Глава 4

# ОРИЕНТИРУЕМОСТЬ МНОГООБРАЗИЙ. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА. НАКРЫТИЯ (РАССЛОЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА С ДИСКРЕТНЫМ СЛОЕМ)

## § 16. Ориентируемость и гомотопия замкнутых путей

**1. Перенос ориентации вдоль пути.** Простейшее определение ориентации на многообразии, данное выше (см. § 1), состояло в том, что многообразие $M$ покрыто системой областей $U_j$ с координатами $(x_j^\alpha)$, причем все замены координат во всех пересечениях $U_j \cap U_k$ имеют положительный якобиан:

$$\det\left(\frac{\partial x_j^\alpha}{\partial x_k^\beta}\right) > 0.$$

Другое определение (см. § 2), эквивалентное первому, состояло в том, что на многообразии в каждой точке $x \in M$ указан класс ориентирующих касательных реперов (невырожденных $n$-реперов, $n = \dim M$), отличающихся друг от друга линейным преобразованием с положительным детерминантом. При этом класс ориентирующих реперов должен непрерывно меняться вместе с точкой многообразия $M$.

Эти определения были удобны для доказательства ориентируемости некоторых классов многообразий, например комплексных многообразий и поверхностей в $\mathbb{R}^n$, заданных неособой системой уравнений $f_1 = 0, \ldots, f_{n-k} = 0$. Нашей целью теперь является доказательство неориентируемости некоторых многообразий. Для удобства мы введем на многообразии $M$ риманову метрику $g_{ab}$. Кроме того, многообразие $M$ будем считать связным.

Определим операцию переноса ориентации вдоль путей. Пусть задан кусочно гладкий путь $\gamma = \gamma(t)$ в многообразии $M$ и невырожденный касательный $n$-репер $\tau^n(t)$ во всех точках пути $\gamma$, непрерывно зависящий от $t$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$. При этих условиях введем

Определение 1. Класс ориентации репера $\tau^n(t)|_{t=1}$ в точке $\gamma(1)$ мы будем называть *переносом класса ориентации репера* $\tau^n(0)$ *в точке* $\gamma(0)$ *вдоль пути* $\gamma$.

Операция переноса ориентации вдоль путей обладает следующими свойствами:

а) *Из любой точки $x$ можно однозначно перенести ориентацию во все достаточно близкие точки многообразия вдоль малых путей, целиком находящихся в окрестности точки $x$.*

Это свойство очевидно, так как вся малая окрестность точки $x$ находится в пределах одной координатной системы.

б) *Для любого кусочно гладкого пути $\gamma$ перенос ориентации существует и не зависит от выбора невырожденного реперного поля $\tau^n(t)$ вдоль кривой.*

Существование вытекает из возможности параллельного переноса репера вдоль гладких и кусочно гладких кривых. Независимость от выбора реперного поля доказывается так: пусть $\tau_1^n(t)$ и $\tau_2^n(t)$ — два реперных поля вдоль одной кривой $\gamma(t)$, имеющие одинаковые ориентации при $t=0$. Матрица перехода от $\tau_1^n$ к $\tau_2^n$ в момент $t$ дает матричную функцию $A(t)$ с $\det A(t)\neq 0$ при всех $t$ и $\operatorname{sgn}\det A=+1$ при $t=0$. Тогда $\operatorname{sgn}\det A=+1$ и при всех $t$.

в) *Если два кусочно гладких пути $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ соединяют одни и те же точки и могут быть переведены один в другой кусочно гладкой гомотопией, закрепленной в концах $x_0=\gamma_1(0)=\gamma_2(0)$, $x_1=\gamma_1(1)=\gamma_2(1)$, то переносы ориентации вдоль этих путей совпадают.*

Доказательство. Рассмотрим гомотопию $F(t,\tau)$, где $0\leqslant t\leqslant 1$, $0\leqslant\tau\leqslant 1$, $F(t,0)=\gamma_1(t)$, $F(t,1)=\gamma_2(t)$, и все пути $F(t,\tau)$ с любым $t=\mathrm{const}$ кусочно гладкие. Пусть $\tau^n(t)$ — реперное поле вдоль кривой $\gamma_1(t)=F(t,0)$. Совершим параллельный перенос реперов $\tau^n(t)$ вдоль кривых $F(t,\tau)$ по параметру $0\leqslant\tau\leqslant 1$. Заметим, что точки $x_0=F(0,\tau)$ и $x_1=F(1,\tau)$ неподвижны при гомотопии. В силу непрерывности операции параллельного переноса в римановой геометрии (см. часть I, § 29) получаем непрерывное реперное поле вдоль кривой $\gamma_2(t)=F(t,s)$ как результат параллельного переноса реперов $\tau^n(t)$ вдоль кривых $F(t,\tau)$, $t=\mathrm{const}$.

Из этих свойств вытекает

Теорема 1. *Связное многообразие $M$ ориентируемо тогда и только тогда, когда параллельный перенос вдоль любого замкнутого (начинающегося и кончающегося в одной точке) пути сохраняет ориентацию.*

Доказательство. Если имеется замкнутый путь $\gamma$, начинающийся и кончающийся в точке $x_0$, который обращает ориентацию (т. е. перенос репера $\tau^n$ вдоль пути $\gamma$ из $x_0$ в $x_0$ приводит к реперу другой ориентации), то ориентировать многообразие невозможно. Действительно, если в каждой точке указана одна ориентация, непрерывно зависящая от точки, то любой замкнутый путь сохраняет ориентацию репера. Докажем обратное утверждение. Пусть все замкнутые пути из $x_0$ в $x_0$ сохраняют ориентацию. Зададим первоначально ориентацию (класс реперов) в точке $x_0$. Ориентация в любой точке $x_1$ получается из ориентации в точке $x_0$ путем переноса вдоль кусочно гладкого пути $\gamma$ из $x_0$ в $x_1$. Если точки $x_0$ и $x_1$ соединяют два разных пути $\gamma_1$ и $\gamma_2$, то они дают одинаковый перенос ориентации из $x_0$ в $x_1$, поскольку иначе путь $\gamma_2^{-1}\circ\gamma_1 = q(\tau)$ из $x_0$ в $x_0$ обращал бы ориентацию. Здесь путь $\gamma_2^{-1}$ есть путь $\gamma_2$, пройденный в обратную сторону, а суперпозиция путей $\gamma_2^{-1}\circ\gamma_1$ есть путь $q(\tau)$, $0\leqslant\tau\leqslant 2$, где $q(\tau) = \gamma_1(\tau)$ при $0\leqslant\tau\leqslant 1$ и $q(\tau)=\gamma_2(2-\tau)$ при $1\leqslant\tau\leqslant 2$. Теорема доказана.

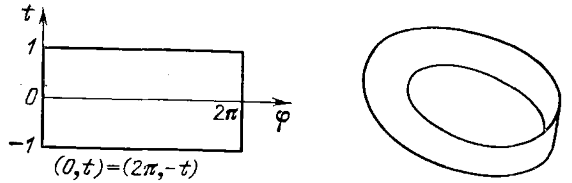


Рис. 91. Лист Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$ («односторонняя поверхность»).

**2. Примеры неориентируемых многообразий.** Пример 1. *Лист Мёбиуса* с координатами $\varphi$, $t$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $-1\leqslant t\leqslant 1$, и отождествлением $(0, t)\approx(2\pi, -t)$ (рис. 91). Непосредственно очевидно, что кривая $\gamma=(\varphi, 0)$ обращает ориентацию (проверьте!).

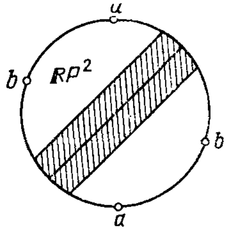


Рис. 92

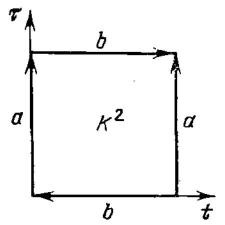


Рис. 93

Пример 2. *Проективная плоскость* $\mathbb{R}P^2$. Реализуем $\mathbb{R}P^2$ в виде диска $D^2$, у которого на границе $S^1=\partial D^2$ противоположные точки отождествлены. Окрестность проективной прямой $\mathbb{R}P^1\subset\mathbb{R}P^2$, реализованной на рис. 92 как диаметр, проходящий через начало координат, есть лист Мёбиуса (проверьте!). Поэтому $\mathbb{R}P^1$ обращает ориентацию и $\mathbb{R}P^2$ — неориентируемая поверхность.

Задача. Докажите, что многообразие $\mathbb{R}P^n$ неориентируемо при четных $n$ и ориентируемо при нечетных $n$.

Пример 3. *Бутылка Клейна.* Рассмотрим квадрат $\{(t, \tau), 0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant \tau \leqslant 1\}$ и произведем отождествление $(t, 0) \approx \approx (1-t, 1)$ и $(0, \tau) \approx (1, \tau)$ (на рис. 93 отождествляемые стороны обозначены одной буквой). Проверьте, что бутылка Клейна неориентируема.

## § 17. Фундаментальная группа

**1. Определение фундаментальной группы.** Рассмотрим произвольное линейно связное многообразие $M$ (или даже более общо — линейно связное топологическое пространство $M$) и отметим в нем некоторую точку $x_0 \in M$. Непрерывные (или кусочно гладкие) пути $\gamma_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и $\gamma_2(t)$, $1 \leqslant t \leqslant 2$, можно «перемножать» в том случае, если конец пути $\gamma_1$ совпадает с началом пути $\gamma_2$.

Определение 1. *Произведением* путей $\gamma_2$ и $\gamma_1$ называется путь $\gamma_2 \circ \gamma_1 = q(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2$, такой, что

$$q(t) = \gamma_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$
$$q(t) = \gamma_2(t), \quad 1 \leqslant t \leqslant 2.$$

Определение 2. *Обратным путем* $\gamma^{-1}(t)$ называется тот же самый путь $\gamma(t)$, но пройденный в обратную сторону: $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$, если $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Определение 3. Мы назовем пути $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ *эквивалентными*, если они отличаются монотонной заменой переменной $t = t(\tau)$: $\gamma_1(t(\tau)) = \gamma_2(\tau)$, $\frac{dt}{d\tau} > 0$. В дальнейшем мы будем называть *направленным путем* класс эквивалентных путей и выбирать наиболее удобного представителя (например, делать удобные нам сдвиги параметра).

Рассмотрим совокупность всех замкнутых направленных путей, начинающихся и кончающихся в одной и той же точке $x_0 \in M$. Это множество путей обычно обозначается через $\Omega(x_0, M)$. Совокупность всех направленных путей из точки $x_0$ в $x_1$ обозначается через $\Omega(x_0, x_1, M)$. Пути из $\Omega(x_0, M)$ можно перемножать. В этой совокупности имеется единица $e$ — это постоянный путь $e(t) \equiv x_0$ при всех $t$.

Заметим, что гомотопический класс произведения двух направленных путей не изменится, если заменить сомножители гомотопными. Поэтому можно говорить о произведении гомотопических классов направленных путей.

Теорема 1. *Гомотопические классы направленных путей из $\Omega(x_0, M)$ образуют группу относительно операции умножения, причем обратным элементом является гомотопический класс обратного пути, а единицей — гомотопический класс единичного пути.*