Глава 5

ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

§ 21. Определение абсолютных и относительных гомотопических групп. Примеры

1. Основные определения. Гомотопические группы, к определению которых мы сейчас перейдем, представляют собой важнейшие из инвариантов многообразий или топологических пространств, как будет видно из дальнейшего текста. Одномерная гомотопическая группа по определению совпадает с фундаментальной группой $\pi_1(M, x_0)$. Нульмерной гомотопической группы, вообще говоря, нет; нульмерным аналогом гомотопической группы является множество $\pi_0(M, x_0)$ компонент линейной связности пространства M, в котором отмечен «тривиальный» элемент — компонента отмеченной точки x_0. Лишь в отдельных случаях множество $\pi_0(M, x_0)$ обладает естественной групповой структурой; укажем основные примеры такого рода.

А. Пространство M является группой Ли. В этом случае связная компонента единицы $x_0 = 1$, обозначаемая через $M_0 \subset M$, является нормальным делителем; факторгруппа $M/M_0 = \pi_0(M, x_0)$ имеет естественную групповую структуру.

Например: 1) для $M = O(n)$ имеем $\pi_0(M, x_0) = \mathbb{Z}_2$ (компоненты соответствуют знакам детерминанта); 2) для $M = O(n, 1)$ имеем $\pi_0(M, x_0) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (разделение группы на компоненты производится по знаку детерминанта и по тому, сохраняется или обращается направление времени).

Б. M есть пространство петель $\Omega(x_0, N)$ некоторого пространства N; это пространство $\Omega(x_0, N)$ состоит из путей γ, начинающихся и кончающихся в точке x_0. Как доказывалось в § 15 (см. теорему 1), множество компонент линейной связности $\pi_0(M, e)$ пространства M (e есть единица, т. е. постоянный путь $\gamma(t) \equiv x_0$) совпадает с группой $\pi_1(N, x_0)$ (по определению последней).

Дадим теперь определение «высших» гомотопических групп $\pi_i(M, x_0)$. Рассмотрим диск D^i с граничной сферой S^{i-1} и отображения f: $D^i \to M$, при которых сфера S^{i-1} переходит в точку x_0.

Определение 1. Элементом гомотопической группы $\pi_i(M, x_0)$ называется гомотопический класс отображений диска $D^i \to M^n$, причем граница S^{i-1} переходит в точку x_0 при всех отображениях и гомотопиях. Эквивалентным образом элемент из $\pi_i(M, x_0)$ задается гомотопическими классами отображений сферы $S^i \to M$, при которых избранная точка сферы $s_0 \in S^i$ переходит в точку x_0.

(Можно сказать, что элементы группы $\pi_i(M, x_0)$ — это компоненты связности пространства отображений $S^i \to M$, при которых $s_0 \mapsto x_0$.)

Произведение элементов гомотопической группы определяется так: рассмотрим сферу S^i с экватором $S^{i-1} \subset S^i$ и точкой s_0 на экваторе S^{i-1}. Рассмотрим стандартное отображение ψ сферы S^i в букет двух сфер $S_1^i \vee S_2^i$, при котором экватор целиком переходит в одну точку s_0, в которой скреплен букет (рис. 121).

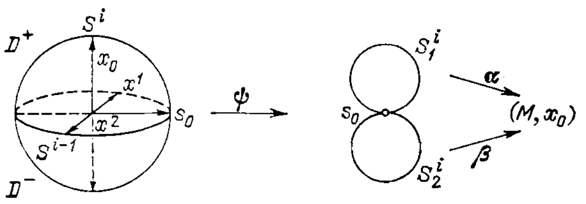

Рис. 121

При этом отображение ψ взаимно однозначно и сохраняет ориентацию во всех точках, кроме экватора S^{i-1}. Если заданы отображения α: $S_1^i \to M$, $\alpha(s_0) = x_0$ и β: $S_2^i \to M$, $\beta(s_0) = x_0$, то мы определяем произведение $\alpha\beta$ как отображение $S^i \to M$, совпадающее с $\alpha(\psi(x))$ для полусферы D^+ и с $\beta(\psi(x))$ для полусферы D^-:

$$\alpha\beta(x) = \begin{cases} \alpha\psi & \text{при } x \in D^+, \\ \beta\psi & \text{при } x \in D^-. \end{cases}$$

Очевидно, $\alpha\beta(s_0) = x_0$. Гомотопический класс произведения $\alpha\beta$ называется *произведением* гомотопических классов α и β в гомотопической группе $\pi_i(M, x_0)$.

Теорема 1. *Операция умножения гомотопических классов превращает множество $\pi_i(M, x_0)$ в группу, коммутативную при $i > 1$.*

Доказательство. Для $i = 1$ теорема 1 сводится к теореме 17.1. Рассмотрим случай $i > 1$.

а) *Коммутативность*: $\alpha\beta$ *гомотопно* $\beta\alpha$. Пусть α задано на верхней полусфере $D^+(x^0 \geqslant 0)$, β — на нижней полусфере $D^-(x^0 \leqslant 0)$; считаем, что сфера S^i вложена в $\mathbb{R}^{i+1}(x^0, \ldots, x^i)$ как гиперповерхность $\sum_{j=0}^{i} (x^j)^2 = 1$. Пусть точка s_0 на экваторе имеет координаты $s_0 = (x^0 = 0,\ x^1 = 1,\ \ldots,\ x^i = 0)$. Рассмотрим семейство вращений сферы S^i по себе вокруг ортогонального дополнения к плоскости $(x^0,\ x^2)$ на углы $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. При $\varphi = 0$ это отображение тождественно. При $\varphi = \pi$ это отображение меняет местами D^+ и D^-. Точка s_0 неподвижна при всех вращениях. Мы получили гомотопию, меняющую местами α и β. Таким образом, $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ гомотопны.

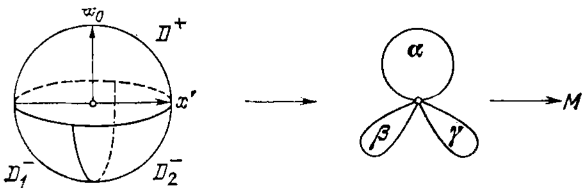

Рис. 122

б) *Ассоциативность*: $(\alpha\beta)\gamma$ *гомотопно* $\alpha(\beta\gamma)$. Пусть α задано на верхней полусфере $D^+ (x^0 \geqslant 0)$, а нижняя полусфера $D^- (x^0 \leqslant 0)$ разделена пополам, $D^- = D_1^- \cup D_2^-$: $x^1 \leqslant 0$ на D_1^- и $x^1 \geqslant 0$ на D_2^-. Пусть β задано как отображение диска D_1^- и γ — как отображение диска D_2^- (рис. 122). Легко видеть, что эта модель реализует как $\alpha(\beta\gamma)$, так и $(\alpha\beta)\gamma$. Утверждение доказано.

в) *Обратный элемент*. Пусть задано отображение сферы α: $(S^i,\ s_0) \to (M,\ x_0)$, задающее элемент $\alpha \in \pi_i(M,\ x_0)$; покажем, что отображение $S^i \to M$, определяемое формулой $(x^0, x^1, \ldots, x^i) \mapsto \alpha(-x^0, x^1, \ldots, x^i)$, определяет элемент $-\alpha \in \pi_i(M,\ x_0)$. Рассмотрим знакомое нам отображение ψ: $S^i \to S^i \vee S^i$, при котором экватор $x^0 = 0$ переходит в точку s_0 (рис. 123). Считаем, что отображение α: $S^i \to M$ определено на верхней полусфере $D^+ (x^0 \geqslant 0)$. Отображение $(-\alpha)$: $D \to M$, рассматриваемое как отображение нижней полусферы $D^- (x^0 \leqslant 0)$, действует по формуле $(-\alpha)(x^0,\ x^1,\ \ldots,\ x^n) = \alpha(-x^0,\ x^1,\ \ldots,\ x^n)$. Вместе α и $-\alpha$ составляют отображение f: $S^i \to M$, при котором точки $y = (x^0,\ \ldots,\ x^n)$ и $y^* = (-x^0,\ \ldots,\ x^n)$ переходят в одну и ту же точку, $f(y) = f(y^*)$. Следовательно, отображение f представляется в виде суперпозиции $f = g \circ \pi$, где π — проекция, π: $S^i \to D^i$, $\pi(y) = \pi(y^*)$ (рис. 124), и $g = \alpha$: $D^i \to M$. Поэтому отображение f гомотопно постоянному, и точку s_0 можно сделать неподвижной при гомотопии. Теорема доказана.

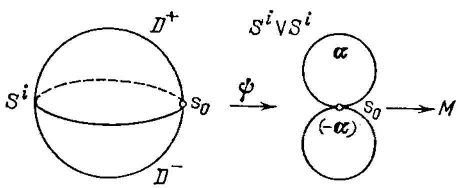

Рис. 123

Пока нам известны гомотопические группы лишь весьма малого количества пространств (не считая группы π_1):

а) $\pi_i(M, x_0)=0$ для любого стягиваемого многообразия или пространства M (например, $M=\mathbb{R}^n$, D^n, дерево и др.);

б) $\pi_i(S^n)=0$ при $i<n$, $\pi_n(S^n)=\mathbb{Z}$ (см. § 13).

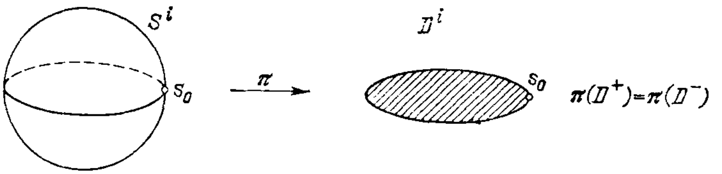

Рис. 124

Из определения гомотопических групп немедленно вытекает

Утверждение. *Для прямого произведения $M\times N$ имеем*

$$\pi_i(M\times N)=\pi_i(M)\times\pi_i(N).$$

Доказательство. Любое отображение $f\colon S^i\to M\times N$ есть просто пара отображений: $f=(f_1, f_2)$, где $f_1\colon S^i\to M$ и $f_2\colon S^i\to N$. При гомотопиях f составляющие f_1, f_2 деформируются независимо. Утверждение доказано.

Таким образом, мы можем расширить круг примеров, где мы знаем гомотопические группы, составляя их произведения.

2. Относительные гомотопические группы. Точная последовательность пары. — Относительные гомотопические группы $\pi_i(M, A, x_0)$ определяются для пространства M, его подмножества A и точки $x_0\in A$. Элементы $a\in\pi_i(M, A, x_0)$ представляются отображениями диска

$$\alpha\colon D^i\to M,$$

при которых граница S^{i-1} переходит в A и избранная точка s_0 на границе S^{i-1} переходит в x_0. По определению элементы из $\pi_i(M, A, x_0)$ — это гомотопические классы таких отображений

$$\alpha\colon (D^i, S^{i-1}, s_0)\to(M, A, x_0).$$

$\pi_i(M,A,x_0)$ определяется для $i\geqslant 1$ и является группой для $i\geqslant 2$. Группы $\pi_i(M, A, x_0)$ коммутативны при $i\geqslant 3$. Групповая структура в $\pi_i(M, A, x_0)$ при $i\geqslant 2$ вводится в полной аналогии с абсолютными группами $\pi_i(M, x_0)$. Если $\alpha, \beta\in\pi_i(M, A, x_0)$, то произведение $\alpha\beta$ реализуется (рис. 125) на диске D^i, представленном в виде $\sum\limits_{j=1}^{i}(x^j)^2\leqslant 1$ в $\mathbb{R}^i$.

Рассматривается отображение $\psi\colon D^i\to D_1^i\vee D_2^i$, стягивающее диск D^{i-1} ($x^1=0$) в точку s_0. На диске D_1^i реализуется α, а на диске D_2^i реализуется β. Суперпозиция $D^i\xrightarrow{\psi}D_1^i\vee D_2^i\to M$ дает

$\alpha\beta$. При $i=1$ мы имеем множество гомотопических классов отображений $\pi_1(M, A, x_0)$ — групповой операции нет. При $i=2$ граница $\partial D^i = S^{i-1}$ одномерна. Поэтому относительная группа $\pi_2(M, A, x_0)$ может быть некоммутативна, как и абсолютная группа $\pi_1(M, x_0)$. При $i \geqslant 3$ дословное повторение доказательства теоремы 1 дает коммутативность группы $\pi_i(M, A, x_0)$. Доказательство того, что $\pi_i(M, A, x_0)$ — группы при $i \geqslant 2$, также полностью аналогично теореме 1, и мы его не приводим.

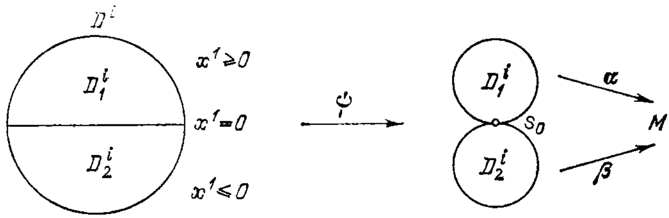

Рис. 125

Если $A = x_0$, то относительные группы $\pi_i(M, A, x_0)$ не отличаются от «абсолютных» групп $\pi_i(M, x_0)$.

При непрерывных отображениях многообразий (пространств)

$$f\colon\ M \to N,\quad A \to B,\quad x_0 \mapsto y_0,$$

по аналогии с группой π_1 (см. § 17) получаем естественные гомоморфизмы $[D^i \to M \xrightarrow{f} N]$

$$f_*\colon\ \pi_i(M, A, x_0) \to \pi_i(N, B, y_0).$$

Эти гомоморфизмы не меняются при гомотопиях отображения f, при которых A переходит в B и x_0 в y_0.

Всякое отображение $D^i \to M$, при котором сфера $\partial D^i = S^{i-1}$ переходит в точку x_0, представляет собой как элемент группы $\pi_i(M, x_0)$, так и элемент группы $\pi_i(M, A, x_0)$. Таким образом, получаем гомоморфизм

$$j\colon\ \pi_i(M, x_0) \to \pi_i(M, A, x_0),$$

поскольку гомотопия отображения в классе $\alpha \in \pi_i(M, x_0)$ может считаться и гомотопией в классе $\pi_i(M, A, x_0)$ (но не обратно!).

Кроме того, всякое отображение $f\colon D^i \to M$, представляющее элемент $\alpha \in \pi_i(M, A, x_0)$, определяет отображение границы

$$f|_{\partial D^i}\colon\ S^{i-1} \to A,$$

при котором $s_0 \mapsto x_0$. При гомотопиях отображения f в классе $\alpha \in \pi_i(M, A, x_0)$ отображение границы меняется в классе из $\pi_{i-1}(A, x_0)$. Произведение в группе $\pi_i(M, A, x_0)$ порождает на границах произведение в группе $\pi_{i-1}(A, x_0)$ по определению. Таким образом, возникает «граничный гомоморфизм»

$$\partial\colon \pi_i(M, A, x_0) \to \pi_{i-1}(A, x_0).$$

Кроме того, включение $A \subset M$, рассматриваемое как непрерывное отображение $i\colon A \to M$, порождает «гомоморфизм вложения»

$$i_*\colon \pi_i(A, x_0) \to \pi_i(M, x_0).$$

Напомним, что ядром группового гомоморфизма $\varphi\colon G \to H$ называется подгруппа $\operatorname{Ker}\varphi$ группы G, состоящая из элементов $\alpha \in \operatorname{Ker}\varphi$ таких, что $\varphi(\alpha) = 1$. Образ гомоморфизма φ, обозначаемый через $\operatorname{Im}\varphi$, есть просто $\varphi(G) \subset H$.

Теорема 2. *Гомоморфизмы j, i_*, ∂ обладают «свойством точности»:*

$$\operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i_*,$$
$$\operatorname{Ker} i_* = \operatorname{Im} \partial,$$
$$\operatorname{Ker} \partial = \operatorname{Im} j.$$

Желая выразить это одним словом, обычно говорят, что последовательность групп и гомоморфизмов

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_i(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_i(M, x_0) \xrightarrow{j} \pi_i(M, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(A, x_0) \to \ldots$$

точна.

Доказательство. а) $\operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i_*$. Действительно, всякий элемент группы $\pi_i(M, x_0)$ представляется отображением $\alpha\colon D^i \to M$ с $\alpha(\partial D^i) = x_0$. Если же этот элемент лежит в $\operatorname{Ker} j$, то существует гомотопия α_t отображения $\alpha = \alpha_0$, в процессе которой все время $s_0 \mapsto x_0$, $\partial D^i \to A$, а в конце гомотопии получим $\alpha_1(D^i) \subset A$. Это есть определение $\operatorname{Ker} j$. Гомотопия α_t определяет отображение $(\partial D^i, t) \to A$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$, причем $\alpha_0(\partial D^i) = x_0$. Поэтому семейство отображений $\alpha_t\colon (\partial D^i, t) \to A$ задает отображение диска $D^i \to A$. Сопоставляя композицию этого отображения с отображением $\alpha_1\colon D^i \to A$, получаем отображение $S^i \to A$, при котором $s_0 \to x_0$. Поэтому $\operatorname{Ker} j$ содержится в образе $\operatorname{Im} i_*$. Обратно, если задано отображение диска $f\colon D^i \to A$ с $f(\partial D^i) = x_0$, то в группе $\pi_i(M, A, x_0)$ это отображение f дает нулевой элемент, поскольку диск по себе стягивается к точке по множеству A. Поэтому $\operatorname{Im} i_* = \operatorname{Ker} j$.

б) $\operatorname{Ker} \partial = \operatorname{Im} j$. Если $\alpha \in \operatorname{Ker} \partial$, то α представляется отображением $\alpha\colon D^i \to M$ с $S^{i-1} \to A$, $s_0 \mapsto x_0$, для которого отображение границы $\alpha\colon S^{i-1} \to A$ гомотопно нулю, т. е. существует гомотопия $\alpha_t\colon S^{i-1} \to A$ с $\alpha_0 = a$, $\alpha_t(s_0) = x_0$, $\alpha_1(S^{i-1}) = x_0$. Отображение

α: $D^i \to M$ вместе с отображением $\{\alpha_t\}$: $S^{i-1}\times I \to A$, переводящим $S^{i-1}\times 1$ в x_0, составляет отображение $S^i \to M$, при котором отмеченная точка $s_0=[S^{i-1}, 1]$ переходит в x_0. Таким образом, ядро $\operatorname{Ker}\partial$ содержится в образе $\operatorname{Im} j$. Обратное очевидно, поскольку при отображениях диска α: $D^i \to M$ из $\operatorname{Im} j$ вся граница переходит в точку и, значит, $\partial(\alpha)=0$.

в) $\operatorname{Im}\partial = \operatorname{Ker} i_*$. Пусть $\alpha \in \operatorname{Ker} i_* \subset \pi_i(A, x_0)$ и α представлено отображением α: $S^i \to A$ с $s_0 \mapsto x_0$. Тогда имеется гомотопия α_t: $S^i \to M$ с $\alpha_0=\alpha$, $\alpha_t(s_0)=x_0$ и $\alpha_1(S^i)=x_0$. Эта гомотопия задает отображение диска $D^{i+1}\to M$, так как $\alpha_1(S^i, 1)=x_0$. При этом граница $\partial D^{i+1}=S^i$ при отображении α_0 переходит в A и s_0 переходит в x_0. Мы получаем отображение F тройки $D^{i+1}\to M$, $S^i\to A$, $s_0\mapsto x_0$. Таким образом, $\operatorname{Ker} i_*$ содержится в образе $\operatorname{Im}\partial$, так как $\alpha=\alpha_0=\partial(F)$. Обратно, если $\alpha=\partial F$, то отображение α: $S^i \to A$ гомотопно отображению в точку (по M), и в процессе гомотопии $s_0\mapsto x_0$. Теорема доказана.

Пример. Пусть $M=D^n$, $A=S^{n-1}$. Тогда $\pi_n(D^n, S^{n-1}, x_0)=\mathbb{Z}$ и $\pi_i(D^n, S^{n-1}, x_0)=0$ при $i<n$.

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность

$$\pi_n(D^n)\xrightarrow{j}\pi_n(D^n, S^{n-1})\xrightarrow{\partial}\pi_{n-1}(S^{n-1})\xrightarrow{i_*}\pi_{n-1}(D^{n-1}).$$

Если $n>1$, то

$$\pi_n(D^n)=\pi_{n-1}(D^{n-1})=0,$$

так как шар D^n стягиваем. Поэтому $\operatorname{Im} j=0$ и $\operatorname{Im} i_*=0$. Так как $\operatorname{Im} j=\operatorname{Ker}\partial$, то $\operatorname{Ker}\partial=0$. Поэтому гомоморфизм ∂: $\pi_n(D^n, S^{n-1})\to\pi_{n-1}(S^{n-1})$ не имеет ядра (является вложением). Так как $\operatorname{Im}\partial=\operatorname{Ker} i_*=\pi_{n-1}(S^{n-1})$, то гомоморфизм ∂ есть на самом деле изоморфизм между $\pi_n(D^n, S^{n-1})$ и $\pi_{n-1}(S^{n-1})=\mathbb{Z}$. Утверждение доказано.

Аналогично, если M стягиваемо, то $\pi_j(M)=0$ ($j\geqslant 0$) и $\pi_n(M, A)=\pi_{n-1}(A)$ при $n\geqslant 1$ (проверьте!).

§ 22. Накрывающая гомотопия. Гомотопические группы накрытий и пространств петель

1. Понятие расслоения. Пусть X и Y — два топологических пространства и f: $X\to Y$ — непрерывное отображение. В некоторых примерах (ниже) X будет бесконечномерным функциональным пространством — пространством путей. Рассмотрим любое гладкое многообразие (или пространство) K и два отображения

$$\varphi\colon K\to Y,\quad \tilde{\varphi}\colon K\to X;$$

говорят, что $\tilde{\varphi}$ накрывает φ, если $f\tilde{\varphi}=\varphi$.

Определение 1. Мы скажем, что отображение f: $X\to Y$ есть *расслоение* (или *расслоение Серра*), если любая гомотопия