,t)=\xi^{(1)}(x)+(1-t)\,\xi^{(2)}(x).$$

Эта гомотопия обладает нужными свойствами в достаточно малой окрестности точки x_0. В процессе этой гомотопии отображение f_{x_0}: $Q_\varepsilon \to S^{n-1}$ испытывает гладкую гомотопию, и линейная часть поля не меняется. Поэтому обе части равенства $\deg f_{x_0}$ и $\operatorname{sgn}\det\left(\left.\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right|_{x=x_0}\right)$ остаются неизменными. Нам остается вычислить степень для линейного отображения $\xi^{(1)}$:

$$f_{x_0}^{(1)}(x) = \frac{\xi^{(1)}(x)}{|\xi^{(1)}(x)|}.$$

В линейном случае поле $\xi^{(1)}$ дает линейный изоморфизм окрестности точки x_0 на окрестность нуля в $\mathbb{R}^{n-1}$ и является взаимно однозначным на сфере радиуса ε, $Q_\varepsilon \to S^{n-1}$. Каждая точка y_0 на сфере S^{n-1} является правильным значением и имеет ровно один прообраз. Знак детерминанта указывает на сохранение или обращение ориентации при этом отображении. Теорема доказана.

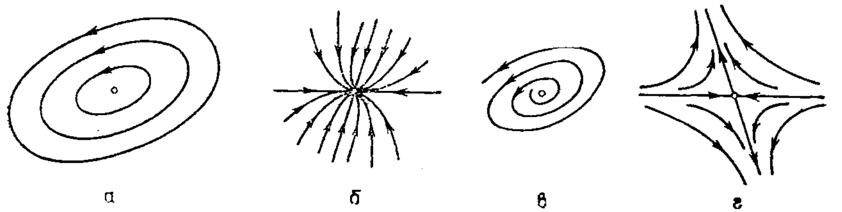

Рис. 84

Пример 1 ($n=2$). Невырожденные особые точки векторного поля на плоскости могут быть такими:

	Индекс
центр (корни чисто мнимые; рис. 84, *а*)	$+1$
узел (корни вещественные и одного знака; рис. 84, *б*)	$+1$
фокус (корни комплексно сопряжены; рис. 84, *в*)	$+1$
седло (корни вещественные и разных знаков; рис. 84, *г*)	-1

Индекс особой точки не зависит от направления поля.

Если поле является градиентом некоторой функции f, то возможны такие особенности:

	Индекс
минимум f	$+1$
седло f	-1
максимум f	$+1$

Пример 2 ($n=3$). Градиенты $\left(\xi^\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\right)$:

	Индекс
минимум f	$+1$
седло 1-го типа (один отрицательный квадрат формы d^2f)	-1
седло 2-го типа (два отрицательных квадрата формы d^2f)	$+1$
максимум f	-1

Общие поля (все $\lambda_i \neq 0$):

	Индекс
выталкивающая особая точка ($\operatorname{Re}\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$)	$+1$
седло 1-го типа ($\operatorname{Re}\lambda_1 \geqslant 0$, $\operatorname{Re}\lambda_2 \geqslant 0$, λ_3 вещественно, $\lambda_3 < 0$)	-1
седло 2-го типа (λ_1 вещественно, $\lambda_1 > 0$, $\operatorname{Re}\lambda_2 \leqslant 0$, $\operatorname{Re}\lambda_3 \leqslant 0$)	$+1$
всасывающая особая точка ($\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant 0$, $i = 1, 2, 3$)	-1

(либо все три корня вещественны, либо один вещественный и два комплексно сопряжены).

Теорема 6. *Пусть $\xi = \xi(x)$ — векторное поле в $\mathbb{R}^n$ с изолированными особенностями $x_1, \ldots, x_m$, и пусть Q — замкнутая ориентированная гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, не проходящая через особые точки и ограничивающая область D в $\mathbb{R}^n$. Тогда степень векторного поля $\xi(x)$ на поверхности Q, т. е. степень гауссова отображения $Q \to S^{n-1}$, равна сумме индексов всех особых точек $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, лежащих в области D.*

Доказательство. Рассмотрим сферы $Q_{j\varepsilon}$ достаточно малого радиуса $\varepsilon > 0$ около особых точек x_j и выкинем из области D ограничиваемые этими сферами шары (вместе с точками x_j). Останется область $\tilde{D}$, граница которой имеет вид

$$\partial\tilde{D} = Q \cup Q_{i_1\varepsilon} \cup \ldots \cup Q_{i_k\varepsilon}.$$

Рассмотрим в $\tilde{D}$ гауссово отображение $f\colon \tilde{D} \to S^{n-1}$ и форму $f^*\Omega$, где Ω — форма, определенная в п. 2. Так как $d\Omega = 0$ на сфере S^{n-1} по соображениям размерности и $df^*\Omega = f^*(d\Omega) = 0$, по общей формуле Стокса (см. § 8) получаем

$$0 = \int_{\tilde{D}} df^*\Omega = \int_{\partial\tilde{D}} f^*\Omega = -\int_Q f^*\Omega + \sum_{q=1}^{k} \int_{Q_{i_q\varepsilon}} f^*\Omega,$$

где минус стоит потому, что внешняя поверхность Q входит в границу $\partial\tilde{D}$ с противоположной ориентацией по сравнению со сферами $Q_{i_q\varepsilon}$. Наше утверждение следует теперь из теоремы 1 и определения индексов особых точек.

5. Трансверсальная поверхность векторного поля. Теорема Пуанкаре — Бендиксона. Особый интерес представляет случай, когда поверхность Q сама является сферой большого радиуса и поле $\xi(x)$ на этой сфере Q ее нигде не касается. Такую поверхность Q мы назовем *трансверсальной поверхностью* поля ξ. В этом случае верна простая

Лемма 4. *Степень поля ξ на трансверсальной поверхности равна (нормированному) интегралу от (гауссовой) кривизны этой поверхности. Если поверхность является сферой, то этот интеграл равен единице.*

Доказательство. Трансверсальное поле на Q гомотопно (в классе полей, не касающихся Q) нормальному единичному полю к этой поверхности. Степень есть инвариант гомотопии. Для нормального поля $n(x)$ к поверхности Q форма $f^*\Omega$ совпадает с $\frac{1}{\gamma_n} K\,d\sigma$, где K — кривизна и γ_n — нормировочный коэффициент, зависящий только от размерности (см. п. 2). Для сферы S^{n-1} этот интеграл равен единице: $\frac{1}{\gamma_n}\int K\,d\sigma = 1$. Лемма доказана.

Следствие 3. *Векторное поле $\xi(x)$ на $\mathbb{R}^n$, трансверсальное какой-либо сфере S^{n-1} (например, окружности S^1 в $\mathbb{R}^2$), обладает хотя бы одной особой точкой внутри этой сферы.*

Для доказательства следствия достаточно сопоставить теорему 6 с замечанием, что индекс любой неособой точки есть нуль.

Замечание. Для случая плоскости ($n = 2$) уместно отметить еще случай периодической (замкнутой) интегральной траектории Q поля $\xi(x)$, если она существует. Очевидно, степень поля ξ на Q равна единице и из теоремы 6 вытекает, что внутри Q обязательно есть особая точка поля ξ. Информация об особых точках и трансверсальных поверхностях может быть очень важной при описании качественной картины поведения интегральных траекторий векторного поля $\xi(x)$, особенно в плоскости. Рассмотрим, например, случай, когда поле ξ направлено внутрь трансверсальной замкнутой кривой Q в плоскости $\mathbb{R}^2$ и в области, ограничиваемой этой кривой Q, поле имеет ровно одну — при этом выталкивающую — особую точку x_0 (узел или фокус) (рис. 85).

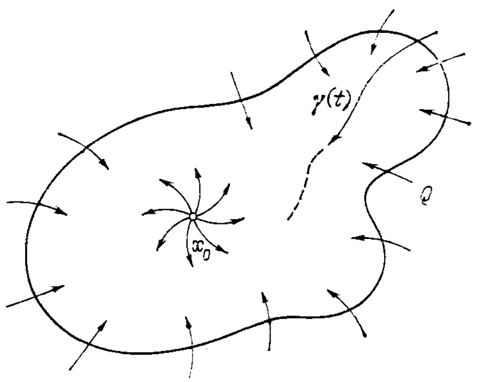

Рис. 85

При этих условиях интегральная траектория $\gamma = (x(t),\ y(t))$ поля ξ, начавшаяся в точках Q, не может дойти до точки x_0, поскольку точка x_0 является выталкивающей. Рассмотрим предельное множество $\omega^+(\gamma)$ этой траектории, точками которого являются предельные точки в $\mathbb{R}^2$ последовательностей $\{\gamma(t_1),\ \gamma(t_2),\ \ldots\}$, где $t_i \to +\infty$ при $i \to \infty$. Множество $\omega^+(\gamma)$ компактно, замкнуто и не содержит особых точек поля ξ. При этих условиях имеет место.

Теорема (Пуанкаре — Бендиксон). *Множество $\omega^+(\gamma)$ является периодической интегральной кривой поля ξ, на которую кривая γ наматывается извне («предельный цикл»).*

Доказательство теоремы разобьем на леммы.

Лемма 5. *Множество $\omega^+(\gamma)$ вместе с любой точкой A содержит всю интегральную траекторию $\tilde{\gamma}$, проходящую через A.*

Доказательство. Если $A = \lim\limits_{i\to\infty} \gamma(t_i)$, то все другие точки траектории γ получатся как $A_t = \lim \gamma(t_i + t)$, $-\infty < t < \infty$.

Лемма 6. *Если множество $\omega^+(\tilde{\gamma})$ компактно и не содержит особых точек поля ξ, а сама траектория $\tilde{\gamma}$ не периодична, то через траекторию $\tilde{\gamma}$ можно провести замкнутую трансверсальную кривую поля ξ.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\gamma}(t_1)$ и $\tilde{\gamma}(t_2)$ — близкие точки в $\mathbb{R}^2$, но далекие по t: $|t_1 - t_2| \gg 1$. Такая пара t_1, t_2 всегда имеется по условию леммы. Соединим пару точек $\tilde{\gamma}(t_1)$, $\tilde{\gamma}(t_2)$ малым трансверсальным отрезком l и рассмотрим замкнутую кривую $S = l \cup [\tilde{\gamma}(t_1, t_2)]$. Очевидно, кривая S аппроксимируется замкнутой трансверсалью $\tilde{S}$, пересекающей $\tilde{\gamma}$ (рис. 86, пунктирная кривая). Лемма доказана.

Лемма 7. *При условиях теоремы через интегральную траекторию $\tilde{\gamma}$ в множестве $\omega^+(\gamma)$ нельзя провести замкнутую трансверсаль.*

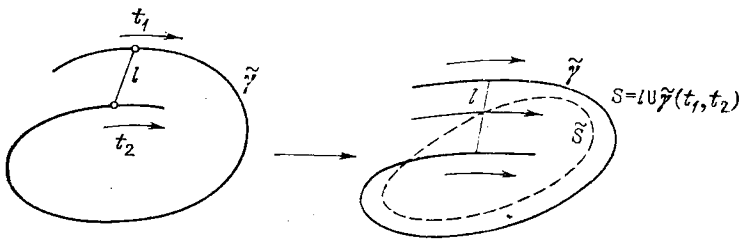

Рис. 86

Доказательство. Предположим противное: для $\tilde{\gamma}$ существует замкнутая трансверсаль $\tilde{S}$. Кривая $\tilde{\gamma}$ входит внутрь кривой $\tilde{S}$ при $t \to +\infty$. Тем самым исходная кривая $\gamma(t)$ также входит внутрь $\tilde{S}$. Отсюда следует, что часть кривой γ, оставшаяся вне трансверсали $\tilde{S}$, не может принадлежать множеству $\omega^+(\gamma)$, поскольку γ прошла через трансверсаль $\tilde{S}$. Это противоречит лемме 5.

Тем самым теорема доказана: $\tilde{\gamma}$ является периодической траекторией (в силу леммы 6), и $\gamma(t)$ подходит к ней извне.

Пример. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(\dot{x}),$$

$$-f(\dot{x}) = f(-\dot{x}),$$

$$a > 0, \quad b > 0.$$

Пусть функция $f(y)$ монотонна и имеет вид, указанный на рис 87. На фазовой плоскости $(x,\ \dot{x}=y)$ имеем векторное поле $\xi(\dot{x}=y,\ \dot{y}=-ay-bx-f(y))$. Окружность S^1 достаточно большого радиуса трансверсальна полю ξ, и поле ξ направлено внутрь этой окружности. В конечной части плоскости (x, y) поле ξ имеет одну особую точку $(x=0,\ y=0)$. Матрица $\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a+f'(0) \end{pmatrix}$$

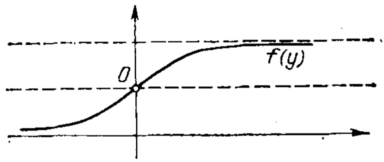

Рис. 87

и корни таковы:

$$\lambda_{1,2}=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-b},$$

где $p=f'(0)-a$.

Отсюда следует, что особая точка (0, 0) будет выталкивающей, если $\operatorname{Re}\lambda_i>0$ или $f'(0)>a$. Поэтому применима теорема Пуанкаре — Бендиксона; уравнение (или поле ξ) имеет предельный цикл.

§ 15. Индекс пересечения и его применения

1. Определение индекса пересечения. Рассмотрим n-мерное многообразие N (например, $\mathbb{R}^n$) и два его замкнутых подмногообразия P и Q размерностей p и q.

Напомним (см. § 10 п. 3), что подмногообразия P и Q называются трансверсально пересекающимися (или, как мы будем иногда говорить, находящимися *в общем положении*), если в любой точке $x\in P\cap Q$ касательные пространства P и Q линейно порождают касательное пространство к N.

Основным свойством общего положения является то, что пересечение $P\cap Q$ есть гладкое $(p+q-n)$-мерное подмногообразие многообразия N.

Нас особенно будет интересовать случай, когда $p+q=n$. В этом случае пересечение $P\cap Q$ состоит из конечного числа точек $x_1, \ldots, x_m$. Если многообразия N, P, Q ориентированы, то каждой точке x_j приписывается знак по следующему правилу. Пусть $\tau^p_{(j)}$ — ориентирующий касательный репер к P в точке x_j и $\tau^q_{(j)}$ — ориентирующий касательный репер к Q в точке x_j; точке x_j приписывается знак $+$, если репер $\tau=\left(\tau^p_{(j)},\ \tau^q_{(j)}\right)$ (его невырожденность следует из определения трансверсальности) является ориентирующим для N в точке x_j, и знак $-$ в противном случае; этот знак обозначается через $\operatorname{sgn} x_j(P\circ Q)$.