руемых нетривиален, так как имеются пути, обращающие ориентацию. Получаем

Следствие. *Фундаментальная группа неориентируемого многообразия нетривиальна и имеет ненулевой гомоморфизм* σ *в группу из двух элементов.*

Для листа Мёбиуса имеем $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$, так как лист Мёбиуса стягивается к центральной окружности S^1. Для проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ имеем $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \neq 1$. Ниже будет показано, что $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$.

§ 18. Накрытие и накрывающая гомотопия

1. Определение и фундаментальные свойства накрытий. Понятие накрытия возникает из рассмотрения графиков многозначных функций, у которых число значений постоянно и ветви нельзя разделить.

Рассмотрим регулярное отображение $f\colon M \to N$ многообразий одинаковой размерности, обладающее следующими свойствами.

а) Якобиан отображения f отличен от нуля во всех точках x многообразия M:

$$\det\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right) \neq 0,$$

где y^α — координаты около точки $y \in N$, x^β — координаты около точки $x \in M$.

б) Каждая точка $y \in N$ обладает окрестностью $U_j \subset N$, полный прообраз которой $f^{-1}(U_j)$ представляет собой объединение непересекающихся областей: $f^{-1}(U_j) = V_{1j} \cup V_{2j} \cup \ldots$, причем на каждой области V_{kj} отображение $f\colon V_{kj} \to U_j$ является диффеоморфизмом между V_{kj} и U_j. Будем считать, что все многообразие N покрыто конечным или счетным числом таких областей U_j, причем каждая точка $y \in N$ (и даже каждое компактное множество в N) принадлежит лишь конечному числу этих областей. Аналогичное требование накладывается на покрытие многообразия M областями V_{kj}.

Определение 1. Отображение $f\colon M \to N$, обладающее свойствами а) и б), называется *накрытием*. Фактически для определения накрытия достаточно лишь свойства б). Многообразие N называется *базой накрытия*, а M называется *пространством накрытия* (*накрывающим пространством*). *Слоем* накрытия F называется полный прообраз любой точки $F = f^{-1}(y)$. Число областей V_{kj} в полном прообразе $f^{-1}(U_j)$ (или число точек слоя) называется *числом листов*. Если это число конечно и равно m, то накрытие называется m-листным.

Пусть многообразие N связно; накрытие называется *неприводимым*, если многообразие M также связно. Накрытие называется *тривиальным*, если многообразие M есть прямое произведение $M = N \times F$, где слой дискретен (совокупность конечного или счетного множества изолированных точек).

Имеет место

Лемма 1. *Число листов накрытия не зависит от выбора точки $y \in N$, если N связно.*

Доказательство. Соединим две точки y_0 и y_1 кусочно гладким несамопересекающимся путем $\gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на K равных кусков δ_k длины $\frac{1}{K}$, где $\frac{k}{K} \leqslant t \leqslant \frac{k+1}{K}$ в отрезке δ_k, $k = 0, \ldots, K-1$. Число K выберем столь большим, что каждый отрезок пути $\gamma(\delta_k)$ целиком попадает в одну область U_j, указанную в определении накрытия. По определению накрытия полный прообраз $f^{-1}(\gamma(\delta_k))$ есть набор отрезков,

$$f^{-1}(\gamma(\delta_k)) = \delta_{jk,1} \cup \delta_{jk,2} \cup \ldots,$$

где отрезки $\delta_{jk,q}$ лежат целиком в областях $V_{jk,q}$ и изоморфно проектируются в отрезок пути $\gamma(\delta_k)$ при отображении f. Таким образом, в пределах отрезка δ_k полный прообраз каждой точки пути γ меняется непрерывно с временем t, причем его точки не сливаются друг с другом. Поэтому у всех точек пути $\gamma(\delta_k)$ прообразы одинаковы. Дойдя до конца отрезка δ_k, повторим это рассуждение с отрезком δ_{k+1} уже в области U_{jk+1} и т. д. (всего K раз) до конца отрезка $[0, 1]$. Лемма доказана.

Из доказательства леммы 1 вытекает также

Лемма 2. *Полный прообраз кусочно гладкого несамопересекающегося пути γ (с разными концами y_0 и y_1) является прямым произведением отрезка γ на слой F, т. е. объединением непересекающихся отрезков в количестве, равном числу точек слоя: $f^{-1}(\gamma) = \gamma \times F$. Каждый из этих отрезков изоморфно проектируется при отображении f на путь γ в базе N.*

Доказательство. Если точки слоя при $t = 0$, $\gamma(0) = y_0$, занумерованы индексами $1, 2, \ldots$, то введем в множество $F = f^{-1}(\gamma)$ координаты t, n, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$, так: при $t = 0$ точкам слоя $F = f^{-1}(y_0) = f^{-1}(\gamma(0))$ придадим координаты $(0, n)$ согласно нумерации точек слоя. Двигаясь вдоль γ, переносим нумерацию точек слоя $F = f^{-1}(\gamma(t))$ по непрерывности, как в доказательстве леммы 1, и придаем им координаты (t, n). Лемма 2 доказана.

Определение 2. Мы скажем, что путь $\mu(t)$ в M *накрывает* путь $\gamma(t)$ в N, если $f(\mu(t)) = \gamma(t)$. Из леммы 2 вытекает

Следствие 1. *Для любого кусочно гладкого пути $\gamma(t)$ в N накрывающий путь $\mu(t)$ в M существует и однозначно определяется одной своей точкой $\mu(t_0) \in M$, где $f\mu(t_0) = \gamma(t_0)$.*

Для доказательства достаточно разбить $\gamma(t)$ на несамопересекающиеся куски и применить лемму 2.

Пусть K — любое многообразие (топологическое пространство), q: $K \to M$ — его отображение на базу накрытия N (пусть кусочно гладкое) и F: $K \times I \to N$ — гомотопия (кусочно гладкая) этого отображения q, т. е. $F(x, 0) = q(x)$ при $x \in K$. Имеет место

Теорема 1 (теорема о накрывающей гомотопии). *Если отображение q накрыто отображением $\tilde{q}$: $K \to M$, т. е. если $f\tilde{q} = q$, то гомотопия F: $K \times I \to N$ отображения q в базе N однозначно накрывается гомотопией $\tilde{F}$: $K \times I \to M$, т. е. $f\tilde{F} = F$ и $\tilde{F}(x, 0) = \tilde{q}(x)$ при $x \in K$.*

Доказательство. При гомотопии F отображения q в базе N каждая точка $q(x)$ движется по пути $\gamma_x(t) = F(x, t)$. При $t = 0$ эта точка $\gamma_x(0) = q(x)$ накрыта точкой $\tilde{q}(x)$. Теорема следует теперь из леммы 2 и следствия 1 вместе с замечанием, что рецепт накрытия пути непрерывно (даже гладко) зависит от начальной точки. Теорема доказана.

2. Простейшие примеры. Универсальное накрытие.

Пример 1. Пусть $M = \mathbb{R}^1$ (прямая) и $N = S^1$. Накрытие определяется так: $f(t) = e^{2\pi i t}$, где t — координата на прямой $\mathbb{R}^1$. Здесь число листов равно ∞.

Пример 2. Пусть $M = S^1$ и $N = S^1$, а накрытие определяется формулой $f(z) = z^n$, где $|z| = 1$. Это накрытие имеет $|n|$ листов. Та же формула $z \mapsto z^n$ определяет накрытие области $M = \mathbb{R}^2 \setminus 0 = \mathbb{C}^*$ над той же областью.

Пример 3. Пусть $M = S^n$ и $N = \mathbb{R}P^n$. Накрытие определяется отображением f: $S^n \to \mathbb{R}P^n$, склеивающим противоположные точки сферы x и $-x$. Здесь число листов равно 2.

Частным случаем этого накрытия является групповой гомоморфизм

$$SU(2) = S^3 \to SO(3) = \mathbb{R}P^3,$$

изучавшийся в части I (см. § 14). Другим примером двулистного накрытия является групповой гомоморфизм

$$S^3 \times S^3 = SU(2) \times SU(2) \to SO(4),$$

ядро которого состоит из элементов $(1, 1)$ и $(-1, -1)$ (см. часть I, § 14).

Пример 4. Пусть $M = \mathbb{R}^n$. Рассмотрим подгруппу группы $\mathbb{R}^n$ (по сложению), состоящую из векторов с целочисленными координатами. Эта подгруппа обозначается через $\mathbb{Z}^n$. Фактор-группа $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ есть тор T^n (при $n = 1$ — окружность). Отображение f: $\mathbb{R}^n \to T^n$ есть накрытие (проверьте!).

Пример 5. Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$ и подгруппу G в группе движений плоскости (x, y), порожденную преобразованиями

$$T_1(x, y) = (x, y + 1), \quad T_2(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}, -y\right).$$

При отождествлении всех точек, получающихся друг из друга преобразованиями из группы G, получится бутылка Клейна K^2; проекция $f\colon \mathbb{R}^2 \to K^2$ является бесконечнолистным накрытием. Бутылка Клейна K^2 строится склейками, как указано на рис. 101. Проверьте, что образующие группы G связаны соотношением $T_2^{-1}T_1T_2T_1 = 1$. В группе G лежит подгруппа $G' = \mathbb{Z}^2$ индекса 2, порожденная преобразованиями T_1, $T_2^2 \in G$. Подгруппа G' определяет тор T^2 из примера 4, так как $T_2^2(x, y) = (x+1, y)$. Факторгруппа $\mathbb{R}^2/G'$ есть тор T^2, который накрывает двулистно бутылку Клейна, поскольку в каждой орбите группы G на плоскости $\mathbb{R}^2$ имеется ровно две орбиты группы $G' = \mathbb{Z}^2$.

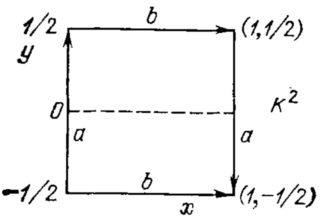

Рис. 101

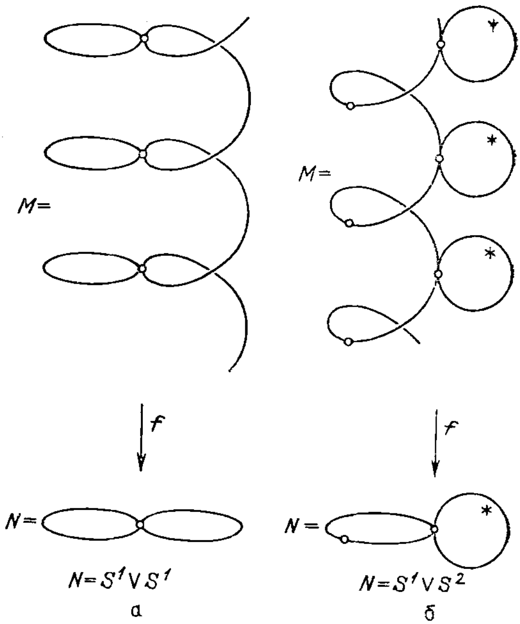

Рис. 102

Пример 6. Укажем наглядно накрытие над восьмеркой (букетом двух окружностей) и над букетом $S^1 \vee S^2$ окружности и сферы (рис. 102, *а* и *б*; отображение f выглядит в обоих случаях как проекция вниз на рисунке). Как видно из рисунка, накрытие над $N = S^1 \vee S^2$ имеет вид (топологически) набора сфер S^2, прикрепленных к прямой $\mathbb{R}^1$ (нарисованной как винтовая линия) в целых точках.

Пример 7. Укажем наглядно еще одно («универсальное») накрытие над восьмеркой $S^1 \vee S^1$ (рис. 103). Здесь M — это бесконечное дерево из «крестов», не имеющее циклов (и поэтому стягиваемое). Из каждой вершины («креста») выходит ровно четыре ребра. Центры крестов (вершины графа) суть прообразы точки $x_0 \in S^1 \vee S^1$. Каждое из ребер переходит либо в цикл a, либо в цикл b. В каждой вершине креста из четырех ребер два переходят в a и два в b.

Для целей вычисления фундаментальной группы мы введем важное

Определение 2. Накрытие $f\colon M\to N$ называется *универсальным*, если $\pi_1(M)=1$ (т. е. пространство M односвязно).

Из числа приведенных примеров универсальными накрытиями являются:

а) $\mathbb{R}^1\to S^1$ (пример 1);

б) $S^n\to \mathbb{R}P^n$ при $n\geqslant 2$ (пример 3);

в) $SU(2)\times SU(2)\to SO(4)$;

г) $\mathbb{R}^n\to T^n$ (пример 4);

д) $\mathbb{R}^2\to K^2$ (пример 5);

е) $M\to S^1\vee S^2$ (пример 6, рис. 102, *б*);

ж) дерево $M\to S^1\vee S^1$ (пример 7).

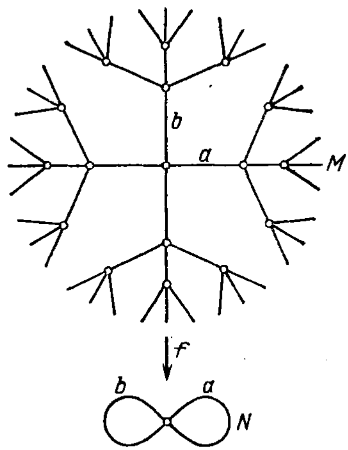

Рис. 103. M — бесконечное дерево из «крестов», не имеющее циклов (и поэтому стягиваемое). Из каждой вершины «креста» выходит ровно четыре ребра.

Остальные накрытия, указанные в примерах, не являются универсальными ввиду неодносвязности накрывающего пространства.

3. Разветвленные накрытия. Римановы поверхности. Продолжим рассмотрение примеров накрытий. Введем следующий класс накрытий.

1. Пусть сначала M и N — замкнутые гладкие многообразия одной размерности n и отображение f *регулярно* (т. е. якобиан отображения f во всех точках отличен от нуля). При этих условиях верна

Теорема 2. *Отображение $f\colon M\to N$ является конечнолистным накрытием.*

Доказательство. По теореме об обратной функции у каждой точки x многообразия M имеется окрестность V_x, в которой отображение f является диффеоморфизмом. В силу компактности многообразия M отсюда вытекает, что прообраз $f^{-1}(y)$ любой точки $y\in M$ состоит из конечного числа точек. Поэтому у точки y многообразия N можно выбрать такую окрестность U_y, что для любой точки $x_i\in f^{-1}(U_y)$ отображение f ее окрестности V_i в U_y является диффеоморфизмом. Таким образом, полный прообраз некоторой окрестности U_y любой точки $y\in N$ распадается в объединение непересекающихся окрестностей $f^{-1}(U_y)=V_1\cup\ldots$ $\ldots\cup V_m$, и отображение f — диффеоморфизм на каждой из окрестностей V_i. Теорема доказана.

2. Пусть M и N — по-прежнему замкнутые гладкие многообразия одной размерности n, но гладкое отображение $f\colon M\to N$ не

всюду регулярно: на некотором множестве $A \subset M$ якобиан этого отображения обращается в нуль. Вообще говоря, размерность множества A равна $n-1$. Однако бывает, что размерность множества A меньше $n-1$. Важным случаем такого рода является случай, когда n четно, оба многообразия M и N являются комплексными, а отображение $f\colon M \to N$ комплексно аналитично (голоморфно). В этом случае условие обращения в нуль якобиана отображения f задается одним комплексным (аналитическим) уравнением в комплексных локальных координатах. Поэтому размерность множества особенностей A не превышает $n-2$ и множество A не разделяет M на куски.

При этих условиях имеет место

Теорема 3. *Пусть размерность множества A нулей якобиана отображения $f\colon M \to N$ одного гладкого замкнутого связного n-мерного многообразия в другое не превышает $n-2$ (и, значит, множество $f(A)$ не разделяет многообразия N). Положим $N' = N \setminus f(A)$ и $M' = M \setminus f^{-1}(f(A))$. Отображение $f\colon M' \to N'$ является накрытием с конечным числом листов, причем M' связно.*

Замечание. Само исходное отображение $f\colon M \to N$ называется *накрытием с ветвлением вдоль* $f(A)$, а множество $f(A)$ называется множеством *точек ветвления.*

Доказательство. Рассмотрим достаточно малое $\varepsilon > 0$ и удалим из N открытую ε-окрестность U_ε множества $f(A)$, а из M ее прообраз $f^{-1}(U_\varepsilon)$. Оставшееся многообразие с краем $M_\varepsilon = M \setminus f^{-1}(U_\varepsilon)$ отображается в $N_\varepsilon = N \setminus U_\varepsilon$, и оба многообразия M_ε, N_ε связны и компактны. Для отображения $f\colon M_\varepsilon \to N_\varepsilon$ доказательство теоремы 2 повторяется буквально. Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем теорему 3.

Связность N, M есть единственное использованное в этом доказательстве следствие предположения размерности множества особенностей A.

Важный класс примеров дают неособые римановы поверхности Γ, заданные неособым комплексно аналитическим, в частности алгебраическим, уравнением в (z, w)-плоскости $\mathbb{C}^2$:

$$\Phi(z, w) = w^n + a_1(z) w^{n-1} + \ldots + a_n(z) = 0,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — многочлены от z. Это уравнение задает риманову поверхность Γ n-значной функции $w(z)$.

Проекция $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ продолжается до проекции замкнутой римановой поверхности $\hat{\Gamma}$ (вместе с бесконечно удаленными точками в $\mathbb{C}P^2$) на сферу $\mathbb{C}P^1 = S^2$. Положим $M = \hat{\Gamma}$ и $N = S^2$. Множество $f(A)$ есть множество точек ветвления римановой поверхности $\hat{\Gamma}$. Это — набор точек плоскости $\mathbb{C}$ и, возможно, точка ∞. Обозначим через N' плоскость $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = S^2 \setminus \infty$ с выброшенными точками ветвления z_α. Полный прообраз $f^{-1}(z_\alpha)$ состоит из точек $(z_\alpha, w_{\alpha j}) = P_{\alpha j}$ поверхности Γ таких, что $\left.\frac{\partial \Phi}{\partial w}\right|_{z=z_\alpha, w=w_{\alpha j}} = 0$.

Удалим из $\widehat{\Gamma}$ полный прообраз $f^{-1}(z_\alpha)$ для всех α и $f^{-1}(\infty)$. Оставшееся многообразие обозначим через M'. Имеем n-листное накрытие $f\colon M' \to N'$.

Замечание. Мы видим, что для отыскания полного прообраза точек ветвления на поверхности Γ нужно решить совместно систему уравнений

$$\Phi(z, w) = 0, \quad \frac{\partial \Phi(z, w)}{\partial w} = 0.$$

Пример 8. $\Phi(w, z) = w^2 - P_n(z) = 0$ (гиперэллиптическая поверхность). Если корни $P_n(z_\alpha) = 0$ некратны, то Γ — неособая гиперэллиптическая риманова поверхность (см. § 17, а также часть I, § 12). Здесь $N' = \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup\limits_\alpha z_\alpha\right)$, $M' = \Gamma \setminus \left(\bigcup\limits_\alpha f^{-1}(z_\alpha)\right)$ и $f\colon M' \to N'$ — двулистное накрытие.

Пример 9. $\Phi(w, z) = w^k - P_n(z) = 0$. Здесь все аналогично, но мы получаем над областью $N' = \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup\limits_\alpha z_\alpha\right)$ k-листное накрытие $f\colon M' \to N'$.

Пример 10. Рассмотрим общий многочлен степени n от z, w

$$\Phi(z, w) = w^n + \sum_{i>1} a_i(z)\, w^{n-i},$$

где при каждом i степень многочлена $a_i(z)$ (по z) не превосходит i. В общем случае для многочлена Φ имеется ровно $n(n-1)$ точек ветвления z_α, получающихся из решения системы уравнений $\Phi = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial w} = 0$ в $\mathbb{C}^2$. (Предполагается, что система уравнений $\Phi = 0$, $\Phi_w = 0$ не вырождена; тогда число точек ветвления равно $n(n-1)$.) Полагая $N' = \mathbb{C}^2 \setminus \left(\bigcup\limits_\alpha z_\alpha\right)$ и $M' = \Gamma \setminus \left(\bigcup\limits_\alpha f^{-1}(z_\alpha)\right)$, получаем n-листное накрытие $f\colon M' \to N'$.

Пример 11. Функция $\Phi(z, w)$ является комплексно аналитической (но не алгебраической), и поверхность $\Phi = 0$ неособа в $\mathbb{C}^2$. Точки ветвления z_α в z-плоскости образуют, вообще говоря, счетное множество. Потребуем, чтобы эти точки ветвления были достаточно далеки друг от друга в $\mathbb{C}$. Накрытие над областью $N' = \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup\limits_\alpha z_\alpha\right)$ будет, вообще говоря, бесконечнолистным. Простейший пример дает уравнение $z - e^w = 0$. В этом случае $w = \ln z$, $z_\alpha = 0$; над областью $\mathbb{C} \setminus 0 = N'$ возникает накрытие (логарифмическое ветвление)

$$f\colon M' \to N' = \mathbb{C} \setminus 0.$$

Покажите, что M' диффеоморфно плоскости $\mathbb{C}$.

4. Накрытия и дискретные группы преобразований. Следующий важный класс накрытий связан с так называемыми дискретными группами преобразований многообразий.

Пусть M — гладкое многообразие (топологическое пространство) и G — группа, действующая в M посредством диффеоморфизмов (гомеоморфизмов для общих пространств).

Определение 3. Группа G называется *дискретной группой преобразований*, если для любой точки y многообразия (или пространства) M орбита группы $G(y)$ представляет собой множество точек в M, расположенное дискретно. Это означает, что любая точка $y \in M$ обладает малой окрестностью U такой, что образы $g(U)$ для всех элементов g группы G либо совпадают, либо не пересекаются. Мы потребуем дополнительно, чтобы дискретная группа действовала свободно. Это означает следующее: для любой точки $y \in M$ уравнение $g(y) = y$ имеет единственное решение $g = 1$; при этом указанные выше окрестность U точки y и окрестность $g(U)$ точки $g(y)$ не пересекаются при $g \neq 1$.

Для многообразий часто (хотя и не всегда) будем рассматривать дискретные группы G преобразований, являющиеся движениями некоторой римановой метрики (g_{ab}).

Определение 4. Скажем, что накрытие $f\colon M \to N$ определяется свободно действующей дискретной группой G преобразований $M \to M$, если для любой точки базы $y \in N$ слой $F = f^{-1}(y)$ является орбитой группы G. В этом случае говорят, что N есть факторпространство многообразия M по группе G, и пишут $N = M/G$. Такое накрытие называют *регулярным* или *главным расслоением* с дискретной группой G; ниже, в главе 6, будут изучаться главные расслоения и с недискретными группами G.

Рассматривавшиеся выше примеры 1—9 были накрытиями, определявшимися различными дискретными группами преобразований. Напротив, накрытия примера 10 (общие алгебраические римановы поверхности) и примера 11 (кроме простейшего логарифмического ветвления), вообще говоря, не определяются свободно действующими дискретными группами.

§ 19. Накрытия и фундаментальная группа. Вычисление фундаментальной группы некоторых многообразий

1. Монодромия. Введем важное понятие — группу монодромии накрытия («дискретная группа голономий») или «представление монодромии» σ. Рассмотрим точку y_0 базы N накрытия $f\colon M \to N$ и занумеруем произвольным образом точки слоя $F = f^{-1}(y_0) = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Рассмотрим замкнутый путь γ на N с началом и концом y_0, представляющий элемент $\gamma \in \pi_1(N, y_0)$. Используя следствие 1 из леммы 18.2, накроем движение точки y_0 вдоль пути γ по параметру t, отправляясь из некоторой точки слоя $x_j \in F$. Пройдя вдоль пути γ и вернувшись снова к точке $y_0 = \gamma(1)$, получим в качестве конечной точки накрывающего пути $\mu(t)$ некоторую точку $x_{\sigma(j)} = \mu(1)$ того же слоя F. Получаем