2. Неориентируемая поверхность N_μ^2 клеится так, как указано на рис. 106. Доказать, что $\pi_1(N_\mu^2)$ задается образующими $c_1, \ldots, c_\mu$ и соотношением $c_1^2 c_2^2 \ldots c_\mu^2 = 1$.

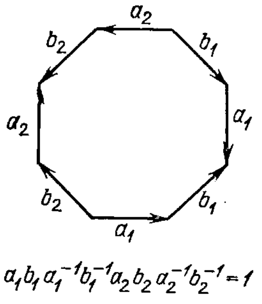


Рис. 105

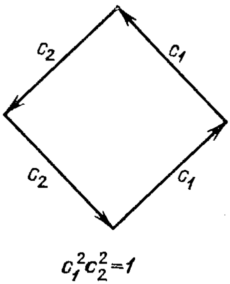


Рис. 106

3. Вычислить фундаментальную группу многообразия единичных линейных элементов поверхности M_g^2.

§ 20. Дискретные группы движений плоскости Лобачевского

Выше (в части I) мы описали дискретные группы движений евклидовой плоскости и дискретные группы вращений трехмерного евклидова пространства. Мы указали на тесную связь этих групп с кристаллическими решетками на плоскости и в пространстве. Аналогичную классификацию можно провести и для дискретных групп движений плоскости Лобачевского, снабженной стандартной метрикой. В настоящем параграфе мы предъявим это описание, опустив доказательства ввиду большей сложности рассуждений, чем это имело место в евклидовом случае. Описание дискретных групп движений трехмерного пространства Лобачевского — это еще более сложная задача, которой мы не будем здесь касаться. Интерес к дискретным группам движений плоскости Лобачевского обусловлен для нас тем, что эти группы тесно связаны с двумерными замкнутыми многообразиями и их фундаментальными группами. При описании двумерных поверхностей мы отметили, что тор, например, можно представить как факторпространство плоскости (пространства нулевой кривизны) по действию дискретной группы $\mathbb{Z}(a) \oplus \mathbb{Z}(b)$, где образующие a и b определяют трансляции на векторы вида $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Поскольку эта группа свободно действует на $\mathbb{R}^2$, то она изоморфна фундаментальной группе тора $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Отметим, что сфера S^2 не может быть представлена как факторпространство плоскости по действию какой-либо дискретной группы. Это связано, в частности, с тем, что сфера — односвязное многообразие, и ее гауссова кривизна положительна. Оказывается, что, например, ориентируемые поверхности рода >1 можно представить в виде факторпространства плоскости Лобачевского по действию дискретной группы, изоморфной фундаментальной группе поверхности. При этом указанная дискретная группа будет действовать как подгруппа группы изометрий стандартной метрики Лобачевского, а потому фактормногообразие (действие группы будет свободным, без неподвижных точек) автоматически снабжается индуцированной метрикой постоянной отрицательной кривизны. В случае тора фундаментальная группа $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ также действовала на евклидовой плоскости как подгруппа группы изометрий.

Начнем с геометрической классификации дискретных групп движений плоскости Лобачевского и связи этих групп с выпуклыми многоугольниками на плоскости Лобачевского.

Основными моделями плоскости Лобачевского, которыми мы будем пользоваться, будут следующие две модели: верхняя полуплоскость (на комплексной плоскости), снабженная метрикой $dl^2=\dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$, и единичный круг, снабженный метрикой $dl^2=\dfrac{dr^2+r^2d\varphi^2}{(1-r^2)^2}$. Напомним, что Γ называется дискретной группой преобразований (в нашем случае — плоскости Лобачевского), если для любой пары точек x, $y\in L_2$ (через L_2 мы обозначаем плоскость Лобачевского) существуют такие открытые окрестности этих точек (например, диски с центром в точках x и y), что множество преобразований из группы Γ, переводящих окрестность точки x в множество, имеющее непустое пересечение с окрестностью точки y, конечно. Напомним, что мы считаем все преобразования из Γ диффеоморфизмами плоскости Лобачевского. Если Γ_x — стационарная подгруппа точки x (т. е. множество всех преобразований группы Γ, оставляющих на месте точку x), то Γ_x — конечная подгруппа в Γ. Верно и обратное утверждение: если Γ — некоторая группа изометрий плоскости Лобачевского, действующая так, что все орбиты этого действия дискретны и для любой точки плоскости ее стационарная подгруппа конечна, то тогда Γ — дискретная группа.

Определение 1. Пусть Γ — дискретная группа преобразований плоскости Лобачевского, являющаяся подгруппой группы изометрий. Подмножество D плоскости Лобачевского называется *фундаментальной областью* для группы Γ, если: (1) D — замкнутое множество; (2) орбита $\Gamma(D)$ подмножества D совпадает со всей плоскостью Лобачевского; (3) покрытие плоскости L_2 множествами $\gamma(D)$, $\gamma\in\Gamma$, таково, что с достаточно малой окрестностью произвольной точки плоскости L_2 пересекается лишь конечное число множеств вида $\gamma(D)$; (4) образ множества внутренних точек фундаментальной области D при действии любого преобразования из Γ, отличного от единичного, не пересекается с множеством внутренних точек фундаментальной области. Формально это свойство можно записать так: $\gamma(\operatorname{Int} D) \cap \operatorname{Int} D = \varnothing$ при $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq e$, где $\operatorname{Int} D$ — множество внутренних точек области D, т. е. $\operatorname{Int} D = D \setminus \partial D$, где ∂D — граница D.

Легко доказать, что в качестве фундаментальной области на плоскости Лобачевского для произвольной дискретной группы Γ можно выбрать выпуклый многоугольник с конечным числом сторон (проверьте это!).

Наша цель — дать описание дискретных групп движений плоскости Лобачевского. Так как мы уже выяснили, что группа изометрий плоскости Лобачевского изоморфна $SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$, то, следовательно, эта задача эквивалентна перечислению дискретных подгрупп в группе $SL(2, \mathbb{R})$, т. е. в группе матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с вещественными элементами и определителем, равным единице: $ad - bc = 1$. Напомним, как действует группа $SL(2, \mathbb{R})$ на L_2. Если $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ и z — точка плоскости Лобачевского L_2, реализованной как верхняя полуплоскость, то $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Так как $\operatorname{Im} g(z) = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$, то L_2 переходит в себя при этих преобразованиях. Что все преобразования указанного вида — изометрии L_2, проверяется непосредственно; поэтому группа $SL(2, \mathbb{R})$ гомоморфно отображается в группу изометрий L_2; ядром этого отображения служит центр $\{\pm 1\} \approx \mathbb{Z}_2$ группы $SL(2, \mathbb{R})$, а образом — связная компонента единицы группы изометрий L_2; следовательно, эта компонента изоморфна фактор-группе $SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$.

Группы, дискретно действующие на плоскости Лобачевского, естественно возникают при классификации одномерных комплексно аналитических многообразий. Любое связное комплексно аналитическое многообразие X представляется в виде $X = \tilde{X}/\Gamma$, где $\tilde{X}$ — односвязное аналитическое многообразие (универсальная накрывающая), а группа Γ дискретно и свободно действует на многообразии $\tilde{X}$ как группа его комплексных автоморфизмов; при этом группа Γ изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(X)$ многообразия X. Во всех таких представлениях многообразия X группы Γ сопряжены в группе всех автоморфизмов многообразия $\tilde{X}$.

Оказывается, что с точностью до биголоморфной эквивалентности имеется всего три связных односвязных одномерных аналитических многообразия. Это: 1) проективная прямая $\mathbb{C}P^1$, т. е. одномерное комплексное проективное пространство; 2) аффинная прямая $\mathbb{C}^1$, т. е. плоскость комплексной переменной z; 3) внутренность единичного круга $\{z \in \mathbb{C}^1 \mid |z| < 1\}$ на комплексной плоскости.

Таким образом, задача сводится к описанию групп автоморфизмов, дискретно и свободно действующих на этих трех перечисленных выше многообразиях. Преобразования группы Γ будем считать комплексно аналитическими преобразованиями, т. е. автоморфизмами комплексной структуры, заданной на многообразии $\tilde{X}$.

Предложение. 1) *Любой автоморфизм многообразия* $\mathbb{C}P^1$ *имеет неподвижную точку.* 2) *Дискретно и свободно действующая группа* Γ *автоморфизмов многообразия* $\mathbb{C}^1$, *для которой многообразие* $\mathbb{C}^1/\Gamma$ *компактно, состоит из трансляций* $z \mapsto z + a$, *где* a *пробегает векторы некоторой двумерной решетки на* $\mathbb{C}^1$. 3) *Все автоморфизмы единичного круга имеют следующий вид:* $z \mapsto \theta \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$, *где* $|\theta| = 1$, $|\alpha| < 1$; *в частности, это — группа движений метрики Лобачевского в модели Пуанкаре.*

Пусть $X = L_2$ — плоскость Лобачевского и Γ — произвольная дискретная группа движений L_2; пусть D — выпуклый фундаментальный многоугольник действия группы Γ. Рассмотрим многоугольники вида $\{\gamma D\}$, $\gamma \in \Gamma$; они не накладываются друг на друга (см. выше) и покрывают всю плоскость Лобачевского. Элементы этого разбиения плоскости Лобачевского на многоугольники обычно называются «ячейками». Две ячейки называются смежными, если их пересечение есть одномерное подмножество, т. е. кривая на плоскости. Можно считать, что если D_1 и D_2 — две смежные ячейки, то $D_1 \cap D_2$ есть общая сторона этих двух многоугольников. Для того чтобы этого добиться, достаточно добавить в фундаментальном многоугольнике некоторое число вершин, угол при которых равен π; этим можно добиться того, что пересечение любых смежных ячеек происходит в точности по общей стороне (рис. 107). Для любой стороны a ячейки D существует и единственна ячейка D_1, смежная с D по стороне a; при этом ячейка D_1 получается из ячейки D применением преобразования $\gamma \in \Gamma$; обозначим это преобразование через $\gamma(a)$. Так как при преобразовании $\gamma(a)$ область D переходит в D_1, то, следовательно, существует некоторая сторона $a' \in D$ такая, что $\gamma(a)a' = a$ (область D пересекается со своим образом при действии $\gamma(a)$). Отсюда имеем $\gamma(a') = (\gamma(a))^{-1}$ и, в частности, $a'' = (a')' = a$ (рис. 108).

Сопоставим каждой стороне a соответствующую ей при указанном отображении сторону a'; возникает инволютивное преобразование (т. е. преобразование, квадрат которого есть тождественное преобразование) множества сторон области D. Конечно, при этом может оказаться, что $a' = a$, но тогда $(\gamma(a))^2 = e$ и $\gamma(a)$ есть, следовательно, отражение области D относительно стороны a или поворот на угол, равный π, относительно середины стороны a. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Ячейки* $\gamma_1 D$ *и* $\gamma_2 D$ *являются смежными тогда и только тогда, когда* $\gamma_2 = \gamma_1\gamma(a)$.

Последовательность ячеек $D = D_0, D_1, \ldots, D_k$ таких, что ячейки D_{i-1} и D_i являются смежными при $i = 1, 2, \ldots, k$, называется *цепью* ячеек.

Для ячейки D_i существует и единственно движение γ_i такое, что $\gamma_i D = D_i$. При этом возникает индуцированное отображение сторон фундаментального многоугольника на стороны ячейки; следовательно, стороны ячейки D_i можно обозначать так же, как и стороны многоугольника $D_0 = D$.

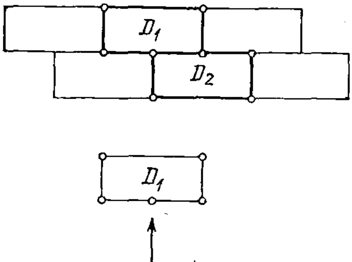


Рис. 107

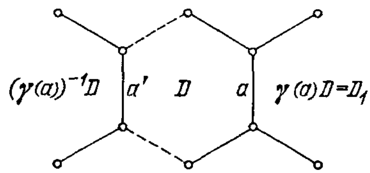


Рис. 108

В цепи ячеек $D = D_0, D_1, \ldots, D_k$ (пусть $D_i = \gamma_i D_0$) многоугольники D_{i-1} и D_i смежные, а потому в силу леммы имеем $\gamma_i = \gamma_{i-1}\gamma(a_i)$ и $\gamma_k = \gamma(a_1)\gamma(a_2)\ldots\gamma(a_k)$. Итак, цепи ячеек соответствует последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k$ сторон ячейки D. Итак, доказана

Теорема 1. *Группа* Γ *порождается элементами* $\gamma(a)$, *где* a *пробегает все стороны фундаментального многоугольника.*

Теперь мы опишем соотношения в этой группе. Пусть $\gamma(a_1)\ldots\ldots\gamma(a_k) = e$; рассмотрим соответствующую цепь; тогда последним элементом ее будет сама ячейка D — исходный фундаментальный многоугольник (рис. 109). Итак, соотношениям в группе Γ соответствуют замкнутые цепи, которые обычно называются *циклами*. Соотношения типа $\gamma(a)\gamma(a') = e$ будем называть *элементарными соотношениями первого типа*. Эти соотношения порождают цикл D_0, D_1, D_0.

Рассмотрим некоторую вершину ячейки D и рассмотрим все ячейки, содержащие эту вершину; тогда последовательность этих ячеек образует цикл (рис. 110). Такой цикл называется элементарным циклом второго типа, а соответствующее ему соотношение — элементарным соотношением второго типа.

Теорема 2. *Элементарные соотношения первого и второго типов составляют определяющую систему групповых соотношений для образующих* $\gamma(a)$ *дискретной группы* Γ, *т. е. всякое соотношение является их следствием.*

Мы полностью описали структуру любой дискретной группы сохраняющих ориентацию движений плоскости Лобачевского (такие группы называются *фуксовыми*).

Теперь рассмотрим обратную задачу: как восстановить дискретную группу Г по данному фундаментальному многоугольнику. Пусть на плоскости Лобачевского задан выпуклый многоугольник с конечным числом сторон, не имеющий пока бесконечно удаленных вершин. Это означает следующее. Многоугольник может быть

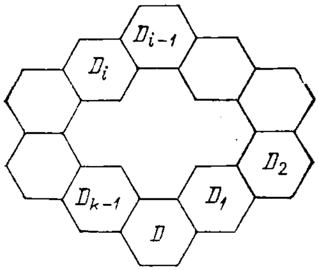


Рис. 109

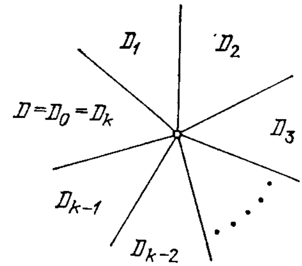


Рис. 110

неограниченным, «выходя на бесконечность» (см., например, рис. 111). Поскольку точки абсолюта не принадлежат плоскости Лобачевского, то в том случае, когда прямая выходит на абсолют так, как это показано на рис. 111 для прямой AB, мы считаем, что на ней нет вершины, расположенной «на бесконечности». С другой стороны, если две прямые выходят на бесконечность и попадают в одну точку абсолюта (рис. 112), то тогда будем говорить, что у многоугольника есть бесконечно удаленная вершина.

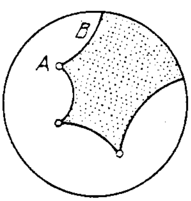


Рис. 111

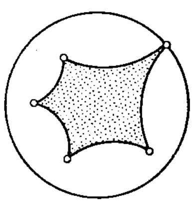


Рис. 112

Возможно, что углы при некоторых вершинах многоугольника равны π.

Пусть задана инволютивная перестановка сторон этого многоугольника: $a \mapsto a'$. Для любой стороны a существует единственное движение $\gamma(a)$ такое, что $\gamma(a)a' = a$, $\gamma(a)D \cap D = a$. Пусть выполняются следующие два условия: 1) $\gamma(a)\gamma(a') = e$; 2) для любой вершины A многоугольника D существует такая последовательность сторон $a_1, \ldots, a_k$, что $\gamma(a_1)\gamma(a_2)\ldots\gamma(a_k) = e$, и последовательность многоугольников D, $\gamma(a_1)D$, $\gamma(a_1)\gamma(a_2)D, \ldots, \gamma(a_1)\ldots$ $\ldots\gamma(a_k)D$ образует обход вокруг этой вершины A в том смысле, что все они содержат вершину A и каждый элемент этой цепи смежен с предыдущими; кроме того, они не перекрываются и покрывают (в совокупности) некоторую окрестность точки A.

Теорема 3. *Если выполняются указанные выше условия* 1), 2), *то движения* $\gamma(a)$ *порождают дискретную группу движений плоскости Лобачевского, для которой область* D *является фундаментальной областью.*

Рассмотрим простейшие примеры.

Пример 1. Пусть D есть многоугольник, вообще не имеющий вершин (см., например, рис. 113). Рассмотрим движения $\gamma(a)$, $\gamma(a')$ такие, что $\gamma(a)a' = a$, $\gamma(a)\gamma(a') = e$, $\gamma(a)D \cap D = a$. Такие движения всегда существуют: прямая переходит в прямую и данная полуплоскость — в данную полуплоскость. Эти движения порождают дискретную подгруппу в группе изометрий. Если никакая сторона многоугольника без вершин не соответствует самой себе, то получается, очевидно, свободная группа. Наличие сторон, соответствущих самим себе (например, такая сторона изображена на рис. 113), дает нетривиальное соотношение в группе.

Пример 2. Группа, порожденная отражениями; $a' = a$ для любого a и $\gamma(a)$ — отражение относительно стороны a. Эти элементы имеют порядок два.

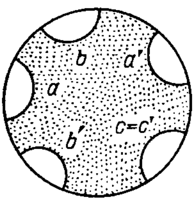


Рис. 113

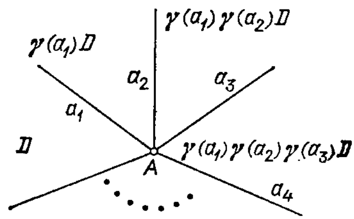


Рис. 114

Рассмотрим теперь случай, когда фундаментальный многоугольник содержит бесконечно удаленную вершину (оставаясь при этом конечным, т. е. имеющим конечное число вершин). Пусть D — такой конечный многоугольник и $a \mapsto a'$ — инволютивное преобразование его сторон; $\gamma(a)$ — такие движения плоскости Лобачевского, что $\gamma(a)a' = a$; $\gamma(a)D \cap D = a$; $\gamma(a)\gamma(a') = e$. Пусть A — вершина многоугольника D; тогда из рис. 114 видно, как получить последовательность сторон $a_1, \ldots, a_q, \ldots$ При этом, конечно, возникает и последовательность вершин, так как вершина A смещается при указанных преобразованиях. Таким образом, возникают две последовательности: $a_1, a_2, \ldots$ и $A, A_1, A_2, \ldots$ (здесь A_1 — образ вершины A при отображении $\gamma(a_1)$ и т. д.). Будем говорить, что эти две последовательности порождены вершиной A. Так как рассматриваемый многоугольник конечный (т. е. имеет конечное число сторон; см. выше), то обе эти последовательности содержат конечное число элементов и обе они оказываются периодическими. Пусть p — наименьший период последовательности сторон; тогда число p также будет периодом последовательности вершин A, A_1, A_2, ...; число p называется периодом вершины A.

Эти две последовательности можно продолжить и в другую сторону, поскольку они порождены действием элементов группы. При этом свойство периодичности, конечно, сохраняется.

Пусть p — период вершины A; это означает, что последовательность вершин содержит в себе вершину A_p, которая совпадает с A. Скажем, что вершины A_1, A_2, ..., A_{p-1} составляют цикл вершин (порожденный вершиной A). Все это можно проделать, конечно, и для бесконечно удаленной вершины.

Предположим теперь, что движения $\gamma(a)$ порождают дискретную группу, для которой многоугольник D является фундаментальным. Пусть A — обычная вершина многоугольника (т. е. не бесконечно удаленная); тогда цепь ячеек, обходящая вершину A, должна замкнуться, а потому существует такое натуральное число m, что $[\gamma(a_1)\gamma(a_2)\ldots\gamma(a_p)]^m=e$. (Период p может быть еще недостаточен для того, чтобы ячейки обошли вокруг вершины A, так как возвращение вершины A в исходное положение при последовательных сдвигах указанного выше типа еще не гарантирует того, что мы обошли все ячейки, примыкающие к вершине A.)

Число m называется кратностью вершины (не путать с периодом вершины!). Кроме того, чтобы обойти вершину A один раз, необходимо выполнение следующего условия: $\sum\limits_{i=1}^{p}(\angle A_i)=\frac{2\pi}{m}$, где $\angle A_i$ — величина угла многоугольника D при вершине A_i. Если потребовать, чтобы преобразование $[\gamma(a_1)\gamma(a_2)\ldots\gamma(a_p)]^m$ сохраняло ориентацию, то соотношение $[\gamma(a_1)\gamma(a_2)\ldots\gamma(a_p)]^m=e$ вытекает из указанного выше соотношения для углов. Легко проверяется, что соотношения, соответствующие вершинам одного и того же цикла (или противоположному обходу вокруг вершины A), эквивалентны.

С бесконечно удаленной вершиной никакой обход вокруг нее не связан (что очевидно), и соотношения поэтому не возникает. Но имеет место

Лемма 2. *Для бесконечно удаленной вершины преобразование $\gamma(a_1)\gamma(a_2)\ldots\gamma(a_p)$ является параболическим движением, т. е. таким, что соответствующая матрица (дробно-линейного преобразования) второго порядка с вещественными коэффициентами подобна матрице* $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

Теорема 4. *Пусть задан конечный многоугольник D, а также инволютивная перестановка его сторон, и пусть заданы* *движения $\gamma(a)$ для каждой стороны a такие, что $\gamma(a)a' = a$, $(\gamma(a)D) \cap D = a$. Пусть также для каждой вершины A этого многоугольника выполняется условие $\sum\limits_{i=1}^{p} (\angle A_i) = \frac{2\pi}{m}$ и преобразование $[\gamma(a_1) \ldots \gamma(a_p)]^m$ сохраняет ориентацию (напомним: отсюда вытекает соотношение $[\gamma(a_1) \ldots \gamma(a_p)]^m = e$); предположим далее, что для любой бесконечно удаленной вершины преобразование $\gamma(a_1) \ldots \gamma(a_p)$ является параболическим движением плоскости Лобачевского; тогда оказывается, что группа, порожденная всеми элементами $\gamma(a)$, дискретна и область D является ее фундаментальной областью (фундаментальным многоугольником).*

Пример 1. Группа, порожденная отражениями (рис. 115, *а*). Здесь период вершины A равен 2; кратность этой вершины равна m.

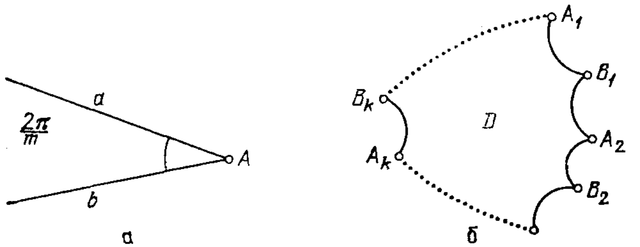


Рис. 115

Пример 2. Группа, порожденная поворотами (рис. 115, *б*). Пусть $\angle A_s = \frac{2\pi}{m_s}$ с целыми m_s; пусть стороны, примыкающие к вершине A_s, равны. Предположим, что $\sum\limits_{i=1}^{k} (\angle B_i) = \frac{2\pi}{m}$. Пусть γ_s — поворот на угол $\frac{2\pi}{m_s}$ вокруг точки A_s по часовой стрелке. Условия теоремы 4 выполнены, а потому получаем дискретную группу. Эта группа имеет соотношения: для вершины A соотношение имеет вид $(\gamma(a))^m = e$; для вершины B оно имеет вид $(\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_k)^m = e$.

Заметим, что в евклидовой геометрии таких многоугольников мало, так как выполняется соотношение $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m} = k-1$, откуда следует, что $k \leqslant 4$. (Мы опускаем доказательство.) На плоскости Лобачевского таких многоугольников (и, следовательно, таких групп) бесконечно много.

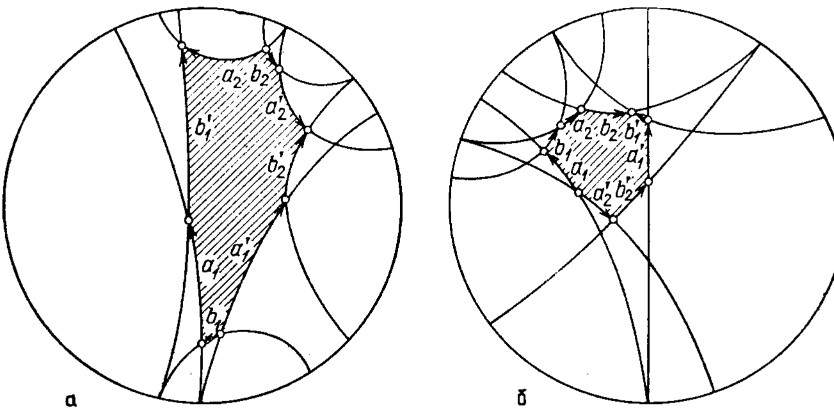
Пример 3. Рассмотрим $4k$-угольник на плоскости Лобачевского, изображенный на рис. 116, *а*. Предположим, что сумма всех его углов равна 2π и что при каждом i сторона a_i равна стороне a_i', а сторона b_i равна стороне b_i'.

Утверждение. *Сохраняющие ориентацию движения* α_i, β_i *плоскости Лобачевского, однозначно определяемые условием* α_i: $a_i \to a_i'$, β_i: $b_i \to b_i'$, *порождают дискретную группу, действующую без неподвижных точек, в которой выполнено соотношение*

$$\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\ldots\alpha_k\beta_k\alpha_k^{-1}\beta_k^{-1}=e$$

и фундаментальный многоугольник которой совпадает с исходным.

Группа эта изоморфна фундаментальной группе римановой поверхности рода k, т. е. сферы с k ручками, а наш многоугольник будет многоугольником, задающим каноническую запись этой поверхности (см. задачу 1 из § 19).



а б

Рис. 116

Следствие. *Универсальная накрывающая замкнутой ориентируемой поверхности рода* $g>1$ *(сферы с* g *ручками* M_g^2 *) есть плоскость Лобачевского.*

Задача. Доказать, что если в примере 3 вместо рис. 116, *а* взять рис. 116, *б*, то получим ту же самую поверхность.

В заключение приведем без доказательства одну теорему конечности для дискретных групп.

Теорема 5. *Всякий выпуклый фундаментальный многоугольник дискретной группы движений плоскости Лобачевского конечной площади имеет конечное число сторон (если же имеются выходы на бесконечность, то их конечное число).*

Перейдем теперь к рассмотрению так называемой группы Мёбиуса и к классификации дробно-линейных преобразований.

Наши рассмотрения мы начнем с дробно-линейных преобразований на сфере Римана $\mathbb{C}P^1 \approx \mathbb{C}\cup(\infty)=S^2$, т. е. на пополненной комплексной прямой. Множество невырожденных дробно-линейных преобразований (с комплексными коэффициентами) образует группу, которая иногда называется группой Мёбиуса и обозначается в литературе так: Möb. Имеет место следующий очевидный изоморфизм: $\text{Möb} \approx SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$ (матрицы ± 1 составляют центр группы $SL(2, \mathbb{C})$). Из теории жордановой нормальной формы известно, что любая матрица σ из группы $SL(2, \mathbb{C})$ сопряжена с одной из следующих матриц: 1) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, т. е. $z \mapsto z + \frac{1}{\lambda}$; 2) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, т. е. $z \mapsto cz$. В первом случае преобразование σ называется *параболическим*, во втором случае — *эллиптическим*, если $|c| = 1$, и *гиперболическим*, если $c \in \mathbb{R}$ и $c > 0$; все остальные случаи объединяются под общим названием *локсодромические преобразования*. Тождественное преобразование из этой классификации исключается. Эта терминология относится как к матрицам (указанного вида), так и к элементам группы Möb, представляемым этими матрицами. Если выбран представитель преобразования σ (т. е. некоторая матрица) такой, что $\det \sigma = 1$, то имеет место следующая

Лемма 3. *Пусть* $\sigma \in SL(2, \mathbb{C})$, $\sigma \neq \pm 1$. *Тогда*: 1) *матрица* σ *является параболической тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Sp} \sigma = \pm 2$; 2) *матрица* σ *является эллиптической тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Sp} \sigma \in \mathbb{R}$ *и* $|\operatorname{Sp} \sigma| < 2$; 3) *матрица* σ *является гиперболической тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Sp} \sigma \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{Sp} \sigma| > 2$; 4) *матрица* σ *является локсодромической тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Sp} \sigma \notin \mathbb{R}$.

Здесь $\operatorname{Sp} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$ — обычный след матрицы.

Из этой леммы видно, что группа $SL(2, \mathbb{R})$ не содержит локсодромических элементов. Дадим характеристику преобразований из группы $SL(2, \mathbb{R})$ на языке неподвижных точек этих преобразований. Заметим, что преобразование из $SL(2, \mathbb{R})$ (как и из $SL(2, \mathbb{C})$), отличное от 1, имеет на расширенной комплексной прямой две неподвижные точки, которые могут слиться.

Лемма 4. *Пусть* $\sigma \in SL(2, \mathbb{R})$, $\sigma \neq \pm 1$. *Тогда*: 1) *матрица* σ *является параболической в том и только в том случае, когда* σ *имеет ровно одну неподвижную точку на расширенной прямой* $\mathbb{R} \cup \infty$; 2) *матрица* σ *является эллиптической в том и только в том случае, когда* σ *имеет одну неподвижную точку на верхней полуплоскости* $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ *и вторую неподвижную точку на нижней полуплоскости*; 3) *матрица* σ *является гиперболической в том и только в том случае, когда* σ *имеет две неподвижные точки на расширенной прямой* $\mathbb{R} \cup (\infty)$.

Пусть Γ — дискретная подгруппа группы $SL(2, \mathbb{R})$. Тогда $z \in H$ называется эллиптической точкой группы Γ, если существует преобразование $\sigma \in \Gamma$ такое, что $\sigma(z) = z$, где σ — эллиптический элемент. Аналогично точка $z \in \mathbb{R} \cup (\infty)$ называется параболической точкой группы Γ, если существует преобразование $\tau \in \Gamma$ такое, что $\tau(s) = s$ и τ — параболический элемент группы. Перечислим теперь некоторые простейшие свойства преобразований указанных выше типов.

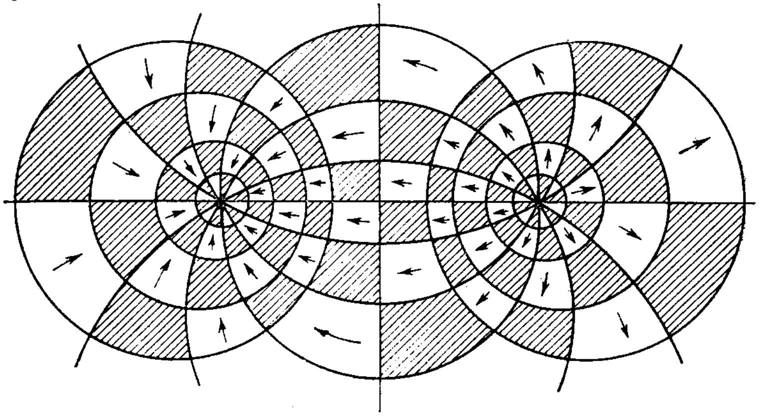


Рис. 117

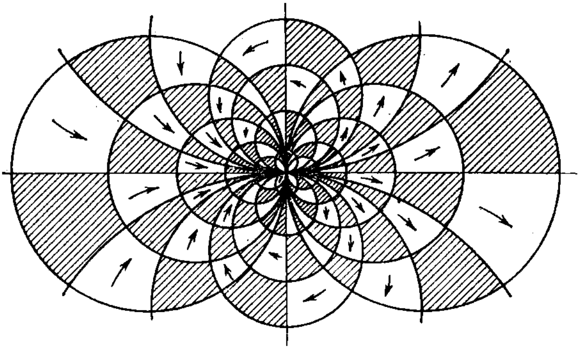


Рис. 118

1. Гиперболический тип. а) Каждая окружность, проходящая через неподвижные точки этого преобразования, переводится этим преобразованием в себя; каждая из двух частей, на которые окружность разбивается двумя неподвижными точками, также переходит при этом в себя.

б) Внутренность окружности, проходящей через неподвижные точки этого преобразования, переходит в себя.

в) Каждая окружность, ортогональная к окружности, проходящей через неподвижные точки, переходит в окружность, обладающую тем же свойством.

г) Неподвижные точки сопряжены относительно любой такой окружности, т. е. ортогональной к окружности, проходящей через неподвижные точки. (Сопряженность точек определяется так: точки A, B сопряжены относительно окружности радиуса R с центром в точке O, если точки O, A, B лежат на одном луче, выходящем из точки O и $|OA| \cdot |OB| = R^2$.)

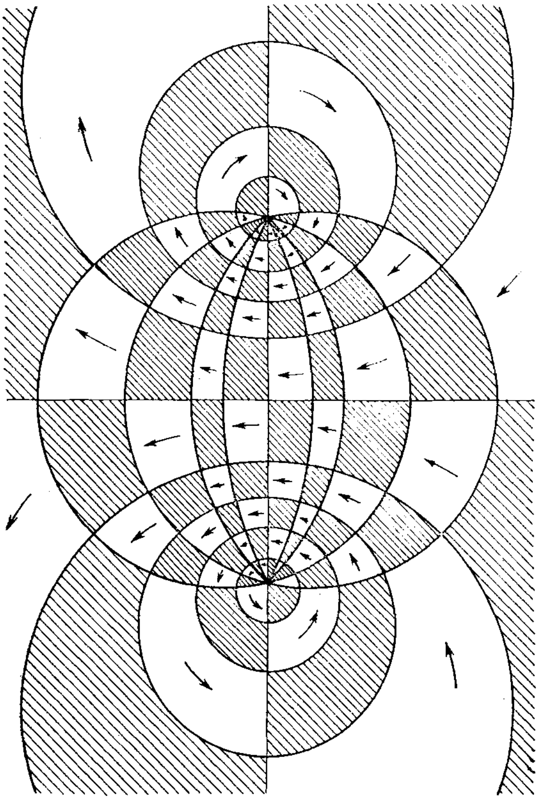


Рис. 119

На рис. 117 построены два семейства указанных выше окружностей и показано, каким образом преобразуются области, на которые изображенные семейства окружностей разбивают плоскость; каждая заштрихованная область переходит в следующую (незаштрихованную) область в направлении, показанном стрелкой.

2. Параболический тип. а) Каждая окружность, проходящая через неподвижную точку, переходит в окружность, касающуюся первой окружности в неподвижной точке.

б) Имеется зависящее от одного параметра семейство окружностей, касающихся друг друга в неподвижной точке, каждая из которых переходит сама в себя.

в) Внутренность каждой неподвижной окружности переходит сама в себя.

На рис. 118 показано, как преобразуется плоскость при параболическом преобразовании. Каждая заштрихованная область переходит при параболическом преобразовании в следующую (незаштрихованную) область в направлении, указанном стрелкой.

3. Эллиптический тип. а) Дуга окружности, соединяющая неподвижные точки, переходит в дугу окружности, соединяющую неподвижные точки.

б) Каждая окружность, ортогональная окружностям, проходящим через неподвижные точки, переходит сама в себя.

в) Внутренность каждой такой окружности переходит сама в себя.

г) Неподвижные точки сопряжены по отношению к каждой из окружностей, ортогональных окружностям, проходящим через неподвижные точки (рис. 119).

В заключение этого параграфа укажем конкретный пример дискретной группы движений плоскости Лобачевского, имеющей фундаментальной областью $4g$-угольник с суммой углов 2π (см. выше пример 3). В качестве такой фундаментальной области возьмем правильный $4g$-угольник (с углами $\pi/2g$) с центром, например, в центре единичного круга (в модели Пуанкаре; рис. 120). Разобьем стороны этого $4g$-угольника на пары, беря просто пары противоположных сторон. Пусть $A_1, \ldots, A_{2g}$ — «сдвиги» плоскости Лобачевского, меняющие местами пары противоположных сторон (см. рис. 120). Каждое последующее преобразование A_{k+1} получается из предыдущего A_k поворотом направления «сдвига» на $\pi - \frac{\pi}{2g}\Big($ т. е. сопряжением с помощью матрицы B_g поворота на угол $\pi - \frac{\pi}{2g}\Big)$. Преобразования $A_1, \ldots, A_{2g}$ связаны соотношением $A_1 \ldots A_{2g}A_1^{-1} \ldots A_{2g}^{-1} = e$ (проверьте!).

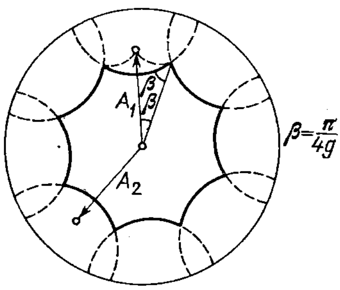


Рис. 120

Легко получить явные формулы для матриц преобразований $A_1, \ldots, A_{2g}$ из $SL(2, \mathbb{R})$ (т. е. уже в реализации геометрии Лобачевского на верхней полуплоскости). Можно считать, что в этой реализации движение A_1 переводит мнимую полуось в себя. Тогда оно имеет вид $w \mapsto \lambda\omega$, $\lambda = e^l$, где l — удвоенный катет треугольника с углами $\pi/2$, $\pi/4g$, $\pi/4g$ (это видно из рис. 120).

Указанный катет легко вычисляется; для величины l получаем

$$l = 2\ln\frac{\cos\beta+\sqrt{\cos 2\beta}}{\sin\beta}, \quad \beta=\frac{\pi}{4g}$$

(проверьте!). Матрицы $A_2, \ldots, A_{2g}$, как уже говорилось, получаются из матрицы A_1 сопряжением: $A_k = B_g^{-k+1}A_1B_g^{k-1}$, где B_g — матрица поворота на угол $\pi\frac{2g-1}{2g}$ вокруг точки i:

$$B_g = \begin{pmatrix} \cos\pi\frac{2g-1}{4g} & \sin\pi\frac{2g-1}{4g} \\ -\sin\pi\frac{2g-1}{4g} & \cos\pi\frac{2g-1}{4g} \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем

$$A_k = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-k+1} \begin{pmatrix} \frac{\cos\beta+\sqrt{\cos 2\beta}}{\sin\beta} & 0 \\ 0 & \frac{\sin\beta}{\cos\beta+\sqrt{\cos 2\beta}} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{k-1},$$

$$\alpha = \pi\frac{2g-1}{4g}, \quad k=1, \ldots, 2g.$$

Задача. Докажите, что группа с образующими $A_1, \ldots, A_{2g}$ и соотношением $A_1 \ldots A_{2g}A_1^{-1} \ldots A_{2g}^{-1} = 1$ изоморфна группе с образующими $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ и соотношением

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} = 1.$$