Пусть M — гладкое многообразие (топологическое пространство) и G — группа, действующая в M посредством диффеоморфизмов (гомеоморфизмов для общих пространств).

Определение 3. Группа G называется *дискретной группой преобразований*, если для любой точки y многообразия (или пространства) M орбита группы $G(y)$ представляет собой множество точек в M, расположенное дискретно. Это означает, что любая точка $y \in M$ обладает малой окрестностью U такой, что образы $g(U)$ для всех элементов g группы G либо совпадают, либо не пересекаются. Мы потребуем дополнительно, чтобы дискретная группа действовала свободно. Это означает следующее: для любой точки $y \in M$ уравнение $g(y) = y$ имеет единственное решение $g = 1$; при этом указанные выше окрестность U точки y и окрестность $g(U)$ точки $g(y)$ не пересекаются при $g \neq 1$.

Для многообразий часто (хотя и не всегда) будем рассматривать дискретные группы G преобразований, являющиеся движениями некоторой римановой метрики (g_{ab}).

Определение 4. Скажем, что накрытие $f\colon M \to N$ определяется свободно действующей дискретной группой G преобразований $M \to M$, если для любой точки базы $y \in N$ слой $F = f^{-1}(y)$ является орбитой группы G. В этом случае говорят, что N есть факторпространство многообразия M по группе G, и пишут $N = M/G$. Такое накрытие называют *регулярным* или *главным расслоением* с дискретной группой G; ниже, в главе 6, будут изучаться главные расслоения и с недискретными группами G.

Рассматривавшиеся выше примеры 1—9 были накрытиями, определявшимися различными дискретными группами преобразований. Напротив, накрытия примера 10 (общие алгебраические римановы поверхности) и примера 11 (кроме простейшего логарифмического ветвления), вообще говоря, не определяются свободно действующими дискретными группами.

§ 19. Накрытия и фундаментальная группа. Вычисление фундаментальной группы некоторых многообразий

1. Монодромия. Введем важное понятие —группу монодромии накрытия («дискретная группа голономий») или «представление монодромии» σ. Рассмотрим точку y_0 базы N накрытия $f\colon M \to N$ и занумеруем произвольным образом точки слоя $F = f^{-1}(y_0) = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Рассмотрим замкнутый путь γ на N с началом и концом y_0, представляющий элемент $\gamma \in \pi_1(N, y_0)$. Используя следствие 1 из леммы 18.2, накроем движение точки y_0 вдоль пути γ по параметру t, отправляясь из некоторой точки слоя $x_j \in F$. Пройдя вдоль пути γ и вернувшись снова к точке $y_0 = \gamma(1)$, получим в качестве конечной точки накрывающего пути $\mu(t)$ некоторую точку $x_{\sigma(j)} = \mu(1)$ того же слоя F. Получаем соответствие $\gamma \mapsto \sigma(\gamma)$, где $\sigma(\gamma)$ есть некоторая перестановка точек слоя F:

$$\sigma(\gamma)\colon x_j \mapsto x_{\sigma(j)}.$$

Из теоремы 18.1 получаем, что перестановка $\sigma(\gamma)$ зависит только от гомотопического класса $\gamma \in \pi_1(N, y_0)$. Очевидно, $\sigma(\gamma^{-1}) = \sigma(\gamma)^{-1}$ и $\sigma(\gamma_1\gamma_2) = \sigma(\gamma_1) \circ \sigma(\gamma_2)$. Таким образом, σ является гомоморфизмом (представлением) фундаментальной группы $\pi_1(N, y_0)$ в группу перестановок точек слоя F (считаем их занумерованными целыми числами). Представление σ называется «монодромией» или дискретной голономией накрытия, а его образ $\sigma(\pi_1(N, y_0))$ — «группой монодромии».

Укажем группу (представление) монодромии накрытий в простейших примерах 1—4 из § 18.

Пример 1. $\mathbb{R}^1 \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$. Группа $\pi_1(S^1)$ изоморфна $\mathbb{Z}$; обозначим через a естественную образующую этой группы. Прообраз точки $\varphi_0 = 0$ окружности S^1 состоит из целых точек прямой ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Точки слоя $F = f^{-1}(0)$, таким образом, естественно занумерованы целыми числами. Монодромия $\sigma(a)$ представляет собой сдвиг:

$$\sigma(a)\colon n \mapsto n + 1.$$

Пример 2. $S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$, $|z| = 1$. Прообраз точки состоит из точек $z_k = \exp(2\pi k/n)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Преобразование монодромии $\sigma(a)$ есть циклическая перестановка:

$$\sigma(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \ldots n-1 \\ 1 & 2 \ldots \ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. $S^n \to \mathbb{R}P^n$. Точка $y_0 \in \mathbb{R}P^n$ имеет два прообраза x_1 и x_2. Преобразование $\sigma(a)$ переставляет их: $x_1 \mapsto x_2$, $x_2 \mapsto x_1$. Здесь $a \in \pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$ — класс замкнутого пути в $\mathbb{R}P^n$, получающегося проекцией из сферы пути $\tilde{\gamma}$, соединяющего две противоположные точки сферы S^n.

Аналогично $\pi_1(SO(4)) = \mathbb{Z}_2$ с образующей a, и $\sigma(a)$ есть перестановка двух точек в накрывающем пространстве $SU(2) \times SU(2)$. Аккуратное вычисление этих фундаментальных групп будет проведено ниже.

Пример 4. Группа $\pi_1(T^n)$ изоморфна $\mathbb{Z}^n$ с образующими $a_1, \ldots, a_n$. Образующая a_j получается при отображении $f\colon \mathbb{R}^n \to T^n$ из прямолинейного отрезка $\tilde{\gamma}_j$, соединяющего точку 0 с точкой $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где координата x^j равна 1, а остальные — нули. Путь $a_j = f(\tilde{\gamma}_j)$ определяет монодромию

$$\sigma(a_j) = \begin{pmatrix} m_1 \ldots & m_j & \ldots m_n \\ m_1 \ldots & m_j + 1 & \ldots m_n \end{pmatrix},$$

где точки прообраза $F=f^{-1}(0)$ занумерованы целочисленными векторами $(m_1, \ldots, m_n)$.

Мы оставим читателю исследование монодромии в довольно простых примерах 5 и 6 и опишем монодромию в примерах 7 и 10 (см. § 18).

Пример 7. Универсальное накрытие над восьмеркой $N = S^1 \vee S^1$ с образующими $a_1 = a \in \pi_1(S^1 \vee S^1)$, $a_2 = b \in \pi_1(S^1 \vee S^1)$ обладает свободной группой монодромии. Это означает, что все слова вида

$$a_{i_1}^{n_1} a_{i_2}^{n_2} \ldots a_{i_k}^{n_k}$$

для любых k, целых $n_q \neq 0$ и при условии $i_q \neq i_{q+1}$ различны в группе монодромии: преобразование $\sigma(a_1)$ сдвигает все вершины и ребра на единицу «вправо», а $\sigma(a_2)$ — на единицу «вверх». Легко проверить с помощью рис. 103, изображающего это накрытие, что два разных слова в свободной группе переведут начальную вершину x_0 в разные вершины этого дерева.

Пример 10. Для многочлена общего типа $\Phi(z, w)$ суммарной степени n по z, w имеется ровно $n(n-1)$ невырожденных точек ветвления $z_{(jk)}$, j, $k = 1, \ldots, n$, где $k \neq j$. Удалим из $\mathbb{C}$ все точки $z_{(jk)}$ и выберем начальную точку $y_0 \in N'$, где $N' = \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup\limits_{j,k} z_{(jk)} \right)$. Выберем базисные пути $a_{(jk)}$, однократно обходящие точки ветвления $z_{(jk)}$ (рис. 104). Оказывается, что путь $a_{(jk)}$ производит перестановку ровно двух точек слоя $F = f^{-1}(y_0) = x_1 \cup \ldots \cup x_n$. При подходящей нумерации $\sigma(a_{(jk)})$ и $\sigma(a_{(kj)})$ переставляют точку x_j с точкой x_k, оставляя остальные точки неподвижными, причем $\sigma(a_{(jk)})\sigma(a_{(kj)}) = 1$. Таким образом, группа монодромии оказывается полной группой перестановок точек слоя F, состоящей из $n!$ элементов. Тот факт, что $\sigma(a_{(jk)})$ переставляет лишь пару листов, следует из того, что для римановой поверхности общего типа проекция $\Gamma \to \mathbb{C}$ имеет вырождение низшего порядка в точках вырождения (образы их — точки ветвления). Мы оставляем эти утверждения в виде задач.

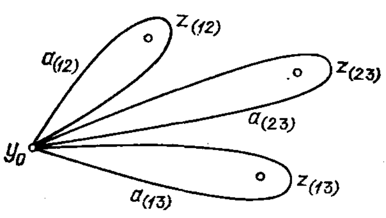


Рис. 104

Что группа монодромии для общих римановых поверхностей Γ совпадает с группой всех перестановок точек слоя, оказывается очень важным. Мы рекомендуем читателю самостоятельно доказать следующее утверждение: *если риманова поверхность Γ_1 построена по многозначной алгебраической функции $w = w(z)$, являющейся алгебраическим выражением, содержащим только радикалы $\sqrt[k]{}$ для разных k (и, возможно, их суперпозиции с опера-*

циями сложения и умножения), то группа монодромии поверхности Γ_1 разрешима. Напомним, что разрешимая группа содержит абелев (коммутативный) нормальный делитель G, факторгруппа по которому также разрешима.

Группа перестановок из пяти элементов и более не является разрешимой. Ее единственным нормальным делителем является подгруппа из четных перестановок, которая неабелева. Отсюда следует

Теорема (Абель). *Не существует никакой алгебраической формулы в радикалах, выражающей корни общего многочлена степени $\geqslant 5$ через его коэффициенты.*

2. Вычисление фундаментальной группы с помощью накрытий. Рассмотрим накрытие $f\colon M \to N$, точку $y_0 \in N$ и точки ее прообраза $f^{-1}(y_0) = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Представление монодромии σ заставляет группу $\pi_1(N, y_0)$ действовать в слое $F = f^{-1}(y_0)$ посредством перестановок его точек:

$$\sigma(\alpha)\colon x_j \mapsto x_{\sigma(j)} \qquad (\alpha \in \pi_1(N, y_0)).$$

Рассмотрим группу $\pi_1(M, x_j)$, которая гомоморфно отображается в группу $\pi_1(N, y_0)$ при проекции $f\colon M \to N$. Имеет место

Теорема 1. *Гомоморфизм $f_*\colon \pi_1(M, x_j) \to \pi_1(N, y_0)$, индуцированный проекцией f, является вложением группы $\pi_1(M, x_j)$ в $\pi_1(N, y_0)$ (мономорфизмом). Подгруппа $f_*\pi_1(M, x_j)$ группы $\pi_1(N, y_0)$ состоит из тех элементов $\alpha \in \pi_1(N, y_0)$, для которых монодромия $\sigma(\alpha)$ оставляет на месте точку x_j. Для разных точек x_j, x_k подгруппы $f_*\pi_1(M, x_j)$ и $f_*\pi_1(M, x_k)$ сопряжены с помощью любого элемента $\gamma \in \pi_1(N, y_0)$, для которого монодромия $\sigma(\gamma)$ обладает тем свойством, что $\sigma(\gamma)\colon x_j \mapsto x_k$, т. е. $\gamma^{-1} f_*\pi_1(M, x_j)\gamma = f_*\pi_1(M, x_k)$.*

Доказательство. Если $\alpha \in \pi_1(M, x_j)$ и $f_*(\alpha) = 1$ в группе $\pi_1(N, y_0)$, то $\alpha = 1$. Действительно, пусть замкнутый путь $\alpha(t)$ с началом и концом в x_j таков, что его проекция $f(\alpha(t)) = \gamma(t)$ стягивается в точку по многообразию N, причем концы пути $\gamma(t)$ в процессе гомотопии все время стоят в точке y_0 (при всех τ); гомотопию обозначим через $F = F(t, \tau)$. Поскольку $f(\alpha(t)) = \gamma(t) = F(t, 0)$, мы находимся в условиях теоремы о накрывающей гомотопии (теорема 18.1). В качестве накрывающей гомотопии, даваемой этой теоремой, получим деформацию в M пути $\alpha(t)$ в точке x_j. Таким образом, гомоморфизм f_* есть вложение (мономорфизм) группы $\pi_1(M, x_j)$ в $\pi_1(N, y_0)$.

Согласно теореме 17.3 перенос начала из x_j в x_k можно осуществить, выбрав путь $\tilde{\gamma}(t)$ с началом $x_k = \tilde{\gamma}(0)$ и $x_j = \tilde{\gamma}(1)$ и полагая $\alpha \mapsto \tilde{\gamma}^*(\alpha) = \tilde{\gamma}^{-1}\alpha\tilde{\gamma}$ (для $\alpha \in \pi_1(M, x_j)$ имеем $\tilde{\gamma}^*(\alpha) \in \pi_1(M, x_k)$). Проекция $\tilde{f}(\gamma)$ в N дает замкутый путь $\gamma(t) = f(\tilde{\gamma}(t))$, представляющий элемент группы $\pi_1(N, y_0)$, и $\sigma(\gamma)$:

$x_j \mapsto x_k$. Очевидно, после применения проекции f_* наш перенос превратится в изоморфизм $f_*\pi_1(M, x_j) \to f_*\pi_1(M, x_k)$, действующий по формуле

$$f_*(\alpha) \mapsto \gamma^{-1} f_*(\alpha)\gamma \in f_*\pi_1(M, x_k),$$

где $f_*(\alpha) \in f_*\pi_1(M, x_j)$. Теорема доказана.

Задачи. 1. Доказать, что для любой подгруппы H фундаментальной группы $\pi_1(N)$ произвольного многообразия N существует накрытие $f\colon M \to N$ с $f_*\pi_1(M) = H$: в частности, у всякого многообразия есть универсальное накрытие.

2. Доказать, что если для накрытий $f\colon M \to N$, $f'\colon M' \to N$ над многообразием N группы $f_*\pi_1(M)$ и $f'_*\pi_1(M')$ совпадают, то накрытия эквивалентны (т. е. существует гомеоморфизм $\varphi\colon M \to M'$ такой, что $f' \circ \varphi = f$).

Замечание. В обеих задачах требование, чтобы N было многообразием, может быть значительно ослаблено. Например, как мы видели выше, универсальным накрытием обладают такие пространства, как восьмерка и букет окружности и двумерной сферы (см. рис. 102 и 103).

Теорема 2. *Если накрытие $f\colon M \to N$ определяется свободно действующей дискретной группой Γ преобразований $M \to M$ и многообразие (пространство) M односвязно (т. е. $\pi_1(M) = 1$), то*

$$\pi_1(N, y_0) \approx \Gamma.$$

Доказательство. Выберем точку $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ и установим взаимно однозначное соответствие между точками слоя $f^{-1}(y_0)$ (они имеют вид gx_0 с $g \in \Gamma$ и элементами группы $\pi_1(N, y_0)$). Для этого накроем произвольный путь $\gamma_1 \in \pi_1(N, y_0)$, взяв в качестве начала накрывающего пути точку x_0. Конец накрывающего пути лежит в точке $x_1 \neq x_0$, и $\sigma(\gamma_1)\colon x_0 \mapsto x_1$. Рассмотрим элемент $g_1 \in \Gamma$ такой, что $g_1(x_0) = x_1$. Установим соответствие $\gamma_1 \leftrightarrow g_1$. Это соответствие взаимно однозначно (если $\gamma_1 \to g_1$ и $\gamma_2 \to g_1$, то путь $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ таков, что $\sigma(\gamma_1^{-1}\gamma_2)\colon x_0 \mapsto x_0$; поэтому ввиду односвязности M и теоремы 1 этого параграфа $\gamma_1 = \gamma_2$). Установленное выше взаимно однозначное соответствие $\Gamma \leftrightarrow \pi_1(N)$ сохраняет закон умножения в обеих группах, поскольку преобразование $\sigma(\gamma)$ точек слоя в точности совпадает с действием группы Γ на слое. Теорема доказана.

Обобщением теоремы 2 является

Теорема 3. *Если накрытие $f\colon M \to N$ регулярно, т. е. определяется свободно действующей дискретной группой Γ преобразований $M \to M$ («главное расслоение»), то группа Γ перестановок слоя $F = f^{-1}(y_0)$ совпадает с группой монодромии $\sigma(\pi_1(N, y_0))$, действующей на слое F. При этом $f_*\pi_1(M, x_j)$ есть нормальный делитель группы $\pi_1(N, y_0)$ и группа монодромии («дискретная группа голономии») совпадает с факторгруппой $\pi_1(N, y_0)/f_*\pi_1(M, x_j)$ для любой точки x_j слоя F.*

Доказательство. Совпадение группы Γ с группой монодромии вытекает из рассуждения, идентичного доказательству теоремы 2. При этом устанавливается соответствие между элементами группы Γ, точками слоя F и элементами группы $\sigma(\pi_1(N, y_0))$. Отсюда следует, что образ $f_*\pi_1(M, x_j)$ не зависит от $x_j \in F$ и потому является нормальным делителем в $\pi_1(N, y_0)$ согласно теореме 1 этого параграфа. По определению монодромии слой F совпадает с $\pi_1(N, y_0)/f_*\pi_1(M, x_j)$ как множество. В данном случае $F \approx \Gamma$ и F является группой $\pi_1(N, y_0)/f_* \pi_1(M, x_j)$, совпадающей с группой монодромии. Теорема доказана.

Задача. Докажите, что для общих (нерегулярных) накрытий группа монодромии изоморфна факторгруппе $\pi_1(N, y_0)/P$ по нормальному делителю $P = \bigcap\limits_j f_*\pi_1(M, x_j)$.

Примеры.

1. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ действует сдвигами $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ на целые числа (см. пример 1 из § 18), поскольку S^1 является базой накрытия $\mathbb{R}^1 \mapsto S^1$, определяемого действием дискретной группы $\Gamma = \mathbb{Z}$.

2. $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$ при $n > 1$ ввиду наличия накрытия $S^n \to \mathbb{R}P^n$ с группой $\Gamma = \mathbb{Z}_2$, ненулевой элемент которой есть отражение $x \mapsto -x$ сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (при $n > 1$ сфера односвязна; см. пример 3 из § 18).

3. $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$ ввиду наличия накрытия $\mathbb{R}^n \to T^n$ с группой Γ параллельных переносов на целочисленные векторы (см. пример 4 из § 18).

4. $\pi_1(K^2)$ имеет две образующие T_1 и T_2, удовлетворяющие соотношению

$$T_2^{-1}T_1T_2T_1 = 1.$$

Здесь подразумевается накрытие $\mathbb{R}^2 \to K^2$, а группа Γ порождена движениями $T_1(x, y) = (x, y+1)$, $T_2(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}, -y\right)$ (см. пример 5 из § 18).

5. $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ — свободная группа с двумя образующими. Это устанавливается с помощью универсального накрытия, описанного в примере 7 из § 18. Аналогично можно показать, что $\pi_1(S^1 \vee \ldots \vee S^1)$ для букета k окружностей есть свободная группа с k образующими. Следовательно, фундаментальные группы плоских областей вида $\mathbb{R}^2 \setminus (x_1 \cup \ldots \cup x_k)$ (из плоскости выколото k точек $x_1, \ldots, x_k$) являются свободными. Эти области стягиваются к (гомотопически эквивалентны) букетам окружностей $S^1 \vee \ldots \vee S^1$ (k штук).

6. $\pi_1(S^1 \vee S^2) = \mathbb{Z}$. Это доказывается с помощью универсального накрытия, описанного в примере 6 из § 18. Пространство M имеет вид прямой $\mathbb{R}^1$, у которой в целых точках прикреплены сферы $S^2_{(n)}$. Группа Γ действует сдвигами по прямой на целое

число, переводящими сферы $S^2_{(n)}$ друг в друга. Пространство $S^1 \vee S^2$ гомотопически эквивалентно области $U = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$, если окружность незаузлена (или $V = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^1 \cup x_0)$).

3. Простейшая гомологическая группа. Определение 1. *Одномерной группой гомологий* многообразия (пространства) M называется факторгруппа его фундаментальной группы по коммутанту (коммутированная группа π_1). Эта группа обозначается через $H_1(M)$:

$$H_1(M) = \pi_1(M)/[\pi_1, \pi_1].$$

Групповой закон в группе $H_1(M)$ обычно записывается как сложение: $a \to [a]$, $ab \to [a] + [b]$ при гомоморфизме $\pi_1 \to H_1$.

Рассмотрим интегралы от замкнутых 1-форм на многообразии N. Если форма ω замкнута, $d\omega = 0$, то интеграл по замкнутому пути γ с началом и концом в точке y_0 одинаков для гомотопных замкнутых путей. Следовательно, интеграл от замкнутой формы ω дает линейную функцию на группе π_1:

$$\gamma \mapsto \oint_\gamma \omega.$$

Очевидные свойства интеграла показывают, что

$$\oint_{\gamma_1\gamma_2} \omega = \oint_{\gamma_1} \omega + \oint_{\gamma_2} \omega = \oint_{\gamma_2\gamma_1} \omega,$$

$$\oint_{\gamma^{-1}} \omega = -\oint_{\gamma} \omega.$$

Отсюда следует, что интеграл есть линейная функция на группе $H_1(N) = \pi_1(N)/[\pi_1, \pi_1]$ с вещественными или комплексными значениями, а известная процедура вычисления интеграла путем «деформации контура» есть фактически замена контура γ на эквивалентный ему в группе гомологий. Пусть в группе $H_1(N)$ есть периодический элемент («класс гомологий») $[\gamma] \in H_1(N)$, для которого найдется целое число m такое, что $m[\gamma] = 0$ в группе $H_1(M)$. Тогда интеграл $\oint_{[\gamma]} \omega$ равен нулю для замкнутой формы ω.

Действительно,

$$\oint_{m[\gamma]} \omega = m \oint_{\gamma} \omega = 0.$$

Поэтому $\oint_{[\gamma]} \omega = 0.$

Вследствие этого интегралы от замкнутых форм определены как линейные функции на группе $\bar{H}_1(N)$, полученной из $H_1(N)$ факторизацией по кручению (приравниванием нулю всех элементов конечного порядка). Группа $\tilde{H}_1$ называется *приведенной группой гомологий.*

Примеры.

а) Для плоской области $N = \mathbb{R}^2 \setminus (x_1 \cup \ldots \cup x_k)$: группа $\pi_1(N)$ свободна, а группа $H_1(N)$ не имеет кручения и тем самым есть свободная абелева группа (решетка) $\mathbb{Z}^k$.

б) Для $\mathbb{R}P^n$: группа $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$ есть $\mathbb{Z}_2$, группа $H_1(\mathbb{R}P^n)$ есть также $\mathbb{Z}_2$ и группа $\tilde{H}_1(\mathbb{R}P^2)$ тривиальна.

в) Для бутылки Клейна K^2: группа $\pi_1(K^2)$ имеет образующие T_1, T_2, удовлетворяющие соотношению $T_2^{-1}T_1T_2T_1 = 1$; в группе $H_1(K^2)$ это соотношение принимает вид

$$2[T_1] = 0,$$

и потому элемент $[T_1] \sim 0$ в группе $\tilde{H}_1(K^2)$; группа $\tilde{H}_1(K^2)$ изоморфна $\mathbb{Z}$.

Итак, интеграл от замкнутой формы дает линейную функцию на «приведенной группе гомологий» $\tilde{H}_1(N)$ со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Иногда полезны линейные функции с другими значениями, например так называемые «характеры» со значениями в вещественных числах $\mathrm{mod}\,1$, т. е. в окружности. Здесь уже группы $\tilde{H}_1(N)$ недостаточно — приходится рассматривать всю группу гомологий $H_1(N)$. Примером может служить гомоморфизм ориентации (в мультипликативной записи)

$$\sigma\colon \pi_1(N) \to (\pm 1) = \mathbb{Z}_2$$

(см. § 17). Фактически этот гомоморфизм сводится к $H_1(N)$. Для $\mathbb{R}P^2$ и K^2 этот гомоморфизм нетривиален, как и для всех неориентируемых многообразий (см. конец § 17).

а) Для $\mathbb{R}P^2$ имеем $\pi_1 = \mathbb{Z}_2$ и $\sigma(a) = -1$ при $a \neq 1$.

б) Для K^2 группа $\pi_1(K^2)$ порождается элементами T_1, T_2 и $2[T_1] = 0$ в группе $H_1(K^2)$. Гомоморфизм ориентации таков:

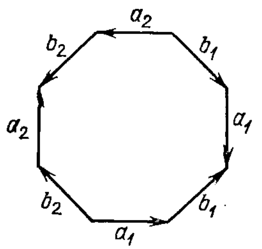
$$\sigma(T_1) = +1, \quad \sigma(T_2) = -1.$$

Вычисление фундаментальных групп дополнений в $\mathbb{R}^3$ к заузленным окружностям будет дано ниже (см. § 26).

Задачи. 1. Ориентируемая замкнутая поверхность M_g^2 (сфера с g ручками) получается из $4g$-угольника склеиванием пар противоположных сторон (см. рис. 105 для $g = 2$). Доказать, что группа $\pi_1(M_g^2)$ задается образующими a_1, b_1, ..., a_g, b_g и соотношением

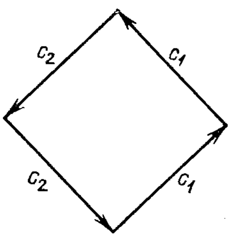
$$\prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = 1.$$

2. Неориентируемая поверхность N^2_μ клеится так, как указано на рис. 106. Доказать, что $\pi_1(N^2_\mu)$ задается образующими $c_1, \ldots, c_\mu$ и соотношением $c_1^2 c_2^2 \ldots c_\mu^2 = 1$.



$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = 1$

Рис. 105



$c_1^2 c_2^2 = 1$

Рис. 106

3. Вычислить фундаментальную группу многообразия единичных линейных элементов поверхности M^2_g.

§ 20. Дискретные группы движений плоскости Лобачевского

Выше (в части I) мы описали дискретные группы движений евклидовой плоскости и дискретные группы вращений трехмерного евклидова пространства. Мы указали на тесную связь этих групп с кристаллическими решетками на плоскости и в пространстве. Аналогичную классификацию можно провести и для дискретных групп движений плоскости Лобачевского, снабженной стандартной метрикой. В настоящем параграфе мы предъявим это описание, опустив доказательства ввиду большей сложности рассуждений, чем это имело место в евклидовом случае. Описание дискретных групп движений трехмерного пространства Лобачевского — это еще более сложная задача, которой мы не будем здесь касаться. Интерес к дискретным группам движений плоскости Лобачевского обусловлен для нас тем, что эти группы тесно связаны с двумерными замкнутыми многообразиями и их фундаментальными группами. При описании двумерных поверхностей мы отметили, что тор, например, можно представить как факторпространство плоскости (пространства нулевой кривизны) по действию дискретной группы $\mathbb{Z}(a) \oplus \mathbb{Z}(b)$, где образующие a и b определяют трансляции на векторы вида (1, 0) и (0, 1). Поскольку эта группа свободно действует на $\mathbb{R}^2$, то она изоморфна фундаментальной группе тора $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Отметим, что сфера S^2 не может быть представлена как факторпространство плоскости по действию какой-либо дискретной группы. Это связано, в частности, с тем, что сфера — односвязное многообразие,