α: $D^i \to M$ вместе с отображением $\{\alpha_t\}$: $S^{i-1}\times I \to A$, переводящим $S^{i-1}\times 1$ в x_0, составляет отображение $S^i \to M$, при котором отмеченная точка $s_0=[S^{i-1}, 1]$ переходит в x_0. Таким образом, ядро $\operatorname{Ker}\partial$ содержится в образе $\operatorname{Im} j$. Обратное очевидно, поскольку при отображениях диска α: $D^i \to M$ из $\operatorname{Im} j$ вся граница переходит в точку и, значит, $\partial(\alpha)=0$.

в) $\operatorname{Im}\partial = \operatorname{Ker} i_*$. Пусть $\alpha \in \operatorname{Ker} i_* \subset \pi_i(A, x_0)$ и α представлено отображением α: $S^i \to A$ с $s_0 \mapsto x_0$. Тогда имеется гомотопия α_t: $S^i \to M$ с $\alpha_0=\alpha$, $\alpha_t(s_0)=x_0$ и $\alpha_1(S^i)=x_0$. Эта гомотопия задает отображение диска $D^{i+1} \to M$, так как $\alpha_1(S^i, 1)=x_0$. При этом граница $\partial D^{i+1}=S^i$ при отображении α_0 переходит в A и s_0 переходит в x_0. Мы получаем отображение F тройки $D^{i+1} \to M$, $S^i \to A$, $s_0 \mapsto x_0$. Таким образом, $\operatorname{Ker} i_*$ содержится в образе $\operatorname{Im}\partial$, так как $\alpha=\alpha_0=\partial(F)$. Обратно, если $\alpha=\partial F$, то отображение α: $S^i \to A$ гомотопно отображению в точку (по M), и в процессе гомотопии $s_0 \mapsto x_0$. Теорема доказана.

Пример. Пусть $M=D^n$, $A=S^{n-1}$. Тогда $\pi_n(D^n, S^{n-1}, x_0)=\mathbb{Z}$ и $\pi_i(D^n, S^{n-1}, x_0)=0$ при $i<n$.

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность

$$\pi_n(D^n) \xrightarrow{j} \pi_n(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(D^{n-1}).$$

Если $n>1$, то

$$\pi_n(D^n)=\pi_{n-1}(D^{n-1})=0,$$

так как шар D^n стягиваем. Поэтому $\operatorname{Im} j=0$ и $\operatorname{Im} i_*=0$. Так как $\operatorname{Im} j=\operatorname{Ker}\partial$, то $\operatorname{Ker}\partial=0$. Поэтому гомоморфизм ∂: $\pi_n(D^n, S^{n-1}) \to \pi_{n-1}(S^{n-1})$ не имеет ядра (является вложением). Так как $\operatorname{Im}\partial=\operatorname{Ker} i_*=\pi_{n-1}(S^{n-1})$, то гомоморфизм ∂ есть на самом деле изоморфизм между $\pi_n(D^n, S^{n-1})$ и $\pi_{n-1}(S^{n-1})=\mathbb{Z}$. Утверждение доказано.

Аналогично, если M стягиваемо, то $\pi_j(M)=0$ ($j\geqslant 0$) и $\pi_n(M, A)=\pi_{n-1}(A)$ при $n\geqslant 1$ (проверьте!).

§ 22. Накрывающая гомотопия. Гомотопические группы накрытий и пространств петель

1. Понятие расслоения. Пусть X и Y — два топологических пространства и f: $X \to Y$ — непрерывное отображение. В некоторых примерах (ниже) X будет бесконечномерным функциональным пространством — пространством путей. Рассмотрим любое гладкое многообразие (или пространство) K и два отображения

$$\varphi\colon K \to Y, \quad \tilde{\varphi}\colon K \to X;$$

говорят, что $\tilde{\varphi}$ накрывает φ, если $f\tilde{\varphi}=\varphi$.

Определение 1. Мы скажем, что отображение f: $X \to Y$ есть *расслоение* (или *расслоение Серра*), если любая гомотопия

$\Phi=\{\varphi_t\}$: $K\times I\to Y$ произвольного отображения $\varphi=\varphi_0$ в базу Y накрывается некоторой гомотопией $\tilde\Phi=\{\tilde\varphi_t\}$: $K\times I\to X$, т. е. $f\tilde\varphi_t=\varphi_t$ для всех $t\geqslant 0$, и при этом в момент $t=0$ отображение $\tilde\varphi_0$ совпадает с заданным отображением $\tilde\varphi$, удовлетворяющим условию $f\tilde\varphi=\varphi$. При этом требуется, чтобы накрывающая гомотопия $\tilde\varphi_t$ была «стационарной» вместе с φ_t: если точка $k\in K$ неподвижна на некотором отрезке δ гомотопии, $\varphi_t(k)=\mathrm{const}$ при $t\in\delta$, то и $\tilde\varphi_t(k)=\mathrm{const}$ при $t\in\delta$.

Практически во всех случаях, когда имеется свойство накрывающей гомотопии, вводится однозначный рецепт накрывать в X движение точек по базе Y; этот рецепт должен непрерывно и мультипликативно зависеть от пути точки по базе Y и от начального положения этой точки в X. Точно это означает следующее.

1. Всякому непрерывному пути $\gamma(t)$: $I\to Y$ в базе Y, $0\leqslant t\leqslant 1$, и начальной точке $x_0\in X$ такой, что $f(x_0)=y_0=\gamma(0)$, однозначно сопоставляется непрерывный путь $\tilde\gamma(t, x_0)$: $I\to X$ такой, что $\tilde\gamma(0, x_0)=x_0$ и $f\tilde\gamma(t, x_0)=\gamma(t)$. Путь $\tilde\gamma(t, x_0)$ должен непрерывно зависеть от пути $\gamma(t)$ и от начальной точки x_0.

2. Мультипликативность: произведению путей γ_1, γ_2 в базе Y должно отвечать при накрытии произведение путей $\tilde\gamma_1(t, x_0)\circ\circ\tilde\gamma_2(\tau, x_1)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $1\leqslant\tau\leqslant 2$, если $x_1=\tilde\gamma_1(1, x_0)$.

3. Если путь γ постоянен (сводится к точке y_0), то и путь $\tilde\gamma$ постоянен (сводится к точке x_0). Заметим, что если задан путь $\gamma(t)$ из y_0 в y_1, то совокупность путей $\tilde\gamma(t, x)$ для всех $x\in f^{-1}(y_0)$ определяет отображение «переноса» слоев $\tilde\gamma$: $f^{-1}(y_0)\to f^{-1}(y_1)$, причем $(\widetilde{\gamma_1\circ\gamma_2})=\tilde\gamma_1\circ\tilde\gamma_2$, а отображение $\tilde\gamma_1\circ\tilde\gamma_1^{-1}$ слоя $F=f^{-1}(y_0)$, в себя гомотопно тождественному $1_F\sim\tilde\gamma\circ\tilde\gamma^{-1}$: $f^{-1}(y_0)\to f^{-1}(y_0)$.

Задача. Докажите, что слои расслоения гомотопически эквивалентны и, более того, отображения переноса слоев являются гомотопическими эквивалентностями.

Определение 2. Пространство Y называется *базой*, X — *пространством расслоения:* полные прообразы $F_y=f^{-1}(y)$ называются *слоями*, отображение f называется *проекцией*. Однозначный рецепт накрывать гомотопию, удовлетворяющий перечисленным выше требованиям, мы назовем *гомотопической связностью* в расслоении f: $X\to Y$.

Пример 1. Накрытие является расслоением, у которого все слои дискретны. Свойство накрывающей гомотопии и движение слоев из точки в точку были изучены в § 18.

Пример 2. Рассмотрим гладкое многообразие (или пространство) M и точку $x_0\in M$. Обозначим через $X=E(x_0)$ пространство всех путей $\gamma(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, начинающихся в точке x_0 и кончающихся в любой точке $\gamma(1)\in M$ (не фиксированной). Через Y мы обозначим само многообразие M. Имеется отображение f: $E(x_0) \to Y$, действующее по формуле $f(\gamma) = \gamma(1)$. Слои $f^{-1}(y)$ представляют собой пространства путей $\Omega(x_0, y, M)$, встречавшиеся в гл. 4.

Лемма 1. *Отображение f: $E(x_0) \to M$ является расслоением.*

Доказательство. Построим для отображения f гомотопическую связность. Пусть задан путь $\gamma(t)$ в M, ведущий из $y_0 = \gamma(1)$ в $y_1 = \gamma(2)$. Точка y_0 «накрыта» при $t = 1$. Это означает, что задан путь $\gamma_1(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, начинающийся в точке x_0 и кончающийся в точке $y_0 = \gamma_1(1)$. Накрытие пути $\gamma(t)$ в пространстве $X = E(x)$ определяем очевидным образом: $\tilde{\gamma}_t(t')$ есть точка в пространстве $E(x_0)$, представленная для любого $1 \leqslant t \leqslant 2$ путем $\tilde{\gamma}_t(t') \in \Omega(x_0, \gamma(t))$, $0 \leqslant t' \leqslant t$, определяемым формулами $\tilde{\gamma}_t(t') = \gamma_1(t')$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\tilde{\gamma}_t(t') = \gamma(t')$ при $1 \leqslant t' \leqslant t$ (рис. 126; путь $\tilde{\gamma}_t(t')$ показан пунктирной линией).

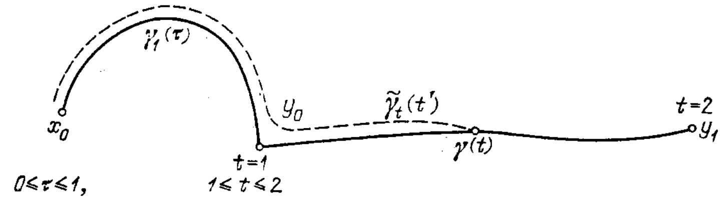

Рис. 126

Для пути $\tilde{\gamma}_t(t')$ можно ввести параметр $t'' = \dfrac{t'}{1+t}$; тогда $0 \leqslant t'' \leqslant 1$. Накрытие $\tilde{\gamma}_t$ в пространстве $E(x_0) = X$ пути $\gamma(t)$ в $Y = M$ непрерывно зависит от начальной точки, т. е. от пути $\gamma_1(\tau)$, и от пути $\gamma(t)$ в базе $Y = M$.

Лемма доказана.

2. Точная последовательность расслоения. Рассмотрим расслоение f: $X \to Y$, точку $y_0 \in Y$ и слой $F = f^{-1}(y_0)$. В слое F выберем точку $f_0 \in F$. Определены гомотопические группы $\pi_i(X, f_0)$, $\pi_i(F, f_0)$, $\pi_i(X, F, f_0)$ и точная последовательность пары

$$\ldots \to \pi_i(F) \xrightarrow{i_*} \pi_i(X) \xrightarrow{j} \pi_i(X, F) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(F) \to \ldots$$

При отображении f: $X \to Y$ слой $F = f^{-1}(y_0)$ переходит в одну точку $F \to y_0$. Поэтому определен гомоморфизм

$$f_* : \pi_i(X, F, f_0) \to \pi_i(Y, y_0).$$

Теорема 1. *Гомоморфизм f_* является изоморфизмом $\pi_i(X, F, f_0) \approx \pi_i(Y, y_0)$. Поэтому имеется «точная последовательность расслоения»*

$$\ldots \to \pi_i(F) \xrightarrow{i_*} \pi_i(X) \xrightarrow{f_*} \pi_i(Y) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(F) \to \ldots$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in \pi_i(X, F, f_0)$ и $f_*(\alpha) = 0$, где α представлено отображением α: $D^i \to X$, $\partial D^i \to F$, $s_0 \mapsto f_0$. Обозначим через β образ $\beta = f(\alpha)$: $D^i \to Y$, $\partial D^i \to y_0$. Так как $\beta = 0$ в группе $\pi_i(Y, y_0)$, существует гомотопия β_t: $D^i \to Y$ с $\beta_t(\partial D^i) \to y_0$, $\beta_0 = \beta$ и $\beta_1(D^i) = y_0$. Накроем гомотопию β_t гомотопией α_t: $D^i \to X$ такой, что $\alpha_0 = \alpha$ и $\alpha_t(s_0) = f_0$. Тогда $\alpha_t(\partial D^i) \subset F$ при всех t, и $\alpha_1(D^i) \subset \Gamma$. Поэтому $\alpha = 0$ в группе $\pi_i(X, F)$. Пусть теперь задан элемент $\beta \in \pi_i(Y, y_0)$. Найдем такое $\alpha \in \pi_i(X, F, f_0)$, что $f_*\alpha = \beta$. Для любого отображения β: $D^i \to Y$ с $\beta(\partial D^i) = y_0$ можно построить гомотопию β_t: $D^i \to Y$ с $\beta_0 = \beta$, $\beta_t(s_0) = y_0$, $\beta_1(D^i) = y_0$, так как диск стягиваем (эта гомотопия не дает эквивалентности в группе $\pi_i(Y, y_0)$, так как $\beta_t(\partial D^i) \neq y_0$) (рис. 127). Отображение β_1: $D^i \to y_0$ можно накрыть отображением α_1: $D^i \to f_0$. Накроем теперь всю гомотопию α_t, $1 \geqslant t \geqslant 0$, начиная с отображения α_1: $D^i \to f_0$. В конце гомотопии мы получим отображение α_0: $D^i \to X$ такое, что $s_0 \mapsto f_0$ и $f(\alpha_0) = \beta_0 = \beta$. Так как $\beta(\partial D^i) = y_0$, мы получаем, что $\alpha_0(\partial D^i)$ лежит в слое F. Отображение α_0 дает элемент $\alpha \in \pi_i(X, F, f_0)$ такой, что $f_*\alpha = \beta$. Теорема доказана.

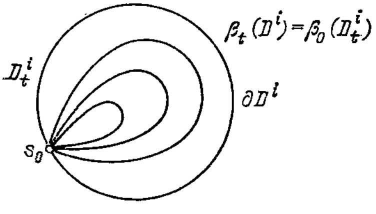

Рис. 127

Замечание. Групповая структура в множестве $\pi_1(X, F, f_0)$ вводится посредством изоморфизма $\pi_1(X, F, f_0) \overset{f_*}{\approx} \pi_1(Y, y_0)$. В конечном отрезке точной последовательности

$$\ldots \to \pi_1(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, f_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F),$$

где X и Y считаются связными, образ гомоморфизма $f_*: \pi_1(X, f_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ может не быть нормальным делителем, и поэтому в множестве смежных классов $\pi_0(F) \approx \pi_1(Y, y_0)/f_*\pi_1(X, f_0)$ нет естественной групповой структуры.

Следствие 1. *Для накрытий, у которых слой $F = f^{-1}(y_0)$ дискретен, имеется изоморфизм*

$$\pi_i(X, F, f_0) = \pi_i(X, f_0) \quad \textit{при} \quad i \geqslant 2.$$

Поэтому $\pi_i(X, f_0) \approx \pi_i(Y)$, $\quad i \geqslant 2$.

(Группа π_1 изучена для накрытий в гл. 4.)

Следствие 2. *Для расслоения путей*

$$f\colon E(x_0) \to M$$

со слоем $\Omega(x_0, y, M) = f^{-1}(y)$ *получаем* $\pi_i(E(x_0)) = 0$,

$$\pi_i(\Omega(x_0, y, M)) = \pi_{i+1}(M).$$

Доказательство. Пространство $E(x_0)$ стягиваемо по себе к точке с помощью гомотопии

$$\varphi_t\colon E(x_0)\to E(x_0),$$
$$\varphi_t(\gamma(\tau))=\gamma_t(\tau),$$

где γ_t — отрезок пути γ от 0 до t (с параметром $\tau'=\tau/t$, $0\leqslant\tau'\leqslant 1$). При $t=0$ получим путь $\gamma_0(\tau)=\gamma(0)=x_0$. Поэтому $\varphi_0(E(x_0))$ — точка.

Из стягиваемости $E(x_0)$ следует, что $\pi_i(E(x_0), x_0)=0$ для всех $i\geqslant 0$. В точной последовательности расслоения $E(x_0)\to M$ имеем

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_i(E(x_0)) & \xrightarrow{f_*} & \pi_i(M, y) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{i-1}(\Omega(x_0, y, M)) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{i-1}(E(x_0)). \\ \parallel & & & & & & \parallel \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

Из точности следует, что гомоморфизм ∂ является изоморфизмом, так как $\operatorname{Im} f_*=\operatorname{Ker}\partial=0$ и $\operatorname{Im}\partial=\operatorname{Ker} i_*=\pi_{i-1}(\Omega(x_0, y, M))$. Следствие доказано.

Из следствия 1 вместе с примерами накрытий (см. примеры 1—7 из § 18) получаем, что при $i>1$:

1) $\pi_i(S^1, s_0)=\pi_i(\mathbb{R}^1, x_0)=0$ (пример 1);

2) $\pi_i(\mathbb{R}P^2, x_0)=\pi_i(S^2, s_0)$, в частности $\pi_2(\mathbb{R}P^2)=\mathbb{Z}$ (пример 3);

3) $\pi_i(T^n; x_0)=0$ (пример 4);

4) $\pi_i(K^2; x_0)=0$ (пример 5);

5) $\pi_i(S^1\vee S^1)=0$ (пример 7). Аналогично $\pi_i(S^1\vee\ldots\vee S^1)=0$ при $i>1$, поскольку универсальная накрывающая является деревом и потому стягиваема. Если U — область плоскости, $U=\mathbb{R}^2\setminus(a_1\cup\ldots\cup a_k)$, где a_j — точки, то U стягивается к букету $S^1\vee\ldots\vee S^1$, и потому $\pi_i(U)=0$ при $i>1$.

6) Из примера 6 следует, что $\pi_i(S^2\vee S^1)=\pi_i(\ldots\vee S^2\vee S^2\vee\ldots)$ при $i>1$. Действительно, универсальная накрывающая является прямой, в целых точках которой нанизаны сферы S^2. Это же относится к группам $\pi_i(V)$ для области $V=\mathbb{R}^3\setminus S^1$, где окружность S^1 незаузлена, так как V стягивается к $S^2\vee S^1$.

7) Для всех поверхностей (замкнутых и открытых), кроме $\mathbb{R}P^2$ и S^2, универсальная накрывающая есть (топологически) $\mathbb{R}^2$. Для сферы с g ручками это было показано в § 20. Поэтому $\pi_i=0$ для всех $i>1$.

3. Зависимость гомотопических групп от начальной точки. Разберем теперь вопрос о зависимости гомотопических групп $\pi_i(M, x_0)$ от точки $x_0\in M$. Пусть x_0 и x_1 — точки из M и $\gamma(t)$, $1\leqslant t\leqslant 2$,— путь из $x_0=\gamma(2)$ в $x_1=\gamma(1)$. Пусть элемент $\alpha\in\pi_i(M, x_1)$ представлен отображением единичного диска $\alpha\colon D_1^i\to M$, $s_0\to x_1$. Мы сейчас определим отображение $\gamma^*(\alpha)\colon D_2^i\to M$

диска радиуса 2 (рис. 128). Область $1 \leqslant \sum_{j=1}^{i} (x_j)^2 \leqslant 2$ представляет собой $S^{i-1} \times [1, 2]$, т. е. сферу S^{i-1}, умноженную на единичный отрезок $[1, 2]$. Определим отображение $\tilde{\gamma}$: $S^{i-1} \times [1, 2] \to M$, полагая $\tilde{\gamma}(y, t) = \gamma(t)$, где $1 \leqslant t \leqslant 2$. Отображение $\gamma^*(\alpha)$: $D_2^i \to M$ определяется так:

$$\gamma^*(\alpha) = \alpha \text{ на } D_1^i \subset D_2^i,$$

$$\gamma^*(\alpha) = \tilde{\gamma} \text{ на области } \{1 \leqslant \sum (x_j)^2 \leqslant 2\} = S^{i-1} \times [1, 2].$$

Имеет место

Теорема 2. 1) *Преобразование* $\alpha \mapsto \gamma^*(\alpha)$ *зависит лишь от гомотопического класса пути* γ, *ведущего из* x_0 *в* x_1, *и определяет изоморфизм*

$$\gamma^*: \pi_i(M, x_1) \to \pi_i(M, x_0).$$

В частности, для односвязных пространств этот изоморфизм не зависит от пути.

2) *Для замкнутого пути* $\gamma \in \pi_1(M, x_0)$ *сопоставление* $\alpha \mapsto \gamma^*(\alpha)$ *определяет действие группы* $\pi_1(M, x_0)$ *на* $\pi_i(M, x_0)$ *посредством групповых изоморфизмов. Если* f: $X \to M$ — *универсальное накрытие, определяемое свободным действием дискретной группы* Γ *на* X, *то* $\Gamma = \pi_1(M, x_0)$, *и группа* Γ *действует на группе* $\pi_i(X) = \pi_i(M)$ *движениями* $X \to X$. *Это действие совпадает с действием фундаментальной группы* $\pi_1(M, x_0)$ *на* $\pi_i(M, x_0)$ *как группы операторов. При этом ввиду односвязности* X $(\pi_1(X) = 1)$ *группа* $\pi_i(X, x)$ *не зависит от выбора точки* x *в том смысле, что для двух точек* $x', x'' \in X$ *изоморфизм* $\pi_i(X, x') \to \pi_i(X, x'')$ *не зависит от пути* γ, *соединяющего* x' *и* x''.

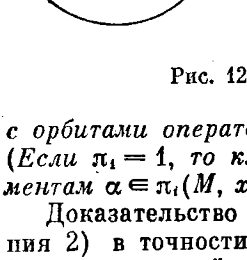

Рис. 128

3) *Классы свободной гомотопии отображений сферы* $S^i \to M$ *(без требования* $s_0 \mapsto x_0$*) находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с орбитами операторов из* $\pi_1(M, x_0)$, *действующей на* $\pi_i(M, x_0)$. *(Если* $\pi_1 = 1$, *то классы свободной гомотопии соответствуют элементам* $\alpha \in \pi_i(M, x_0)$.)

Доказательство утверждений 1), 3) и первой части утверждения 2) в точности аналогично доказательству теоремы 17.4 для фундаментальной группы π_1 (здесь нет разницы между случаем $i = 1$ и случаем $i > 1$). Существенно новой является лишь часть утверждения 2), относящаяся к универсальному накрытию f: $X \to M$ и действию группы Γ на группах $\pi_i(X) = \pi_i(M, x_0)$, Совпадение группы Γ с группой $\pi_1(M, x_0)$ было доказано ранее — см. теорему 19.2. Движение g: $X \to X$ из группы Γ порождает изоморфизм $\pi_i(X, x') \xrightarrow{g^*} \pi_i(X, x'')$, где $x'' = g(x')$. Однако имеется канонический изоморфизм $\pi_i(X, x') \approx \pi_i(X, x'')$, не зависящий от соединяющего эти точки пути. В силу следствия 1 $\pi_i(X) \approx \pi_i(M, x)$ при $i > 1$. Рассмотрим элемент $\alpha \in \pi_i(X, x')$, представленный отображением диска радиуса 1:

$$\alpha: D_1^i \to X, \quad \partial D_1^i \to x'.$$

Образ $g(\alpha)$ есть отображение

$$g(\alpha): D_1^i \to X; \quad \partial D_1^i \to x'' = g(x').$$

Рассмотрим диск D_2^i радиуса 2 и путь γ, ведущий из x' в x''. Строим отображение $\gamma^* g(\alpha)$: $D_2^i \to X$ как выше (см. рис. 95), перенося вдоль пути γ элемент $g^* a$ из точки x'' в x'. Проекция отображения $\gamma^* g(\alpha)$ в M по определению совпадает с $g^*(\bar\alpha) \in \pi_i(M, x_0)$; здесь $\bar\alpha \in \pi_i(M, x_0)$, где $x_0 = f(x') = f(x'')$ и $\bar\alpha$ соответствует α при изоморфизме $\pi_i(X, x) = \pi_i(M, x_0)$, порожденном проекцией f: $X \to M$. Элемент $g \in \Gamma$ отождествляется с элементом из $\pi_1(M, x_0) = \Gamma$. Тем самым теорема доказана.

Примеры. 1. Для накрытия f: $S^2 \to \mathbb{R}P^2$ имеем $\Gamma = \pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$, где образующая есть преобразование g: $S^2 \to S^2$, $g(x) = -x$, меняющее ориентацию. Поэтому действие элемента g на группе $\pi_2(\mathbb{R}P^2) = \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ с образующей $1 \in \mathbb{Z}$ таково:

$$g^*(1) = -1.$$

Заметим, что для $\mathbb{R}P^3 = SO(3)$ имеем также $\Gamma = \pi_1 = \mathbb{Z}_2$ с образующей $g(g^2 = 1)$. Далее $\pi_3(\mathbb{R}P^3) = \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ с образующей $1 \in \mathbb{Z}$. Однако здесь $g(1) = 1$ (проверьте!).

2. Для универсального накрытия $X \to S^2 \vee S^1$ пространство X реализовано в виде прямой $\mathbb{R}^1$, $-\infty < t < +\infty$, у которой в целых точках $t = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, приколоты сферы S_n^2. Группа $\Gamma = \mathbb{Z}$ порождена образующей g, действующей так:

$$g: t \mapsto t + 1,$$

$$g: S_n^2 \to S_{n+1}^2,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Очевидно, группа $\pi_2(X)$ есть прямая сумма групп $\mathbb{Z}$ в бесконечном количестве с образующими

$$a_n: S^2 \to S_n^2 \text{ (степень } a_n \text{ равна 1).}$$

По определению имеем

$$g(a_n) = a_{n+1}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Так как $\Gamma = \pi_1(S^2 \vee S^1)$, $\pi_2(X) = \pi_2(S^2 \vee S^1)$, имеем типичный элемент из группы $\pi_2(S^2 \vee S^1)$

$$a = \sum_{i \geqslant m}^{n} \lambda_i g^i (a_0),$$

где λ_i — целые числа, $n \geqslant m$. Букет $S^2 \vee S^1$ гомотопически эквивалентен области $U = \mathbb{R}^3 \setminus S^2$, где окружность S^1 незаузлена.

Задача. Пусть U — область в $\mathbb{R}^3$, полученная из заполненного тора выкалыванием одной внутренней точки. Найти группы π_1, π_2 и действие π_1 на π_2.

4. Случай групп Ли. Если многообразие M является группой Ли, то имеет место

Теорема 3. *Группа $\pi_1(M)$ коммутативна; действие $\pi_1(M)$ на всех группах $\pi_i(M)$ тривиально.*

Доказательство. Два любых отображения f, g: $K \to M$ можно перемножать, используя групповую структуру в M: $fg(k) = f(k)g(k)$. Если f и g таковы, что $f(k_0) = g(k_0) = 1$, то это же верно и для произведения fg. Кроме того, если f гомотопно f', а g гомотопно g', то fg гомотопно $f'g'$. Таким образом, гомотопические классы $[K, M]$ образуют группу. Пусть $K = S^1$ и f, g представляют элементы из $\pi_1(M, 1)$; покажем, что их произведение $fg(x) = f(x)g(x)$ совпадает с их обычным произведением в π_1.

Можно гомотопией привести эти отображения к виду:

$$f(x) = 1 \text{ для всех } x \in D^-,$$
$$g(x) = 1 \text{ для всех } x \in D^+.$$

Здесь S^1 задается в виде $x^2 + y^2 = 1$, отрезок D^+ выделяется неравенством $y \geqslant 0$, отрезок D^- — неравенством $y \leqslant 0$. Точка $s_0 \in S^1$ имеет координаты $(1, 0)$.

Произведение fg в группе $\pi_1(M, 1)$ совпадает при указанном выборе представителей с групповым произведением отображений f и g

$$fg(x) = f(x)g(x) = \begin{cases} g(x), & x \in D^-, \\ f(x), & x \in D^+. \end{cases}$$

Ясно также, что при таком выборе представителей $f(x)g(x) = g(x)f(x)$. Таким образом, произведение не зависит от порядка сомножителей, т. е. группа $\pi_1(M, 1)$ коммутативна.

Введем теперь групповой эквивалент действия π_1 на π_i $(i > 1)$. Рассмотрим диск $D_2^i = \left\{ \sum_{j=1}^{i} (x^j)^2 \leqslant 4 \right\}$ радиуса 2 и в нем диск $D_1^i = \left\{ \sum_{j=1}^{i} (x^j)^2 \leqslant 1 \right\}$ радиуса 1. Область $1 \leqslant \sum (x^j)^2 \leqslant 4$ есть кольцо $S^{i-1} \times I$. Рассмотрим два отображения диска D_2^i в M:

1. Если $\gamma(t)$, $1 \leqslant t \leqslant 2$, представляет элемент из $\pi_1(M, 1)$, то имеется отображение

$$S^{i-1} \times I \xrightarrow{\varphi} I \xrightarrow{\gamma} M,$$

$$\varphi(s, t) = t.$$

Так как $\gamma\varphi(s, 1) = 1 \in M$, то можно продолжить это отображение до отображения диска $\psi_\gamma\colon D_2^i \to M$, положив $\psi_\gamma(D_1^i) = 1$. Отображение $\psi_\gamma\colon D_2^i \to M$ переводит край ∂D_1^i в точку $1 \in M$ и стягивается к тривиальному отображению, причем в процессе гомотопии край ∂D_1^i все время переходит в точку (заметим, что образ $\psi_\gamma(x) \subset \subset M$ одномерен; см. рис. 129).

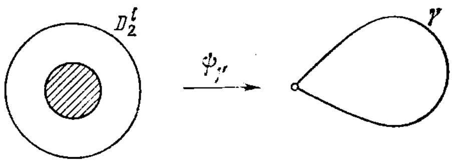

Рис. 129

2. Зададим отображение $\alpha\colon D_1^i \to M$, $\alpha(\partial D_1^i) = 1$, представляющее элемент $\alpha \in \pi_i(M, 1)$ на диске D_1^i. Продолжим α до отображения $\tilde{\alpha}\colon D_2^i \to M$, положив $\tilde{\alpha}(D_2^i - D_1^i) = 1$. Рассмотрим произведение $\tilde{\alpha}\psi_\gamma(x) = \tilde{\alpha}(x)\psi_\gamma(x) = \psi_\gamma(x)\tilde{\alpha}(x)$, $x \in D_2^i$. Это произведение по геометрической конструкции представляет элемент $\gamma^*\alpha$ из $\pi_i(M, 1)$, так как $\tilde{\alpha}\psi_\gamma$ совпадает с α на диске D_1^i и проектирует кольцо в путь γ вне диска D_1^i. Однако отображение $\psi_\gamma\colon D_2^i \to M$ стягивается к точке, как было указано выше (рис. 129). Обозначим эту гомотопию через ψ_τ, где $\psi_0 = \psi_\gamma$, $\psi_1(x) = 1$ и $\psi_\tau(\partial D_2^i) = 1$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Произведение $\tilde{\alpha}\psi_\tau(x) = \tilde{\alpha}(x)\psi_\tau(x)$ дает гомотопию, из которой следует равенство элементов α и $\gamma^*\alpha$ в группе $\pi_i(M, 1)$.

Теорема доказана.

Задачи. 1. Докажите, что если M — группа Ли, то произведение в группах $\pi_i(M)$ можно эквивалентным образом задать формулой $fg(x) = f(x)g(x)$.

2. Распространите теорему 3 на случай *H-пространств*; так называются пространства, которые обладают непрерывным умножением $\psi\colon H \times H \to H$ с единицей $1 \in H$, т. е. таким элементом, что $\psi(x, 1) = \psi(1, x) = x$.

В действительности достаточно, чтобы умножение обладало «гомотопической» единицей, т. е. чтобы отображения $H \to H$, определяемые формулами $x \mapsto \psi(x, 1)$ и $x \mapsto \psi(1, x)$, были гомотопны тождественному. Таким, например, является пространство петель $H = \Omega(x_0, M)$ (проверьте!). Более того, H-пространство $\Omega(x_0, M) = H$ является, как говорят, «H-группой»: а) умножение $\psi\colon H \times H \to H$, $\psi(h, g) = hg$, обладает «гомотопически обратным» элементом $h^{-1}=\varphi(h)$ таким, что отображение $H\to H$, переводящее h в hh^{-1}, гомотопно постоянному отображению со значением 1; б) умножение ψ: $H\times H\to H$ «гомотопически ассоциативно», т. е. отображения $H\times H\times H\to H$, определяемые формулами

$$(h_1,\ h_2,\ h_3)\mapsto\psi(\psi(h_1,\ h_2),\ h_3)=(h_1h_2)h_3,$$
$$(h_1,\ h_2,\ h_3)\mapsto\psi(h_1,\ \psi(h_2,\ h_3))=h_1(h_2h_3),$$

гомотопны.

Обратным к $h=\gamma(t)$ является путь $\gamma^{-1}(t)$ в $\Omega(x_0,\ M)$, а гомотопическая ассоциативность вытекает из следующего утверждения.

Задача. Множество (группа) всех гомеоморфизмов отрезка $I(0,\ 1)$ на себя с неподвижными концами (т. е. монотонных замен параметра на пути) стягиваемо.

Уже был установлен изоморфизм (см. выше п. 2)

$$\pi_i(M,\ x_0)=\pi_{i-1}(\Omega(x_0,\ M),\ e),\qquad i>1.$$

Группа связных компонент $\pi_0(\Omega(x_0,\ M))=\pi_1(M,\ x_0)$ действует на группах $\pi_j(\Omega,\ e)$, $\Omega=\Omega(x_0,\ M)$, посредством преобразований

$$\alpha\mapsto\gamma^{-1}\alpha\gamma,\quad \alpha\in\pi_j(\Omega,\ e),$$
$$\gamma\in\pi_0(\Omega)=\pi_1(M,\ x_0).$$

Задача. Доказать, что действие $\alpha\mapsto\gamma^{-1}\alpha\gamma$ группы $\pi_0(\Omega)$ на $\pi_j(\Omega,\ e)$ совпадает с введенным ранее стандартным действием группы $\pi_1(M)$ на $\pi_{j+1}(M)$.

Для групп Ли и H-пространств с гомотопической единицей в силу доказанных выше фактов зависимость π_1 и π_j от начальной точки несущественна, так как переносы вдоль замкнутых путей тождественны. Это же относится к любым односвязным пространствам M. Во всех этих случаях классы свободной гомотопии отображений сферы $[S^i,\ M]$ точно соответствуют элементам группы $\pi_i(M)$, причем начальной точки можно явно не указывать (она несущественна).

5. Умножение Уайтхеда. В гомотопических группах имеется еще одна интересная операция — *произведение Уайтхеда.*

Рассмотрим прямое произведение сфер $M=S^i\times S^j$ и лежащий в нем букет («координатный крест») $A=S^i\vee S^j=(S^i\times s_0')\cup\cup(s_0''\times S^j)$, где $s_0'\in S^i$, $s_0''\in S^j$ — отмеченные точки сфер S^i, S^j. В произведении $S^i\times S^j$ отмечена точка $s_0=(s_0',\ s_0'')$. Определено естественное отображение

$$D^{i+j}=D^i\times D^j\xrightarrow{f}S^i\times S^j,$$

где f есть прямое произведение стандартных отображений α: $D^i \to S^i$, $\partial D^i \to s_0'$ и β: $D^j \to S^j$, $\partial D^j \to s_0''$, каждое из которых имеет степень $+1$. Отображения α и β представляют базисные элементы групп $\alpha \in \pi_i(S^i, s_0') = \mathbb{Z}$, $\beta \in \pi_j(S^j, s_0'') = \mathbb{Z}$. Отображение f переводит границу $\partial D^{i+j} = \partial(D^i \times D^j) = (\partial D^i) \times D^j \cup D^i \times \times (\partial D^j)$ в координатный крест $A = S^i \vee S^j \subset M = S^i \times S^j$, так как $\alpha(\partial D^i) = s_0'$, $\beta(\partial D^j) = s_0''$.

Таким образом, отображение f представляет элемент группы $\pi_{i+j}(S^i \times S^j, S^i \vee S^j, s_0)$. Имеется гомоморфизм ∂, введенный в § 21:

$$\partial\colon \pi_{i+j}(S^i \times S^j, S^i \vee S^j, s_0) \to \to \pi_{i+j-1}(S^i \vee S^j, s_0).$$

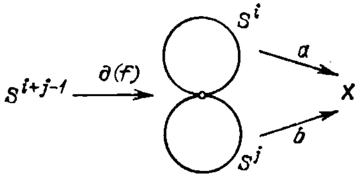

Рис. 130

С помощью элемента $\partial(f)$ в группе $\pi_{i+j-1}(S^i \vee S^j, s_0)$ мы определим так называемое *произведение Уайтхеда* в гомотопических группах любого пространства X: произведением элементов $a \in \pi_i(X, x_0)$, $b \in \in \pi_j(X, x_0)$ будет служить некоторый элемент $[a, b] \in \pi_{i+j-1}(X, x_0)$. Конструкция: пусть a: $(S^i, s_0') \to (X, x_0)$ и b: $(S^j, s_0'') \to (X, x_0)$ — отображения, представляющие одноименные элементы гомотопических групп. Рассмотрим букет $S^i \vee S^j$, скрепленный в точке $s_0 = s_0' = s_0''$. Мы имеем отображение $a \vee b$: $S^i \vee S^j \to X$, переводящее s_0 в x_0 (рис. 130). Элемент $\partial(f)$ определяет стандартное отображение (композицию)

$$[a, b]\colon S^{i+j-1} \xrightarrow{\partial f} S^i \vee S^j \xrightarrow{a \vee b} X.$$

Тем самым построен элемент $[a, b] \in \pi_{i+j-1}(X, x_0)$. Ориентация в $D^i \times D^j$, определяемая репером (τ^i, τ^j), отличается от ориентации в $D^i \times D^j = D^j \times D^i$ с репером (τ^j, τ^i) знаком $(-1)^{ij}$. Отсюда вытекает следующее свойство произведения Уайтхеда:

$$[a, b] = (-1)^{ij}[b, a].$$

Мы будем в основном рассматривать произведения $[a, b]$ в случае $i \geqslant 2$, $j \geqslant 2$, когда группы π_i, π_j абелевы и записываются аддитивно и произведение Уайтхеда билинейно по a, b. Отметим два особых случая.

Случай $i = 1$, $j = 1$: произведение $[a, b]$ совпадает с коммутатором $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ в группе $\pi_1(x, x_0)$ (докажите!).

Случай $i = 1$, $j \geqslant 2$: произведение $[a, b]$ сводится к действию $\pi_1(X, x_0)$ на $\pi_i(X, x_0)$:

$$[a, b] = a^*(b) - b,$$

где $a \in \pi_1$, $b \in \pi_i$ (докажите!).

Рассмотрим теперь абелевы группы (записываемые аддитивно)

$$\Gamma_0 = \pi_3(X) + \pi_5(X) + \pi_7(X) + \ldots + \pi_{2q+1}(X) + \ldots,$$
$$\Gamma_1 = \pi_2(X) + \pi_4(X) + \pi_6(X) + \ldots + \pi_{2q}(X) + \ldots$$

По определению для произведения Уайтхеда имеем

$$[\Gamma_0, \Gamma_0] \subset \Gamma_0,$$
$$[\Gamma_0, \Gamma_1] \subset \Gamma_1,$$
$$[\Gamma_1, \Gamma_1] \subset \Gamma_0.$$

При этом для $a \in \Gamma_m$, $b \in \Gamma_n$, m, $n = 0, 1$, закон коммутирования таков:

$$[a, b] = (-1)^{(m+1)(n+1)}[b, a].$$

Задача. Показать, что для трех элементов $a \in \Gamma_m$, $b \in \Gamma_n$, $c \in \Gamma_p$, m, n, $p = 0, 1$, имеет место обобщенное тождество Якоби

$$(-1)^{(p+1)(m+1)}[[a, b], c] + (-1)^{(m+1)(n+1)}[[c, a], b] + \\ + (-1)^{(n+1)(p+1)}[[b, c], a] = 0.$$

$\mathbb{Z}_2$-градуированные пространства $\Gamma_0 \oplus \Gamma_1$, обладающие умножением с подобными свойствами, стали называться в современной литературе «супералгебрами Ли» после того, как они появились в аппарате квантовой физики.

Вычисление произведения Уайтхеда в конкретных случаях бывает затруднительно. Рассмотрим сферу S^{2n} $(n \geqslant 1)$ и группу $\pi_{2n}(S^{2n}) = \mathbb{Z}$ с базисным элементом $a \in \pi_{2n}(S^{2n})$. Квадрат $[a, a]$ оказывается элементом бесконечного порядка в группе $\pi_{4n-1}(S^{2n})$ (для $n = 1$ он будет указан в § 23). Для нечетномерных сфер S^{2n-1} базисный элемент a группы $\pi_{2n-1}(S^{2n-1}) = \mathbb{Z}$ имеет квадрат Уайтхеда порядка 2 (или нулевой):

$$[a, a] = (-1)^{(2n-1)(2n-1)}[a, a] = -[a, a],$$
$$2[a, a] = 0 \text{ в группе } \pi_{4n-3}(S^{2n-1}).$$

Утверждение. *Для групп Ли и H-пространств с единицей произведение Уайтхеда тривиально*: $[a, b] = 0$ *для любых* $a \in \pi_i(M)$, $b \in \pi_j(M)$.

Доказательство. Если хотя бы одно из чисел i, j (скажем, i) равно единице, то утверждение следует из теоремы о коммутативности $\pi_1(M)$ и тривиальности действия $\pi_1(M)$ на всех $\pi_j(M)$. Пусть $i \geqslant 2$, $j \geqslant 2$. Элементы a и b представлены отображениями α: $D^i \to M$, $\partial D^i \to 1$, β: $D^j \to M$, $\partial D^j \to 1$. Рассмотрим произведение

$$\alpha\beta\colon D^i \times D^j \to M,$$

полагая $\alpha\beta(x, y)=\alpha(x)\beta(y)$. На границе $\partial(D^i\times D^j)=S^{i+j-1}$ отображение $\alpha\beta$ индуцирует элемент $[a, b]\in\pi_{i+j-1}(M)$ по определению последнего. Поэтому $[a, b]=0$. Утверждение доказано.

§ 23. Сведения о гомотопических группах сфер. Оснащенные многообразия. Инвариант Хопфа

1. Оснащенные многообразия и гомотопические группы сфер. Изучение особых точек векторных полей и связанных с ними инвариантов приводило нас к использованию степени отображения $S^n\to S^n$, т. е. группы $\pi_n(S^n)$. Все группы $\pi_i(S^n)$ с $i<n$, как доказывалось, тривиальны. Рассмотрим теперь задачу о гомотопической классификации не обращающихся в нуль векторных полей n в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $n(x)\to n_0$ при $|x|\to\infty$. Потребовав дополнительно, чтобы $|n|=1$, мы получаем непрерывное отображение

$$\mathbb{R}^n\cup\infty\to S^{n-1},$$

причем $(\infty)\mapsto n_0\in S^{n-1}$. Однако $\mathbb{R}^n\cup(\infty)=S^n$. Поэтому мы приходим к задаче о вычислении группы $\pi_{n+1}(S^n)$. Более общо: если поле $n(x)$ представляет собой произвольную векторнозначную функцию $n(x)=(\xi^1(x), \ldots, \xi^m(x))\neq 0$, $m\neq n$, то, считая, что $|n|=1$, получим отображение $S^n\to S^{m-1}$. Тем самым задача сводится к вычислению групп $\pi_n(S^{m-1})$.

До сих пор из гомотопических групп сфер мы нашли только группы $\pi_i(S^1)=0$, $i>1$; $\pi_n(S^n)=\mathbb{Z}$ и $\pi_i(S^n)=0$, $i<n$. Мы укажем здесь геометрический метод изучения гомотопических групп, основанный на изучении полных прообразов регулярной точки.

Рассмотрим отображение $f\colon S^{n+k}\to S^n$; мы будем считать его гладким. Пусть точка $s_0\in S^n$ является правильной точкой отображения f. Выберем на сфере S^n локальную систему координат в окрестности точки s_0, т. е. зададим в той окрестности n функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ таких, что уравнения $\varphi_1=0, \ldots, \varphi_n=0$ выделяют только точку s_0 и градиенты $\operatorname{grad}\varphi_i$ линейно независимы в точке. Из правильности отображения f в точке s_0 следует, что полный прообраз $f^{-1}(s_0)$ является гладким k-мерным замкнутым многообразием

$$f^{-1}(s_0)=W^k\subset S^{n+k}.$$

Более точно, прообразы функций φ_i — функции $\tilde\varphi_i(x)=f^*\varphi_i(x)=\varphi_i(f(x))$, определенные в окрестности W^k, задают W^k уравнениями

$$\tilde\varphi_1=0, \quad \ldots, \quad \tilde\varphi_n=0.$$

Из правильности точки s_0 для f следует, что во всех точках из $f^{-1}(s_0)=W^k$ градиенты $\operatorname{grad}\tilde\varphi_i$ линейно независимы и направ-