

Пусть функция  $f(y)$  монотонна и имеет вид, указанный на рис 87. На фазовой плоскости  $(x, \dot{x} = y)$  имеем векторное поле  $\xi(\dot{x} = y, \dot{y} = -ay - bx - f(y))$ . Окружность  $S^1$  достаточно большого радиуса трансверсальна полю  $\xi$ , и поле  $\xi$  направлено внутрь этой окружности. В конечной части плоскости  $(x, y)$  поле  $\xi$  имеет одну особую точку  $(x = 0, y = 0)$ . Матрица  $\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi^x}{\partial x} & \frac{\partial \xi^x}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi^y}{\partial x} & \frac{\partial \xi^y}{\partial y} \end{pmatrix}$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a + f'(0) \end{pmatrix}$$

и корни таковы:

$$\lambda_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - b},$$

где  $p = f'(0) - a$ .

Отсюда следует, что особая точка  $(0, 0)$  будет выталкивающей, если  $\text{Re } \lambda_1 > 0$  или  $f'(0) > a$ . Поэтому применима теорема Пуанкаре — Бендиксона; уравнение (или поле  $\xi$ ) имеет предельный цикл.

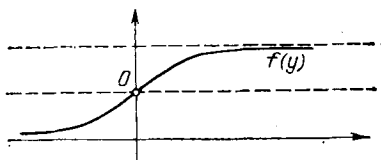


Рис. 87

### § 15. Индекс пересечения и его применения

**1. Определение индекса пересечения.** Рассмотрим  $n$ -мерное многообразие  $N$  (например,  $\mathbb{R}^n$ ) и два его замкнутых подмногообразия  $P$  и  $Q$  размерностей  $p$  и  $q$ .

Напомним (см. § 10 п. 3), что подмногообразия  $P$  и  $Q$  называются трансверсально пересекающимися (или, как мы будем иногда говорить, находящимися в общем положении), если в любой точке  $x \in P \cap Q$  касательные пространства  $P$  и  $Q$  линейно порождают касательное пространство к  $N$ .

Основным свойством общего положения является то, что пересечение  $P \cap Q$  есть гладкое  $(p + q - n)$ -мерное подмногообразие многообразия  $N$ .

Нас особенно будет интересовать случай, когда  $p + q = n$ . В этом случае пересечение  $P \cap Q$  состоит из конечного числа точек  $x_1, \dots, x_m$ . Если многообразия  $N, P, Q$  ориентированы, то каждой точке  $x_j$  приписывается знак по следующему правилу. Пусть  $\tau_{(j)}^p$  — ориентирующий касательный репер к  $P$  в точке  $x_j$  и  $\tau_{(j)}^q$  — ориентирующий касательный репер к  $Q$  в точке  $x_j$ ; точке  $x_j$  приписывается знак  $+$ , если репер  $\tau = (\tau_{(j)}^p, \tau_{(j)}^q)$  (его невырожденность следует из определения трансверсальности) является ориентирующим для  $N$  в точке  $x_j$ , и знак  $-$  в противном случае; этот знак обозначается через  $\text{sgn } x_j(P \circ Q)$ .

**Определение 1.** Индексом пересечения многообразий  $P, Q$  называется целое число

$$P \circ Q = \sum_{j=1}^m \operatorname{sgn} x_j(P \circ Q);$$

в неориентированном случае  $P \circ Q$  определяется как вычет  $\bmod 2$  числа  $m$  точек пересечения.

**Лемма 1.** Имеет место равенство  $P \circ Q = (-1)^{pq} Q \circ P$ .

**Доказательство.** Если  $\tau^p$  и  $\tau^q$  — реперы и  $(\tau^p, \tau^q)$  — невырожденный  $n$ -репер, то знак детерминанта перехода от  $(\tau^q, \tau^p)$  к  $(\tau^p, \tau^q)$  есть как раз  $(-1)^{pq}$ . Утверждение леммы вытекает, таким образом, из определения знака точки пересечения.

**Теорема 1.** Если подмногообразия  $Q_1, Q_2 \subset N$  гомотопны, т. е. являются образами гомотопных вложений  $Q \rightarrow N$ , то их индексы пересечения с любым  $P$  совпадают:

$$Q_1 \circ P = Q_2 \circ P.$$

**Доказательство.** Рассмотрим гомотопию  $F: Q \times I \rightarrow N$  такую, что  $F(Q \times 0)$  есть  $Q_1$  и  $F(Q \times 1)$  есть  $Q_2$ . Можно считать, что  $F$  — гладкое отображение,  $t$ -регулярное на подмногообразии  $P$ . Полный прообраз  $F^{-1}(P)$  есть гладкое одномерное подмногообразие цилиндра  $Q \times I$  с краем  $\partial F^{-1}(P) = [Q_1 \cap P] \cup [Q_2 \cap P]$ , причем  $Q_1 \cap P$  лежит на нижнем основании цилиндра  $Q \times 0$ , а  $Q_2 \cap P$  — на верхнем основании  $Q \times 1$ , и  $F^{-1}(P)$  трансверсально подходит к краям цилиндра  $Q \times I$ . Эта картинка на  $Q \times I$  (рис. 88) совпадает с той, которая появлялась в § 13 при доказательстве инвариантности степени отображения относительно гомотопии. Теорема 1 доказана.

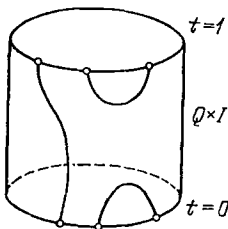


Рис. 88

**Следствие 1.** Индекс пересечения двух замкнутых подмногообразий  $P$  и  $Q$  евклидова пространства всегда равен нулю.

**Доказательство.** Трансляцией на вектор  $a \in \mathbb{R}^n$  сдвинем  $Q$  так далеко, что  $Q_2 = Q + a$  не будет пересекаться с  $P$  (это можно сделать ввиду компактности  $P$  и  $Q$ ). Тогда  $Q_2 \circ P = 0$  и  $Q \circ P = 0$  в силу теоремы 1.

**Следствие 2.** Замкнутое связное  $(n-1)$ -мерное подмногообразие  $M$  пространства  $\mathbb{R}^n$  всегда разделяет  $\mathbb{R}^n$  на две части (и поэтому ориентируемо).

**Доказательство.** Предположим противное:  $M$  не разделяет  $\mathbb{R}^n$ . Возьмем две точки  $y_1, y_2$  в  $\mathbb{R}^n$  около точки  $x \in M$  с двух сторон от  $M$  в  $\mathbb{R}^n$  — локально это имеет смысл. Соединим точки  $y_1$  и  $y_2$  путем  $\gamma$  в  $\mathbb{R}^n$ , не пересекающимся с  $M$ . Замкнем путь  $\gamma$  до окружности (цикла)  $C$  в  $\mathbb{R}^n$  с помощью малого отрезка,

нормального к  $M$  в  $\mathbb{R}^n$  и пересекающегося с  $M$  равно в одной точке. Индекс пересечения  $C \circ M$  равен  $\pm 1$  (ровно одна точка пересечения общего положения). Это противоречит следствию 1. Следствие доказано.

**Замечание 1.** При выводе следствия 2 мы применяем теорему 1 к возможно неориентированным многообразиям  $M$ ; однако теорема 1 справедлива и в этом случае для вычетов mod 2.

**Замечание 2.** Следствие 2 перестанет быть верным, если в нем заменить подмногообразие  $M \subset \mathbb{R}^n$  образом погружения  $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , т. е. допустить самопересечение. Имеются, например, погружения  $\mathbb{R}P^2$  в  $\mathbb{R}^3$  (см. [25]), имеющие самопересечения.

**2. Суммарная особенность векторного поля.** Пусть задано касательное векторное поле  $\xi$  на гладком замкнутом многообразии  $P$  размерности  $p$ . Рассмотрим пространство линейных элементов  $N$  размерности  $n = 2p$ . Точками многообразия  $N$  являются пары  $(x, \eta)$ , где  $x$  — точка из  $P$  и  $\eta$  — касательный вектор в точке  $x$  (см. § 7). Векторное поле  $\xi$  определяет вложение  $f: P \rightarrow N$  по правилу  $f_x(x) = (x, \xi(x))$ . Обозначим образ этого вложения через  $P(\xi)$ . Многообразие  $P(0)$ , отвечающее нулевому векторному полю, как обычно, отождествляем с  $P$ .

**Определение 2.** Векторное поле  $\xi$  называется *полем общего положения*, если многообразия  $P(\xi)$  и  $P = P(0)$  находятся в общем положении в  $N$ .

Векторное поле общего положения имеет лишь изолированные особые точки  $\xi(x_j) = 0$  в силу  $t$ -регулярности. Если многообразие  $P$  ориентировано с помощью репера  $\tau^p$  в точке  $x$ , то  $N$  также ориентировано с помощью репера  $(\tau^p, \tau^p)$  во всех точках вида  $(x, \eta)$ .

**Лемма 2.** Все особые точки  $x_j$  поля общего положения не вырождены. Знак особой точки  $x_j$ , как точки пересечения  $P(0) \cap P(\xi)$ , входящий в определение индекса пересечения  $P(0) \circ P(\xi)$ , совпадает с индексом особой точки  $\operatorname{sgn} \det \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_{x=x_j} \right)$ .

**Доказательство.** Касательное пространство к  $P = P(0)$  имеет вид  $(\tau^p, 0)$ . Касательное пространство к  $P(\xi)$  в особой точке  $x_j$ , в которой  $\xi = 0$ , состоит из всех векторов  $\left( \eta^\alpha, \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_j^\beta} \eta^\beta \right)$ ,  $\alpha, \beta = 1, \dots, p$  (в локальной системе координат  $(x_j^\beta)$  около точки  $x_j$ ). Пусть  $J = \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_j^\beta} \Big|_{x=x_j} \right)$ . Имеем два репера  $\tau_1^p = \tau^p \times 0$  и  $\tau_2^p = = \tau^p J(\tau^p)$ . По определению знака индекса пересечения нужно составить репер  $(\tau_1^p, \tau_2^p)$  в  $N$  и подсчитать знак детерминанта матрицы перехода к нему от ориентирующего репера в  $N$ . Ориентирующим является репер  $\tau^{2p} = (\tau_1^p, \tau_1^p)$ . Рефер  $(\tau_1^p, \tau_2^p)$  отлича-

ется от  $\tau^{2p}$  второй группой векторов, и матрица перехода есть  $J = \begin{pmatrix} \partial \xi^\alpha \\ \partial x^\beta \end{pmatrix}$ . Таким образом, знак совпадает со знаком  $\det J$ . Лемма доказана.

**Теорема 2.** Для любого замкнутого ориентированного многообразия  $P$  сумма индексов особых точек любого векторного поля  $\xi$  общего положения совпадает с индексом пересечения  $P(0) \circ P(\xi)$  в многообразии  $N$  линейных элементов и не зависит от векторного поля  $\xi$ .

**Доказательство.** Совпадение индекса пересечения  $P(0) \circ P(\xi)$  с суммой индексов особых точек векторного поля  $\xi$  непосредственно вытекает из леммы 2. Два векторных поля  $\xi(x)$  и  $\eta(x)$  всегда гомотопны, так как любое поле  $\xi(x)$  может быть связано с нулевым векторным полем гомотопией  $\xi(x, t) = t\xi(x)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Поэтому вложения  $P \rightarrow P(\xi)$  и  $P \rightarrow P(\eta)$  для полей  $\xi$  и  $\eta$  гомотопны. Из теоремы 1 следует, что индексы пересечения  $P(0) \circ P(\xi)$  и  $P(0) \circ P(\eta)$  совпадают. Теорема доказана.

**Следствие 3.** Если  $p$  нечетно, то сумма индексов особых точек векторного поля на замкнутом ориентируемом  $p$ -мерном многообразии  $P$  равна нулю.

**Доказательство.** Согласно лемме 2 имеем  $P(0) \circ P(\xi) = (-1)^{p^2} P(\xi) \circ P(0) = -P(\xi) \circ P(0)$ . С другой стороны, так как векторные поля  $0$  и  $\xi$  гомотопны, то  $P(0) \circ P(\xi) = P(\xi) \circ P(0)$ . Таким образом,

$$P(0) \circ P(\xi) = -P(0) \circ P(\xi) = 0.$$

Следствие доказано.

**Следствие 4.** Для любой гладкой функции  $f$  с невырожденными особыми точками  $x_j$  на замкнутом ориентируемом  $p$ -мерном многообразии  $P$  выражение  $\sum_{x_j} (-1)^{i(x_j)}$  не зависит от функции  $f$  и равно нулю, если  $p$  нечетно. Здесь  $i(x_j)$  — индекс особой точки  $x_j$ , т. е. число отрицательных квадратов формы  $d^2 f|_{x=x_j}$ .

Это следует из совпадения чисел  $(-1)^{i(x_j)}$  с индексами особых точек поля  $\xi = \text{grad } f$  (см. § 14).

Число  $\sum_{x_j} (-1)^{i(x_j)}$  называется *эйлеровой характеристикой*

многообразия  $P$ . Эйлерову характеристику можно определить по-другому через так называемую триангуляцию многообразия  $P$ . Мы рассмотрим здесь лишь случай  $n = 2$ . Предположим, что замкнутая ориентированная поверхность  $P$  разбита на треугольники со следующими условиями: а) каждая точка поверхности  $P$  принадлежит хотя бы одному треугольнику; б) два треугольника могут пересекаться только по одной вершине или по целому ребру.

**Определение 3.** *Эйлеровой характеристикой поверхности  $P$*  называется число  $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ , где  $\alpha_0$  — число вершин,  $\alpha_1$  — число ребер и  $\alpha_2$  — число самих треугольников.

Имеет место

**Теорема 3 (Хопф).** *Эйлерова характеристика поверхности  $P$ , разбитой на треугольники, совпадает с суммой индексов особых точек векторного поля общего положения на этой поверхности.*

**Доказательство.** В силу теоремы 2 достаточно предъявить одно гладкое векторное поле  $\xi(x)$  на поверхности  $P$ , для которого теорема верна. Укажем такое поле. В центрах треугольников «посадим» выталкивающие особые точки типа узла. В вершинах мы поместим «всасывающие» особые точки. В центре каждого ребра поместим по седлу.

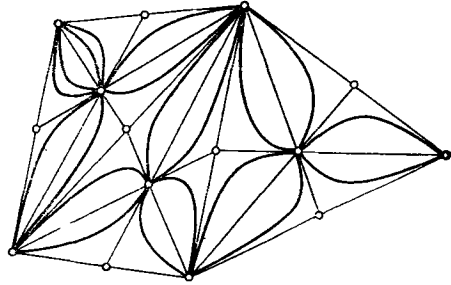


Рис. 89

Легко построить векторное поле именно с такими особенностями (рис. 89; на рисунке указаны интегральные траектории искомого поля, которое отдельно строится в каждом треугольнике). Всасывающая и выталкивающая особые точки имеют индексы  $+1$  для  $n = 2$ , а седло имеет индекс  $-1$ .

Это построение и доказывает нашу теорему.

Для поверхности с  $g$  ручками эйлерова характеристика равна  $2 - 2g$  (проверьте!). Полагая  $g = 0$ , получаем, что эйлерова характеристика сферы равна 2.

**3. Алгебраическое число неподвижных точек. Теорема Брауэра.** Пусть задано гладкое отображение  $f: M \rightarrow M$  замкнутого ориентированного  $n$ -мерного многообразия  $M$  в себя. Будем изучать неподвижные точки отображения  $f$ , т. е. решения уравнения  $f(x) = x$ . Пусть  $x_j$  — неподвижная точка и  $(x_j^\alpha)$  — локальные координаты около этой точки; отображение  $f$  имеет вид  $x_j^\alpha = f^\alpha(x_j^1, \dots, x_j^n)$ .

**Определение 4.** Неподвижная точка  $x_j$  называется невырожденной, если матрица

$$\left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j^\beta} \Big|_{x=x_j} \right) = (1 - df) \Big|_{x=x_j}$$

невырождена. Знак  $\text{sgn det } (1 - df) \Big|_{x=x_j}$  называется *знаком неподвижной точки  $x_j$* . Сумма  $\sum_j \text{sgn det } (1 - df) \Big|_{x=x_j} = L(f)$  называется *алгебраическим числом неподвижных точек (числом Лefшеца)*, если все они невырождены. Отображение  $f$  называется *отображе-*

нием общего положения, если все его неподвижные точки невырождены.

Рассмотрим прямое произведение  $M \times M$  и выделим в нем два подмногообразия:

1) диагональ  $\Delta$ , состоящую из точек вида  $(x, x)$ ;

2) график  $\Delta(f)$  отображения  $f$ , состоящий из точек  $(x, f(x))$ .

Диагональ  $\Delta$  и график  $\Delta(f)$  представляют собой гладкие подмногообразия произведения  $M \times M$ , диффеоморфные  $M$ .

**Теорема 4.** *Индекс пересечения  $\Delta(f) \circ \Delta$  совпадает с алгебраическим числом неподвижных точек отображения  $f$ .*

**Доказательство.** Точки пересечения  $\Delta \cap \Delta(f)$  соответствуют точкам  $x_j \in M$  с  $f(x_j) = x_j$ . Пусть  $\tau^n$  — ориентирующий репер многообразия  $M$  в точке  $x_j$ ; тогда  $(\tau^n, \tau^n)$  — ориентирующий репер для  $M \times M$  в точке  $(x_j, x_j)$  диагонали  $\Delta$ . Ориентирующим репером для  $\Delta$  служит  $\tau^n \times \tau^n$ . Ориентирующий репер для  $\Delta(f)$  есть  $\tau^n \times df(\tau^n)$ , где  $df$  — дифференциал отображения  $f$  в точке  $x_j$ . Матрица перехода от репера  $(\tau^n, \tau^n)$ , ориентирующего  $M \times M$ , к составному реперу  $(\tau^n \times df(\tau^n), \tau^n \times \tau^n)$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ df & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ df & 1 - df \end{pmatrix},$$

и ее определитель равен  $\det(1 - df)$ . Теорема доказана.

**Следствие 5.** *Если отображение  $f: M \rightarrow M$  гомотопно нулю (отображению в одну точку), то  $L(f) = \pm 1$  и отображение  $f$  имеет хотя бы одну неподвижную точку.*

**Доказательство.** По теореме 2 индекс пересечения не изменится, если отображение  $f$  подвергать гомотопии. Если же отображение  $f: M \rightarrow M$  переводит все в одну точку  $x_0 = f(M)$ , то индекс пересечения  $\Delta(f) \circ \Delta$  равен  $\pm 1$ , так как пересечение диагонали  $\Delta$  с сомножителем  $\Delta(f) = M \times x_0$  есть ровно одна точка  $(x_0, x_0)$  общего положения. Следствие доказано.

**Следствие 6** (теорема Брауэра). *Всякое непрерывное отображение  $f: D^n \rightarrow D^n$  диска (или шара) в себя имеет неподвижную точку.*

**Доказательство.** Представим диск как нижнюю полусферу на сфере  $S^n$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Рассмотрим отображение складки  $\psi: S^n \rightarrow D^n$ , неподвижное на нижней полусфере и проектирующее верхнюю полусферу на нижнюю, и суперпозицию

$$S^n \xrightarrow{\psi} D^n \xrightarrow{f} D^n \xrightarrow{\psi} S^n.$$

Эта суперпозиция есть отображение  $S^n \rightarrow S^n$ , гомотопное нулю. Оно имеет неподвижную точку и эта точка лежит в  $D^n$  и является неподвижной точкой отображения  $f$ . Следствие доказано.

**Пример 1.** Отображение  $f$  окружности в себя вида  $z \mapsto z^n$  (или  $\varphi \mapsto n\varphi$ ) имеет степень  $\deg f = n$  и ровно  $n - 1$  неподвижных точек  $z^n = z$ ,  $|z| = 1$ . Эти точки суть корни из единицы,  $z^{n-1} = 1$ .

Отсюда в силу гомотопической инвариантности числа  $L(f)$  получаем, что для отображений  $S^1 \rightarrow S^1$  степени  $n$  число  $L(f)$  равно  $n - 1$ .

**Пример 2.** Отображение  $S^2 \rightarrow S^2$  вида  $z \mapsto z^n$  в комплексных координатах имеет ровно  $n$  конечных неподвижных точек в  $\mathbb{C}^1 = \mathbb{R}^2$  и одну бесконечно удаленную. Проверьте, что все эти точки не вырождены и имеют знак  $+1$ . Отсюда следует, что  $L(f) = n + 1$ .

**Задачи.** 1. Показать, что для отображения  $S^m \rightarrow S^m$  степени  $n$  число  $L(f)$  равно  $n - 1$  при нечетном  $m$  и равно  $n + 1$  при четном  $m$ . (В частности, антиподальное отображение сферы  $\xi \mapsto -\xi$ , не имеющее неподвижных точек, имеет степень  $(-1)^{m-1}$ .)

2. Вычислить число  $L(f)$  для линейного отображения  $f$   $m$ -мерного тора  $T^m$  в себя, задаваемого целочисленной матрицей  $A$  порядка  $m$ . (Тор представляется как фактор пространства  $\mathbb{R}^m$  по целочисленной решетке.)

**4. Коэффициент зацепления.** Рассмотрим теперь пару гладких замкнутых регулярных направленных кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в  $\mathbb{R}^3$ , не пересекающихся друг с другом. Пусть кривые  $\gamma_i$  задаются в виде  $\gamma_i(t) = r_i(t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , где  $r$  — радиус-вектор точки в  $\mathbb{R}^3$ .

**Определение 5.** Коэффициентом зацепления двух кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  называется число («интеграл Гаусса»)

$$\{\gamma_1, \gamma_2\} = \frac{1}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{\langle [dr_1, dr_2], r_{12} \rangle}{|r_{12}|^3}, \tag{1}$$

где  $r_{12} = r_2 - r_1$ .

Интуитивно, коэффициент зацепления представляет собой алгебраическое число витков, с которым один контур (например, провод) охватывает другой. Выражением этого является

**Теорема 5.** а) Коэффициент зацепления является целым числом и не меняется при деформациях замкнутых кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , при которых они попарно не пересекаются.

б) Рассмотрим отображение диска  $F: D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , совпадающее с  $\gamma_1$  на границе  $S^1 = \partial D^2$  и находящееся в общем положении ( $t$ -регулярное) на кривой  $\gamma_2$ . Тогда индекс пересечения  $F(D^2) \cdot \gamma_2$  совпадает с коэффициентом зацепления  $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ .

**Доказательство.** Замкнутые кривые  $\gamma_i(t) = r_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , определяют двумерную замкнутую ориентированную поверхность  $\gamma_1 \times \gamma_2: (t_1, t_2) \mapsto (r_1(t_1), r_2(t_2))$  в пространстве  $\mathbb{R}^6$ . Пусть кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  не пересекаются. Тогда определено отображение  $\Phi$  поверхности  $\gamma_1 \times \gamma_2$  в сферу  $S^2$ :

$$\Phi(t_1, t_2) = \frac{r_1(t_1) - r_2(t_2)}{|r_1(t_1) - r_2(t_2)|}.$$

Степень такого отображения как раз дается интегралом (1). Следовательно, этот интеграл — целое число. При деформациях

замкнутых кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , при которых они попарно не пересекаются, отображение  $\varphi$  меняется на гомотопное. Поэтому коэффициент зацепления  $\{\gamma_1, \gamma_2\} = \deg \varphi$  при таких деформациях не меняется.

Если кривые не зацеплены, т. е. их можно растащить по разные стороны от одной двумерной плоскости, то  $\deg \varphi = \{\gamma_1, \gamma_2\}$  есть нуль (напомним, в процессе деформации кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  не должны взаимно пересекаться). Поэтому при помощи гомотопии, указанной на рис. 90, а, б, задачу вычисления коэффициента зацепления можно свести к простейшему случаю, изображенному на рис. 90, в. Это вычисление становится особенно простым,

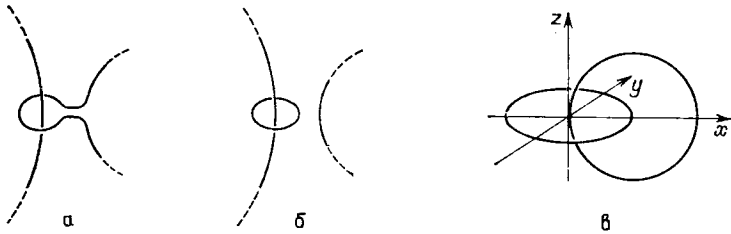


Рис. 90

если радиус одной окружности устремить к бесконечности. Таким образом, кривые  $\gamma_1, \gamma_2$  имеют вид  $r_1(t_1) = (0, 0, t_1)$ ,  $-\infty < t_1 < \infty$ ,  $r_2(t_2) = (\cos t_2, \sin t_2, 0)$ ,  $0 \leq t_2 \leq 2\pi$ . «Коэффициент зацепления» таких кривых равен

$$\begin{aligned} \{\gamma_1, \gamma_2\} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{dt_1 \wedge dt_2}{(1+t_1^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt_1}{(1+t_1^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\operatorname{ch}^2 z} = \frac{1}{2} \operatorname{th} z \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1, \end{aligned}$$

где мы сделали подстановку  $t_1 = \operatorname{sh} z$ .

Итак, для простейшего зацепления (рис. 90, в) коэффициент  $\{\gamma_1, \gamma_2\}$  равен 1; для незацепленных кривых — нулю. Отсюда легко следует утверждение теоремы.