Пример 3. *Бутылка Клейна.* Рассмотрим квадрат $\{(t, \tau), 0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant \tau \leqslant 1\}$ и произведем отождествление $(t, 0) \approx \approx (1-t, 1)$ и $(0, \tau) \approx (1, \tau)$ (на рис. 93 отождествляемые стороны обозначены одной буквой). Проверьте, что бутылка Клейна неориентируема.

§ 17. Фундаментальная группа

1. Определение фундаментальной группы. Рассмотрим произвольное линейно связное многообразие M (или даже более общо — линейно связное топологическое пространство M) и отметим в нем некоторую точку $x_0 \in M$. Непрерывные (или кусочно гладкие) пути $\gamma_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и $\gamma_2(t)$, $1 \leqslant t \leqslant 2$, можно «перемножать» в том случае, если конец пути γ_1 совпадает с началом пути γ_2.

Определение 1. *Произведением* путей γ_2 и γ_1 называется путь $\gamma_2 \circ \gamma_1 = q(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2$, такой, что

$$q(t) = \gamma_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$
$$q(t) = \gamma_2(t), \quad 1 \leqslant t \leqslant 2.$$

Определение 2. *Обратным путем* $\gamma^{-1}(t)$ называется тот же самый путь $\gamma(t)$, но пройденный в обратную сторону: $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$, если $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Определение 3. Мы назовем пути $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ *эквивалентными*, если они отличаются монотонной заменой переменной $t = t(\tau)$: $\gamma_1(t(\tau)) = \gamma_2(\tau)$, $\frac{dt}{d\tau} > 0$. В дальнейшем мы будем называть *направленным путем* класс эквивалентных путей и выбирать наиболее удобного представителя (например, делать удобные нам сдвиги параметра).

Рассмотрим совокупность всех замкнутых направленных путей, начинающихся и кончающихся в одной и той же точке $x_0 \in M$. Это множество путей обычно обозначается через $\Omega(x_0, M)$. Совокупность всех направленных путей из точки x_0 в x_1 обозначается через $\Omega(x_0, x_1, M)$. Пути из $\Omega(x_0, M)$ можно перемножать. В этой совокупности имеется единица e — это постоянный путь $e(t) \equiv x_0$ при всех t.

Заметим, что гомотопический класс произведения двух направленных путей не изменится, если заменить сомножители гомотопными. Поэтому можно говорить о произведении гомотопических классов направленных путей.

Теорема 1. *Гомотопические классы направленных путей из $\Omega(x_0, M)$ образуют группу относительно операции умножения, причем обратным элементом является гомотопический класс обратного пути, а единицей — гомотопический класс единичного пути.*

Эта группа обозначается через $\pi_1(M, x_0)$ и называется *фундаментальной группой* в точке x_0. (Предполагается, что в процессе гомотопии пути начало и конец все время находятся в точке x_0.)

Доказательство. Покажем, что путь $\gamma^{-1}\circ\gamma$ гомотопен единице e (рис. 94). Гомотопия (деформация) пути $\gamma^{-1}\circ\gamma$ к единице осуществляется только по телу самого пути γ. Достаточно произвести эту деформацию на самом отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим отображение q отрезка $0\leqslant\tau\leqslant 2$ в отрезок $[0, 1]$, складывающее отрезок $[0, 2]$ пополам в точке $\tau=1$:

$$q(\tau)=\tau, \qquad \tau\leqslant 1,$$
$$q(\tau)=2-\tau, \quad \tau\geqslant 1.$$

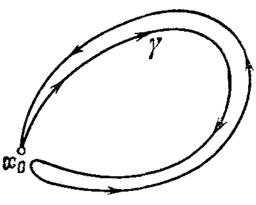

Рис. 94

Отображение $q(\tau)$ очевидной деформацией по отрезку превращается в постоянное отображение, причем в процессе деформации концы $\tau=0$ и $\tau=2$ все время отображаются в точку 0 (точка $\tau=1$ не является концом). Если задано отображение $\gamma(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, то путь $\gamma^{-1}\circ\gamma$ получается как $\gamma(q(\tau))$ по определению. Деформируя $q(\tau)$ к единице, получим деформацию пути $\gamma^{-1}\circ\gamma$ к единице в M.

Докажем ассоциативность умножения. Пусть заданы три пути γ_1, γ_2, γ_3. Определим их произведение $\gamma_1\circ\gamma_2\circ\gamma_3$ как путь $q(\tau)$ для $0\leqslant\tau\leqslant 3$, где $q=\gamma_1$ при $\tau\leqslant 1$, $q=\gamma_2$ при $1\leqslant\tau\leqslant 2$ и $q=\gamma_3$ при $\tau\geqslant 2$. Это произведение с точностью до (монотонной) замены параметра совпадает как с $(\gamma_1\circ\gamma_2)\circ\gamma_3$, так и с $\gamma_1\circ(\gamma_2\circ\gamma_3)$. Таким образом, произведение гомотопических классов ассоциативно. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь непрерывное отображение $f\colon M\to N$, где $f(x_0)=y_0$. Каждый путь $\gamma(t)$ в M переходит в путь $f(\gamma(t))$ в N, причем произведение переходит в произведение и гомотопные пути переходят в гомотопные. Если задана гомотопия $F(x, t)=f_t$ отображения $f=f_0$ такая, что $F(x_0, t)\equiv x_0$, то гомотопия замкнутых путей, начинающихся и кончающихся в точке x_0, также сохраняется. Итак, доказана

Теорема 2. *При непрерывных отображениях пространств (многообразий) $f\colon M\to N$ таких, что $f(x_0)=y_0$, фундаментальная группа испытывает гомоморфизм*

$$f_*\colon\pi_1(M, x_0)\to\pi_1(N, y_0),$$

который не меняется при гомотопии отображения f, оставляющей неподвижной точку x_0. В частности, если $M=N$ и отображение f гомотопно постоянному отображению $M\to x_0$, то гомоморфизм f_* тривиален (любой элемент переходит в 1). Если отображение f гомотопно тождественному отображению 1_M, то гомоморфизм f_* является изоморфизмом.

2. Зависимость от начальной точки. Выясним теперь зависимость фундаментальной группы $\pi_1(M, x_0)$ от точки x_0. Определим операцию *переноса* группы $\pi_1(M, x_0)$ в группу $\pi_1(M, x_1)$ вдоль пути γ из x_0 в x_1.

Теорема 3. *Всякий путь γ, идущий из x_0 в x_1, определяет изоморфизм γ^*: $\pi_1(M, x_1) \to \pi_1(M, x_0)$. Этот изоморфизм зависит лишь от гомотопического класса пути γ (в процессе гомотопии концы стоят на месте в точках x_0 и x_1, т. е. гомотопия происходит среди путей из $\Omega(x_0, x_1, M)$). Если начало и конец совпадают: $x_0 = x_1$, то путь γ сам представляет элемент $\pi_1(M, x_0)$; изоморфизм γ^* является в этом случае внутренним:*

$$\gamma^*(\alpha) = \gamma^{-1}\alpha\gamma.$$

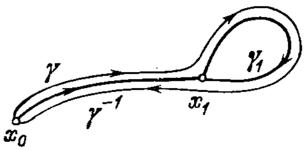

Рис. 95

Доказательство. Если γ_1 — путь, представляющий элемент $\pi_1(M, x_1)$, то путь $\gamma^*(\gamma_1)$, представляющий элемент $\pi_1(M, x_0)$, определяется как $\gamma^{-1} \circ \gamma_1 \circ \gamma$ (рис. 95). Произведение $\gamma_1 \circ \gamma_2$ переходит при этом в $\gamma^*(\gamma_1 \circ \gamma_2) = \gamma^{-1} \circ \gamma_1 \circ \gamma \circ \gamma^{-1} \circ \gamma_2 \circ \gamma$ и гомотопно $\gamma^*(\gamma_1) \circ \gamma^*(\gamma_2)$. Таким образом, отображение γ^* является гомоморфизмом

$$\gamma^*: \pi_1(M, x_1) \to \pi_1(M, x_0).$$

Рассмотрим обратный путь γ^{-1} из x_1 в x_0. Получим гомоморфизм

$$(\gamma^{-1})^*: \pi_1(M, x_0) \to \pi_1(M, x_1).$$

Обе суперпозиции $\gamma^* \circ (\gamma^{-1})^*$ и $(\gamma^{-1})^* \circ \gamma^*$ дают тождественные изоморфизмы групп $\pi_1(M, x_0)$ и $\pi_1(M, x_1)$. Поэтому γ^* и $(\gamma^{-1})^*$ являются взаимно обратными изоморфизмами. Если $x_0 = x_1$, то из определения гомоморфизма γ^* очевидно, что $\gamma^*(\alpha) = \gamma^{-1} \circ \alpha \circ \gamma$ для любого элемента α из $\pi_1(M, x_0)$. Теорема доказана.

3. Свободные гомотопические классы отображений окружности. Рассмотрим теперь задачу о классификации «свободных» гомотопических классов отображений окружности S^1 в линейно связное многообразие M (или топологическое пространство). При этом начальная точка на окружности S^1 не отмечена.

Теорема 4. *Множество $[S^1, M]$ гомотопических классов отображений $S^1 \to M$ находится в естественном взаимно однозначном соответствии с классами сопряженных элементов в группе $\pi_1(M, x_0)$ (при любой точке x_0).*

Доказательство. Отметим на окружности S^1, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, начальную точку $\varphi_0 = 0$. Докажем сначала, что всякое отображение γ: $S^1 \to M$ гомотопно такому, при котором точка φ_0 переходит в заданную точку x_0 из M. Рассмотрим образ $\gamma(\varphi_0) = x_1$ и соединим точки x_1 и x_0 путем γ_1. Рассмотрим путь $q(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 3$,

$q = \gamma_1^{-1}\gamma\gamma_1$, из x_0 в x_0:

$$q = \gamma_1, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1,$$
$$q = \gamma, \quad 1 \leqslant \tau \leqslant 2,$$
$$q = \gamma_1^{-1}, \quad 2 \leqslant \tau \leqslant 3.$$

Путь q гомотопен пути γ как отображение окружности и переводит точку φ_0 в x_0.

Таким образом, каждому гомотопическому классу отображений $S^1 \to M$ соответствует элемент из $\pi_1(M, x_0)$, но, возможно, не один. Рассмотрим два элемента α_1 и α_2 из $\pi_1(M, x_0)$, гомотопные как отображения окружности $S^1 \to M$, где в процессе гомотопии $F(\varphi, t)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, начальная точка $\varphi = 0$ движется по замкнутому пути p из x_0 в x_0:

$$F(\varphi, 0) = \alpha_1, \quad F(\varphi, 1) = \alpha_2, \quad F(\varphi_0, t) = p(1-t).$$

Наглядно очевидно, что путь α_1 определяет в группе $\pi_1(M, x_0)$ тот же элемент $p^{-1}\alpha_2 p$ (рис. 96). Обратно, пути α_1 и $\alpha_2 = p\alpha_1 p^{-1}$ свободно гомотопны (как отображения $S^1 \to M$ — рис. 97). На

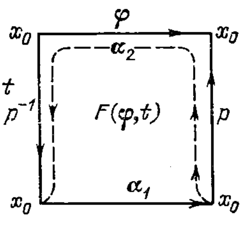

Рис. 96

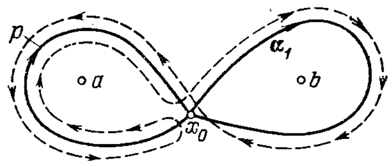

Рис. 97

рис. 97 показана плоская область с двумя выколотыми точками a и b. Пути p и α_1 охватывают точки a и b. Путь $\alpha_2 = p\alpha_1 p^{-1}$ показан пунктирной линией. Наглядно очевидно, что этот путь можно снять с точки a и перевести деформацией в путь α_1, двигая начало вдоль пути p (можно проделать с ниткой). Теорема доказана.

4. Гомотопическая эквивалентность. Во многих случаях открытое многообразие M размерности n (например, область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$) можно стянуть по себе к подмножеству меньшей размерности (вообще говоря, не к подмногообразию), для которого вычисление фундаментальной группы π_1 и других инвариантов значительно проще. Чтобы это аккуратно сформулировать, введем важное понятие гомотопической эквивалентности. Пусть заданы два многообразия (топологических пространства) M и N и два непрерывных отображения (гладких или кусочно гладких в случае многообразий)

$$f\colon M \to N,$$
$$g\colon N \to M.$$

Суперпозиции $f \circ g\colon N \to N$ и $g \circ f\colon M \to M$ отображают многообразия N и M в себя. Для каждого из них имеется тождественное отображение: $1_M\colon M \to M$ и $1_N\colon N \to N$.

Определение 4. Многообразия (пространства) M и N называются *гомотопически эквивалентными* друг другу, если найдутся такие отображения f и g, что суперпозиции $f \circ g$ и $g \circ f$ гомотопны тождественным отображениям 1_N и 1_M соответственно. Если M и N гомотопически эквивалентны, то будем писать $M \sim N$.

Основное свойство гомотопически эквивалентных пространств M и N состоит в следующем: *для любого многообразия (пространства) K множества гомотопических классов отображений $[K, M]$ и $[K, N]$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии.*

Доказательству этого факта мы предпошлем следующее замечание. Понятие гомотопической эквивалентности можно слегка модифицировать, введя отмеченные точки. Именно, будем считать, что в M и N отмечены точки x_0 и y_0 соответственно, и потребуем, чтобы отображения f, g и гомотопии, связывающие $f \circ g$ и $g \circ f$ с 1_N и 1_M, переводили отмеченные точки в отмеченные. Можно показать, что для достаточно хороших пространств, как, скажем, многообразий, новое понятие гомотопической эквивалентности не отличается от старого.

Сформулированное выше свойство гомотопически эквивалентных пространств также имеет модифицированную формулировку: *если пространства с отмеченной точкой M и N гомотопически эквивалентны, то для любого пространства K с отмеченной точкой k_0 множества гомотопических классов отображений $K \to M$ и $K \to N$, переводящих отмеченную точку в отмеченную, находятся в естественном взаимно однозначном соответствии.*

Доказательство. Отображения f и g естественным образом порождают отображения множеств гомотопических классов

$$f_*\colon [K, M] \to [K, N] \text{ и } g_*\colon [K, N] \to [K, M].$$

Очевидно, $(fg)_* = (gf)_* = 1$ и $(fg)_* = f_* g_*$, $(gf)_* = g_* f_*$. Отсюда следует, что отображения f_* и g_* взаимно обратны и $[K, M] \approx \approx [K, N]$.

При наличии отмеченных точек доказательство дословно такое же.

5. Примеры. Пример 1. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ (как и любая стягиваемая область в нем) гомотопически эквивалентно одной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^n \sim x_0$.

Доказательство. Вложение $f\colon x_0 \to \mathbb{R}^n$ и постоянное отображение $g\colon \mathbb{R}^n \to x_0$ таковы, что $g \circ f = 1_{x_0}$, а отображение $f \circ g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, переводящее все $\mathbb{R}^n$ в x_0, гомотопно тождественному отображению $1_{\mathbb{R}^n}$. Действительно, гомотопия $F(x, t)$ задается формулой $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) = x_0$ и $F(x, t) = (1-t)(x - x_0)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Для любого множества $A \subset \mathbb{R}^n$, которое по себе стягивается к точке $x_0 \in A$, доказательство аналогично (проведите его!).

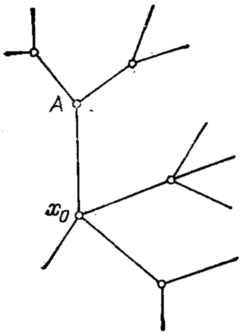

Рис. 98. Дерево $A \sim x_0$.

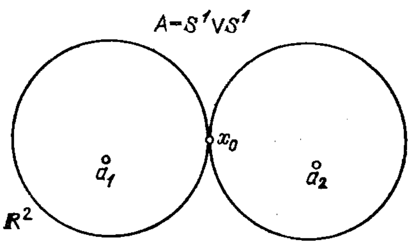

Рис. 99. Букет двух окружностей.

Примеры таких областей дает единичный шар D^n и любая гомеоморфная ему область. Стягиваемым является также дерево A (т. е. граф или одномерный комплекс, не имеющий циклов) (рис. 98). Все эти объекты гомотопически эквивалентны точке и имеют тривиальную фундаментальную группу

$$\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = 1, \quad \pi_1(D^n, x_0) = 1, \quad \pi_1(A, x_0) = 1.$$

Пример 2. Рассмотрим область на плоскости $\mathbb{R}^2$, из которой выколото несколько точек $a_1, \ldots, a_n$. Область $\mathbb{R}^2 \setminus (a_1 \cup \ldots \cup a_n)$ гомотопически эквивалентна «букету» окружностей, скрепленных в одной точке (см. рис. 99; на этом рисунке деформация $\mathbb{R}^2 \setminus (a_1 \cup a_2)$ к букету A наглядно очевидна). В частности, для одной точки $a \in \mathbb{R}^2$ область $\mathbb{R}^2 \setminus a$ гомотопически эквивалентна окружности S^1 (задайте гомотопию формулой!).

Пример 3. Область, получающаяся из $\mathbb{R}^3$ удалением одной точки a, гомотопически эквивалентна сфере S^2. Область, получающаяся из $\mathbb{R}^3$ удалением целого набора точек $a_1, \ldots, a_k$, гомотопически эквивалентна букету k сфер S^2 (проверьте!). Область $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1$ гомотопически эквивалентна окружности S^1 (проверьте!).

Пример 4. Рассмотрим сферу $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$ и область U в S^3, полученную удалением некоторой окружности S^1 (несамопересекающейся): $S^3 \setminus S^1$.

Задача. Если окружность S^1 незаузлена (т. е. задается, например, уравнением $x^2+y^2=1$ в плоскости $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \cup S^3$), то область $U=S^3\setminus S^1$ гомотопически эквивалентна окружности S^1; область $V=U\setminus(\text{точка}) = \mathbb{R}^3\setminus S^1$ гомотопически эквивалентна букету окружности S^1 и двумерной сферы S^2 (рис. 100).

Используя полученные результаты, получаем для фундаментальной группы $\pi_1(M, x_0)$:

а) $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \pi_1(D^n) = \pi_1(A) = 1$ (где A — любое стягиваемое по себе к точке множество);

б) $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — группа целых чисел или циклическая группа с одной образующей; это следует из гомотопической классификации отображений $S^1 \to S^1$, данной в § 13;

в) $\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus a_1) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{R}^3\setminus\mathbb{R}^1)$;

г) $\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus(a_1 \cup \ldots \cup a_n)) = \pi_1(S^1_1 \vee \ldots \vee S^1_n)$ (букет окружностей; для $n=2$ — «восьмерка»);

д) $\pi_1(S^3\setminus S^1) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ (см. пример 4).

Задача. $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus S^1) = \mathbb{Z}$ (если окружность $S^1 \subset \mathbb{R}^3$ незаузлена).

е) Легко доказывается следующее утверждение:

$$\pi_1(S^n, x_0) = 1 \quad \textit{при} \quad n > 1.$$

Доказательство. Рассмотрим кусочно гладкое отображение $f\colon S^1 \to S^n$ при $n>1$. У правильной точки $y_0 \in S^n$ полный прообраз пуст, так как $n>1$. Поэтому образ $f(S^1)$ лежит в $\mathbb{R}^n$ и стягивается к точке. Утверждение доказано.

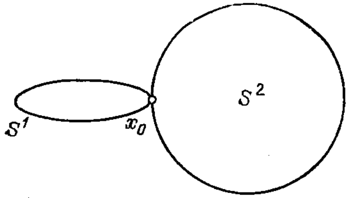

Рис. 100. Букет $S^1 \vee S^2$.

Замечание. Аналогичное рассуждение показывает, что для любого многообразия K размерностей $<n$ множество гомотопических классов $[K, S^n]$ тривиально (состоит из одного элемента).

В дальнейшем мы вычислим фундаментальную группу ряда конкретных многообразий (и пространств): букетов окружностей и тем самым областей на плоскости $\mathbb{R}^2$, замкнутых поверхностей, областей $\mathbb{R}^3\setminus S^1$, где окружность S^1 может быть и заузлена.

6. Фундаментальная группа и ориентируемость. Из результатов § 16 следует, что каждый гомотопический класс замкнутого пути на многообразии M с началом и концом x_0 (т. е. элемент из $\pi_1(M, x_0)$) сохраняет или обращает ориентацию репера при переносе, т. е. имеет знак $+1$ или -1. Возникает гомоморфизм

$$\sigma\colon \pi_1(M, x_0) \to \{\pm 1\} = \mathbb{Z}_2$$

в группу $\mathbb{Z}_2$ из двух элементов: $\sigma(\gamma) = \operatorname{sgn}\gamma = \pm 1$. Для ориентируемых многообразий гомоморфизм σ тривиален; для неориентируемых нетривиален, так как имеются пути, обращающие ориентацию. Получаем

Следствие. *Фундаментальная группа неориентируемого многообразия нетривиальна и имеет ненулевой гомоморфизм* σ *в группу из двух элементов.*

Для листа Мёбиуса имеем $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$, так как лист Мёбиуса стягивается к центральной окружности S^1. Для проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ имеем $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \neq 1$. Ниже будет показано, что $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$.

§ 18. Накрытие и накрывающая гомотопия

1. Определение и фундаментальные свойства накрытий. Понятие накрытия возникает из рассмотрения графиков многозначных функций, у которых число значений постоянно и ветви нельзя разделить.

Рассмотрим регулярное отображение $f\colon M \to N$ многообразий одинаковой размерности, обладающее следующими свойствами.

а) Якобиан отображения f отличен от нуля во всех точках x многообразия M:

$$\det\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right) \neq 0,$$

где y^α — координаты около точки $y \in N$, x^β — координаты около точки $x \in M$.

б) Каждая точка $y \in N$ обладает окрестностью $U_j \subset N$, полный прообраз которой $f^{-1}(U_j)$ представляет собой объединение непересекающихся областей: $f^{-1}(U_j) = V_{1j} \cup V_{2j} \cup \ldots$, причем на каждой области V_{kj} отображение $f\colon V_{kj} \to U_j$ является диффеоморфизмом между V_{kj} и U_j. Будем считать, что все многообразие N покрыто конечным или счетным числом таких областей U_j, причем каждая точка $y \in N$ (и даже каждое компактное множество в N) принадлежит лишь конечному числу этих областей. Аналогичное требование накладывается на покрытие многообразия M областями V_{kj}.

Определение 1. Отображение $f\colon M \to N$, обладающее свойствами а) и б), называется *накрытием*. Фактически для определения накрытия достаточно лишь свойства б). Многообразие N называется *базой накрытия*, а M называется *пространством накрытия* (*накрывающим пространством*). *Слоем* накрытия F называется полный прообраз любой точки $F = f^{-1}(y)$. Число областей V_{kj} в полном прообразе $f^{-1}(U_j)$ (или число точек слоя) называется *числом листов*. Если это число конечно и равно m, то накрытие называется m-листным.

Пусть многообразие N связно; накрытие называется *неприводимым*, если многообразие M также связно. Накрытие называется