Глава 6

ГЛАДКИЕ РАССЛОЕНИЯ (КОСЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ)

§ 24. Гомотопическая теория косых произведений

1. Понятие гладкого расслоения. Гладкое расслоение есть составной объект, включающий в себя:

а) *пространство расслоения* — гладкое многообразие E;

б) *базу расслоения* — гладкое многообразие M;

в) *проекцию* — гладкое отображение $p\colon\ E \to M$, дифференциал которого имеет во всех точках максимальный ранг $n = \dim M$;

г) *слой* F — гладкое многообразие;

д) *структурную группу* — группу G гладких преобразований слоя F;

е) *структуру расслоения*: база M покрыта областями $U_\alpha \subset M$, над которыми в полные прообразы введены координаты прямого произведения с помощью диффеоморфизмов φ_α: $F \times U_\alpha \to p^{-1}(U_\alpha)$ таких, что $p\varphi_\alpha(y, x) = x$ при $x \in U_\alpha$, $y \in F$. Преобразования $\lambda_{\alpha\beta} = \varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha$: $F \times U_{\alpha\beta} \to F \times U_{\alpha\beta}$, где $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, называют функциями склейки расслоения. Можно записать их в виде $\lambda_{\alpha\beta}(y, x) = (T^{\alpha\beta}(x) y, x)$. Требуется, чтобы при любых α, β и x преобразование $T^{\alpha\beta}(x)\colon F \to F$ производилось элементом группы G. Таким образом, функции склейки $\lambda_{\alpha\beta}$ определяют гладкие отображения области $U_{\alpha\beta}$ в группу G:

$$T^{\alpha\beta}\colon\ U_{\alpha\beta} \to G, \quad x \mapsto T^{\alpha\beta}(x).$$

Из определения функций $T^{\alpha\beta}(x)$ получаем

$$T^{\alpha\beta} = (T^{\beta\alpha})^{-1} \quad \text{и} \quad T^{\alpha\beta} T^{\beta\gamma} T^{\gamma\alpha} = 1 \tag{1}$$

(последнее равенство выполняется в пересечении трех областей $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma = U_{\alpha\beta\gamma}$). Все это вместе описывает структуру косого произведения или гладкого расслоения.

Области U_α называются *координатными окрестностями* расслоения.

Простейший пример расслоения — проекция прямого произведения двух многообразий на первый сомножитель с единичной структурной группой. Такое расслоение называется *тривиальным*.

Среди косых произведений особое значение имеют главные расслоения и векторные расслоения.

Главное расслоение определяется так: слой F совпадает с группой G, группа G действует на слое $G=F$ правыми сдвигами R_g: $G\to G$, $R_g(x)=xg$. Имеет место следующая

Теорема 1. *Главное расслоение реализуется как свободное левое гладкое действие группы G на многообразии E, причем орбиты группы G находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с точками базы M.*

Замечание. Напомним, что гладким левым действием группы G на E называется действие $(g, y)\mapsto g(y)$ $(y\in E, g\in G)$, которое гладко зависит от обоих аргументов (g, y). При этом требуется чтобы: (1) орбиты были равномерно близки друг к другу; (2) в каждой точке $y_0\in E$ достаточно малый гладкий n-мерный ($n=\dim M$) диск D^n_ε, не касающийся орбиты группы G, пересекал все близкие орбиты и при этом только в одной точке каждую (рис. 133). Действие называется *свободным*, если $g(y)=y$ для какого-то $y\in E$ только при $g=1$.

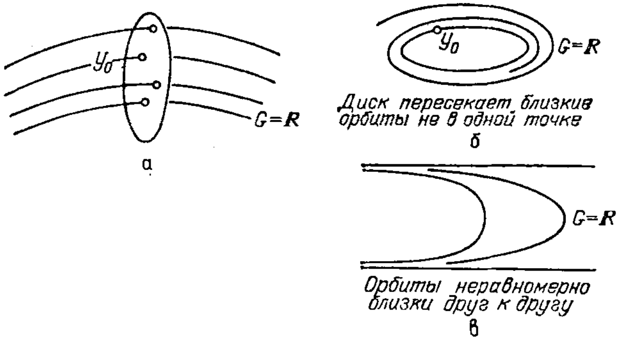

Рис. 133

Ранее (см. гл. 4) мы рассматривали только ситуацию, когда группа G дискретна, E и M являются многообразиями одной размерности n, а орбиты группы G являются дискретными наборами точек. Наше условие здесь означало, что окрестность D^n_ε точки y_0 не содержит других точек той же орбиты и выбирает из каждой достаточно близкой орбиты только по одной точке.

Доказательство теоремы 1. Воспользуемся тем, что правые сдвиги коммутируют с левыми: $R_{g_1}L_{g_2}(y)=L_{g_2}R_{g_1}(y)=g_2yg_1$. Действие (слева) группы G определим над каждой координатной окрестностью U_α формулой

$$L_{g_1}(g, x)=(g_1g, x).$$

Диффеоморфизм φ_α: $G\times U_\alpha \to p^{-1}(U_\alpha)$ (см. определение структуры расслоения) переносит это действие в область $p^{-1}(U_\alpha)$. Проверим корректность этого определения над пересечением $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$. Строго говоря, имеем два определения левого сдвига в области $p^{-1}(U_{\alpha\beta})$:

$$p^{-1}(U_{\alpha\beta}) \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} G\times U_{\alpha\beta} \xrightarrow{L_{g_1}} G\times U_{\alpha\beta} \xrightarrow{\varphi_\alpha} p^{-1}(U_{\alpha\beta}),$$

$$p^{-1}(U_{\alpha\beta}) \xrightarrow{\varphi_\beta^{-1}} G\times U_{\alpha\beta} \xrightarrow{L_{g_1}} G\times U_{\alpha\beta} \xrightarrow{\varphi_\beta} p^{-1}(U_{\alpha\beta}).$$

Необходимо проверить, что для любой точки $y \in p^{-1}(U_\alpha)$

$$\varphi_\alpha L_{g_1}\varphi_\alpha^{-1}(y) \overset{?}{=} \varphi_\beta L_{g_1}\varphi_\beta^{-1}(y).$$

Применяя к этому равенству φ_β^{-1}, преобразуем его к виду

$$\lambda_{\alpha\beta}L_{g_1}\varphi_\alpha^{-1}(y) = L_{g_1}\varphi_\beta^{-1}(y).$$

Но последнее равенство вытекает из перестановочности правых сдвигов с левыми: $L_{g_1}\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta}L_{g_1}$ и $\lambda_{\alpha\beta}\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\beta^{-1}$. Таким образом, левое действие группы g введено в каждой области $p^{-1}(U_\alpha)$, и они согласованы. Ясно, что это действие свободное. Теорема доказана.

Итак, все главные расслоения получаются из свободных действий групп G на многообразиях E.

Структура расслоения с любым слоем F определяется по существу лишь «функциями склейки» $\lambda_{\alpha\beta}$ или отображениями $T^{\alpha\beta}$: $U_{\alpha\beta} \to G$, удовлетворяющими простым требованиям (2). Таким образом, слой не играет роли: по любому расслоению с группой G и слоем F можно построить расслоение с другим слоем F', если задана реализация («представление») группы G в виде группы гладких преобразований слоя F',— достаточно взять те же функции склейки $T^{\alpha\beta}$: $U_{\alpha\beta} \to G$, но реализованные как преобразования другого слоя. Полученное расслоение называют *ассоциированным* с исходным расслоением. В частности, можно всегда реализовать функции склейки в виде правых сдвигов самой группы G и построить главное расслоение, ассоциированное с исходным. Получаем вывод:

Любое расслоение определяется как ассоциированное с некоторым главным расслоением. Таким образом, задача классификации расслоений сводится к задаче классификации главных расслоений.

Важным классом расслоений являются векторные расслоения, у которых слой F есть $\mathbb{R}^n$, а группа G действует в F как подгруппа группы $GL(n, \mathbb{R})$. Естественно выделяются: ортогональные векторные расслоения ($G \subset O(n)$), комплексные расслоения $(F=\mathbb{C}^n,\ G\subset GL(n,\mathbb{C}))$ и, в частности, унитарные расслоения $(G\subset U(n))$.

Важные классы примеров. 1. *Накрытия.* Здесь слой F дискретен (набор точек), а группа G совпадает с группой монодромий накрытия. В случае накрытий главные расслоения назывались *регулярными*; они определялись действием дискретной группы $G=\sigma(\pi_1(M))$ на пространстве расслоения. Примеры накрытий см. в гл. 4.

2. *Расслоения, связанные с многообразиями линейных элементов.* Если M — гладкое n-мерное многообразие, то естественно определяется *n-реперное расслоение* $p\colon E\to M$, где точками многообразия E являются пары (x,τ^n), состоящие из точки $x\in M$ и невырожденного касательного n-репера τ^n в точке x. Здесь слой F и структурная группа G совпадают (главное расслоение) и $G=GL(n,\mathbb{R})$. Действие группы $GL(n,\mathbb{R})$ определяется естественным образом: если $A\in GL(n,\mathbb{R})$ и $(x,\tau^n)\in E$, то

$$A(x,\tau^n)=(x,A(\tau^n)).$$

Если на многообразии задана риманова метрика (g_{ij}), то выделяется класс ортонормированных реперов; возникает естественное главное расслоение $E_O\to M$ с группой $O(n)$. Если многообразие ориентируемо, то можно ввести класс ориентированных реперов. Возникает реперное главное расслоение $E_{SO}\to M$ с группой $SO(n)$. Если M — комплексное n-мерное многообразие, то определяются комплексные реперы и расслоение $E_{\mathbb{C}}\to M$ с группой $GL(n,\mathbb{C})$, а если на M задана эрмитова метрика, то определено также расслоение $E_U\to M$ с группой $U(n)$. Все это — главные расслоения разных видов линейных элементов.

Другие многообразия линейных элементов, описанные в гл. 1, являются пространствами расслоений, ассоциированных с вышеперечисленными. Наиболее известные из них имеют в качестве слоя: а) $F=\mathbb{R}^n$; б) $F=S^{n-1}$ (единичные векторы или лучи); в) $F=\mathbb{R}P^{n-1}$ (прямые или направления); г) $F=V_{n,k}$ (ортонормированные k-реперы в $\mathbb{R}^n$); д) $F=\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ (кососимметрические k-формы); е) $\mathbb{R}^n\otimes\ldots\otimes\mathbb{R}^n\otimes(\mathbb{R}^n)^*\otimes\ldots\otimes(\mathbb{R}^n)^*$ (тензоры).

3. *Однородные пространства.* Для группы Ли G и ее подгруппы H определялось (см. гл. 1) однородное пространство левых смежных классов

$$M=G/H.$$

Мы имеем проекцию $p\colon G\to M$ со слоем $H\subset G$, причем подгруппа H свободно действует слева на группе

$$g\mapsto hg\qquad(g\in G,\ h\in H).$$

Орбиты группы H — это левые смежные классы — точки базы.

Таким образом, однородное пространство является базой главного расслоения. Ряд примеров однородных пространств уже рассматривался в гл. 4.

4. *Нормальное расслоение* к n-мерному многообразию M, гладко вложенному в $(n+k)$-мерное многообразие, наделенное римановой метрикой (например, в евклидово пространство). Точки нормального (векторного) расслоения — это пары (x, τ), где $x \in M$ и τ — вектор, нормальный к M в точке x. Группа G есть, очевидно, $O(k)$, слой F есть $\mathbb{R}^k$.

В некоторых случаях для гладких расслоений $p\colon E \to M$ со слоем F структурная группа несущественна. В этих случаях «функции склейки» $\lambda_{\alpha\beta}$ могут описываться произвольными диффеоморфизмами $F \to F$. Мы говорим в этом случае, что структурной группой расслоения является группа всех гладких преобразований (диффеоморфизмов) слоя F на себя. Эта группа обозначается через $\operatorname{diff} F$. В ней имеется подгруппа $\operatorname{diff}^+ F$ диффеоморфизмов, сохраняющих ориентацию.

Естественным образом определяются отображения одного расслоения в другое. Пусть $(E, M, p\colon E \to M, F, G)$ и $(E', M', p'\colon E' \to M', F, G)$ — два расслоения с одной и той же структурной группой G и одним и тем же слоем F.

Определение 1. Отображение $\tilde{f}\colon E \to E'$ пространств расслоений является *отображением расслоений*, если оно сохраняет структуру косого произведения, т. е. если:

а) отображение $\tilde{f}$ послойно, т. е. $p'\tilde{f} = fp$, где $f\colon M \to M'$ — некоторое отображение базы расслоения (отображение f однозначно определяется этим требованием);

б) на каждом слое отображение $f_F\colon F \to F$ является преобразованием, принадлежащим структурной группе G. Точно это означает следующее: над координатной окрестностью $U_\alpha \subset M$ задан диффеоморфизм $\varphi_\alpha\colon F \times U_\alpha \to p^{-1}(U_\alpha) \subset E$, а над координатной окрестностью $U'_{\beta'} \subset M'$ — диффеоморфизм $\varphi'_{\beta'}\colon F \times U'_{\beta'} \to p'^{-1}(U'_{\beta'})$. Поэтому в области $W_{\alpha\beta'} = U_\alpha \cap f^{-1}(U'_{\beta'})$ имеется отображение

$$F \times W_{\alpha\beta'} \xrightarrow{\varphi_\alpha} p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\tilde{f}} p'^{-1}(U'_{\beta'}) \xrightarrow{(\varphi'_{\beta'})^{-1}} F \times U'_{\beta'},$$

которое для каждой точки $x \in W_{\alpha\beta'}$ действует по правилу: $(y, x) \mapsto (Ty, f(x))$, где T — некоторое преобразование слоя F. Условие б) заключается в том, что это преобразование должно принадлежать структурной группе G.

Определение 2. Отображение между двумя расслоениями с общей базой $M' = M$ называется *эквивалентностью*, если индуцированное отображение баз $M \to M$ является тождественным.

В дальнейшем мы рассмотрим задачу классификации расслоений относительно этого отношения эквивалентности, особенно в некоторых частных случаях (например, когда база — сфера). Ниже мы покажем, что все расслоения, база которых есть диск D^n (или $\mathbb{R}^n$), являются прямыми произведениями, эквивалентными тривиальным.

2. Связность. Введем теперь понятие *связности* в расслоении с пространством E, базой M, проекцией p: $E \to M$, слоем F и структурной группой G. Забудем сначала о структурной группе G (это эквивалентно тому, что вместо группы G мы будем считать структурной группой расслоения группу всех диффеоморфизмов слоя F).

Интуитивно, расслоение вместе со связностью можно представлять себе так: задано семейство пространств $\{F_x\}$, зависящих от параметра, пробегающего многообразие M (базу); объединение всех слоев $E = \bigcup\limits_x F_x$ представляет собой «пространство расслоения». Каждому пути $\gamma(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, в базе M сопоставляется «параллельный перенос» слоя F вдоль пути γ из начальной точки в конечную, т. е. отображение (диффеоморфизм)

$$\varphi_\gamma\colon F_{x_0} \to F_{x_1}, \quad x_0 = \gamma(a), \quad x_1 = \gamma(b).$$

Естественные требования:

1) φ_γ непрерывно зависит от пути γ;

2) $\varphi_{\gamma_1\gamma_2} = \varphi_{\gamma_1}\varphi_{\gamma_2}$; $\varphi_{\gamma^{-1}} = (\varphi_\gamma)^{-1}$; если путь γ постоянен, то отображение φ_γ тождественно;

3) φ_γ не зависит от параметризации пути.

Способ задания такого семейства преобразований φ (связности) мы сейчас укажем.

Определение 3. *Связностью общего вида* (без группы G) мы назовем распределение, которое в каждой точке y пространства E выделяет гладко зависящее от точки $y \in E$ n-мерное ($n = \dim M$) касательное направление, трансверсальное к проходящему через y слою (т. е. проектирующееся на базу M без вырождений при проекции p: $E \to M$). Эти направления называются *горизонтальными направлениями связности*. Гладкая кривая $\tilde{\gamma}(t)$ в E называется *горизонтальной*, если ее касательный вектор при всех t принадлежит горизонтальным направлениям.

Лемма 1. *В любом гладком расслоении имеется связность общего вида.*

Доказательство. Рассмотрим риманову метрику (g_{ij}) на пространстве E, которая существует в силу теорем гл. 2. Направления размерности n, ортогональные к слоям в каждой точке $y \in E$, образуют общую связность. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если в расслоении (E, M, p, F) с компактным слоем F задана общая связность, то для любой кусочно гладкой кривой $\gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, в базе M и любой точки $y_0 \in E$, для которой $p(y_0) = \gamma(0)$, найдется лишь одна горизонтальная кривая*

$\tilde{\gamma}(t)$ в E, накрывающая $\gamma(t)$, т. е. такая, что $p\tilde{\gamma}(t)=\gamma(t)$ и $\tilde{\gamma}(0)=x_0$.

Доказательство. Рассмотрим малый гладкий отрезок δ кривой $\gamma(t)$, который можно считать несамопересекающимся. Над отрезком δ полный прообраз $p^{-1}(\delta)$ представляет собой гладкое расслоение со слоем F, базой δ и пространством $E_\delta=p^{-1}(\delta)$. Горизонтальные направления связности в расслоении E порождают (или высекают) одномерные горизонтальные направления в расслоении E_δ над отрезком δ. Рассмотрим интегральные траектории этих горизонтальных направлений в пространстве $E_\delta=$ $=p^{-1}(\delta)$. Все эти кривые горизонтальны. Утверждение леммы вытекает из существования и единственности траекторий с заданным началом (здесь компактность слоя существенна, так как иначе интегральные траектории могли бы уходить в бесконечность).

Замечание. Для некомпактных слоев лемма 2 может оказаться неверной. При построении общей связности нужно специально заботиться, чтобы горизонтальные кривые не уходили в бесконечность. Для дифференциально-геометрических связностей, учитывающих наличие структурной группы G (см. ниже, в § 25), это условие будет выполнено.

Итак, пусть задано гладкое расслоение с общей связностью и компактным слоем F (либо, возможно, некомпактным слоем F, но тогда с условием, что для этой связности лемма 2 верна для любой кусочно гладкой кривой $\gamma(t)$ в базе M). В силу леммы 2 для любого кусочно гладкого пути $\gamma(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, определено отображение слоя над точкой $x_0=\gamma(a)$ в слой над точкой $x_1=\gamma(b)$:

$$\varphi_\gamma\colon\ F_{x_0}\to F_{x_1}$$

(ввиду гладкой зависимости горизонтальных кривых от начальной точки; см. доказательство леммы 2). Ясно, что отображение φ_γ не зависит от параметризации пути γ и что

$$\varphi_{\gamma_1\gamma_2}=\varphi_{\gamma_1}\varphi_{\gamma_2},\quad \varphi_{\gamma^{-1}}=(\varphi_\gamma)^{-1}.$$

Эти отображения называются *параллельными переносами слоя, порожденными связностью*. В частности, всякий путь γ с началом и концом в одной и той же точке x_0 определяет гомоморфизм

$$\varphi\colon\ \Omega(x_0,\ M)\to G=\operatorname{diff}F,$$
$$\gamma\mapsto\varphi_\gamma\colon\ F\to F$$

(H-пространства в группу). Сопоставление, ставящее в соответствие пути γ преобразование φ_γ слоя в слой с вышеперечисленными свойствами, называется *абстрактной связностью*, а образ

$\varphi(\Omega)$ в группе G — *группой голономий* данной связности. Это — обобщение группы монодромии.

Определение 4. Для расслоений со структурной группой G *G-связностью* (или *связностью, совместимой с группой G*) называется семейство горизонтальных направлений в пространстве расслоения E таких, что все переносы φ_γ принадлежат структурной группе G (доказательство существования G-связностей в расслоении приводится в § 25 этой главы; см. лемму 2).

Структурной группой расслоения со связностью фактически является группа голономий. В следующем параграфе будет дано глобальное построение и дифференциально-геометрическое описание G-связностей.

3. Вычисление гомотопических групп с помощью расслоений.

Теорема 2. *Любое гладкое расслоение с компактным слоем обладает свойством накрывающей гомотопии для всех многообразий K и их кусочно гладких отображений и гомотопий в базе M и пространстве расслоения E.*

Доказательство. Пусть гомотопия $F\colon K\times I \to M$ накрыта при $t=0$ отображением $\tilde f\colon K\times 0\to E$, т. е. $p\tilde f = F|_{K\times 0} = f_0$. Согласно лемме 1 можно задать общую связность в расслоении. Согласно лемме 2 связность порождает однозначный рецепт накрытия всех кусочно гладких путей (движений точки по базе M), непрерывно зависящий от пути и от начальной точки накрытия. Ввиду этого теорема следует из лемм 1 и 2.

Следствие. *Имеется изоморфизм гомотопических групп $\pi_j(E, F, y_0) = \pi_j(M, x_0)$, где $x_0 = p(y_0)$, и точная последовательность*

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & \pi_j(F) \arrow[r, "i_*"] & \pi_j(E) \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\varphi_*"'] & \pi_j(E, F) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & \pi_{j-1}(F) \arrow[r] & \ldots \\ & & & \pi_j(M). & & \end{tikzcd}$$

Следствие вытекает из теоремы 2 в силу утверждений § 22.

Замечание. Укажем другую конструкцию гомоморфизма $\partial\colon \pi_n(M)\to\pi_{n-1}(F)$, не использующую относительных гомотопических групп. Пусть $f\colon D^n\to M$ — отображение, переводящее границу S^{n-1} диска D^n в точку x_0, реализующее элемент $\alpha\in\pi_n(M, x_0)$. Соединим фиксированную точку a_0 границы диска с любой другой точкой a границы S^{n-1} хордой $[a_0, a]$. Тогда $f[a_0, a]$ — замкнутый путь в M с началом и концом в точке x_0. Поднимем этот путь в пространство расслоения так, чтобы он начинался в точке y_0, где $p(y_0) = x_0$. Конец поднятого пути будет некоторой точкой b слоя $F = p^{-1}(x_0)$. Положим $\hat f(a) = b$. Мы получили отображение $\hat f\colon S^{n-1}\to F$.

Задача. Докажите, что гомотопический класс построенного отображения $\hat f\colon S^{n-1}\to F$ совпадает с $\partial\alpha$, где ∂ — определенный выше граничный гомоморфизм в точной последовательности расслоения.

Из такого определения граничного гомоморфизма легко следует, в частности, что для тривиального расслоения гомоморфизм ∂ нулевой (проверьте!).

Применим теперь точную последовательность расслоения для вычисления некоторых гомотопических групп. Напомним, что уже в гл. 5 (см. § 22) мы извлекали из такой точной последовательности информацию о гомотопических группах накрывающих пространств и пространств петель.

Пример 1. Рассмотрим простейшие главные расслоения:

а) $\mathbb{R}P^3 = SO(3) \xrightarrow{p} S^2$ (слой $SO(2)=S^1$);

б) $S^3 = SU(2) \xrightarrow{p} S^2$ (слой S^1).

Расслоение а) представляет собой расслоение единичных касательных векторов на сфере S^2; оно интерпретируется также как главное расслоение $SO(3) \to SO(3)/SO(2) = S^2$ с однородной базой (см. п. 1). Расслоение б) аналогичным образом описывается как расслоение $SU(2) \to SU(2)/U(1) = S^2$, где $U(1)$ вкладывается в $SU(2)$ как подгруппа диагональных матриц. Расслоение б) называется *расслоением Хопфа*. Напомним (см. § 22), что группы $\pi_j(\mathbb{R}P^3)$ и $\pi_j(S^3)$ при $j>1$ одинаковы, так что с точки зрения гомотопических групп расслоения а) и б) дают одно и то же. Рассмотрим расслоение б), учитывая при этом равенства (см. § 21):

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z} \quad \text{при } n \geqslant 1,$$
$$\pi_j(S^1) = 0 \quad \text{при } j > 1.$$

Напишем точную гомотопическую последовательность расслоения б):

$$\ldots \pi_j(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_j(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_j(S^2) \xrightarrow{\partial} \pi_{j-1}(S^2) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

Так как $\pi_j(S^1) = \pi_{j-1}(S^1) = 0$ при $j>2$, то возникает точная последовательность

$$0 \to \pi_j(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_j(S^2) \to 0 \quad (j>2),$$

и $\pi_j(S^3) = \pi_j(S^2)$ для всех $j>2$. В частности, $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z} = \pi_3(S^2)$.

Пример 2. *Обобщенное расслоение Хопфа*

$$p\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n \quad (\text{слой } F = S^1)$$

определяется следующим образом. Зададим сферу комплексным уравнением $\sum_{j=0}^{n} |z_j|^2 = 1$. Действие группы S^1 на сфере имеет вид

$$z \mapsto e^{i\varphi} z \quad \left(z = (z_0, \ldots, z_n) \in S^{2n+1},\ e^{i\varphi} \in S^1\right).$$

Орбиты этого действия составляют $\mathbb{C}P^n$ по определению этого многообразия. Как мы знаем,

$$\pi_1(S^1) = \pi_{2n+1}(S^{2n+1}) = \mathbb{Z},$$
$$\pi_j(S^1) = 0 \text{ при } j > 1 \text{ и } \pi_q(S^{2n+1}) = 0 \text{ при } q < 2n+1.$$

Из точной последовательности расслоения получаем

$$\pi_2(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z},\ \pi_j(\mathbb{C}P^n) = \pi_j(S^{2n+1}) \text{ при } j > 2.$$

В частности, $\pi_{2n+1}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$ (проверьте!).

Пример 3. Расслоение касательных n-реперов к n-мерной сфере S^n. Это — главное расслоение:

а) $SO(n+1) \to SO(n+1)/SO(n) = S^n$ (слой $SO(n)$).

Рассмотрим также ассоциированные расслоения k-реперов:

б) $V_{n+1,k+1} \to S^n$ (слой $V_{n,k}$; напомним, что $V_{n,k}$ — многообразие ортонормированных k-реперов в n-мерном пространстве). При $k=1$ получаем расслоение $V_{n,2} \to S^n$ со слоем $V_{n,1} = S^{n-1}$ — расслоение единичных касательных векторов.

Рассмотрим сначала гомотопическую последовательность расслоения а):

$$\ldots \pi_{j+1}(S^n) \xrightarrow{\partial} \pi_j(SO(n)) \xrightarrow{i*} \pi_j(SO(n+1)) \xrightarrow{p*} \pi_j(S^n) \to \ldots$$

При $j < n-1$ получаем $\pi_j(SO(n)) = \pi_j(SO(n+1))$. При $j = n-1$ имеем

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_n(S^n) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(SO(n)) & \xrightarrow{i*} & \pi_{n-1}(SO(n+1)) & \xrightarrow{p*} & \pi_{n-1}(S^n). \\ \| & & & & & & \| \\ \mathbb{Z} & & & & & & 0 \end{array}$$

Отсюда получаем, что гомоморфизм i_* для $j = n-1$ есть эпиморфизм (отображение «на») с циклическим ядром вида $\partial(\pi_n(S^n))$. Если касательное расслоение сферы S^n тривиально, как это верно, например, при $n=3$, так как S^3 — группа Ли, то гомоморфизм ∂ также тривиален. Поэтому топологически $SO(4) = SO(3) \times S^3$ и $\pi_j(SO(4)) = \pi_j(S^3) + \pi_j(SO(3))$.

Используя теорему 2, докажем утверждение, которое использовалось в § 23.

Утверждение 1. *Пусть M — многообразие размерности q. Всякое отображение $M \to SO(n+1)$ гомотопно отображению $M \to SO(n) \subset SO(n+1)$, если $q < n$; если $q < n-1$, то включение $SO(n) \to SO(n+1)$ определяет взаимно однозначное соответствие*

$$[M^q, SO(n)] \to [M^q, SO(n+1)].$$

Доказательство. Пусть $q < n$. Рассмотрим отображение $\tilde{f}\colon M \to SO(n+1)$. Тогда проекция $f = p\tilde{f}\colon M \to S^n$ стягивается к точке, т. е. существует гомотопия $F = \{f_t\}\colon M \times I \to S^n$ с $f_0 = f$

и f_1: $M \to s_0 \in S^n$. Накрывающая гомотопия $\tilde{F} = \{\tilde{f}_t\}$ с $\tilde{f}_0 = \tilde{f}$ будет деформацией отображения $\tilde{f}$ к отображению $\tilde{f}_1$: $M \to SO(n) = p^{-1}(s_0)$.

Пусть $q < n - 1$, и два отображения $\tilde{f}_0$ и $\tilde{f}_1$: $M \to SO(n)$ гомотопны в $SO(n+1)$ посредством гомотопии $\tilde{F}$: $M \times I \to SO(n+1)$. Проекция $F = p\tilde{F}$: $M \times I \to S^n$ переводит край $(M \times 0) \cup (M \times 1)$ в точку $s_0 \in S^n$. Рассмотрим гомотопию Φ_t отображения $p\tilde{F} = F = \Phi_0$ в базе S^n к постоянному отображению со значением s_0, в процессе которой образы оснований цилиндра $M \times 0$ и $M \times 1$ неподвижны (стоят в одной точке s_0). Накрывающая гомотопия Φ_t в $SO(n+1)$ при $t = 1$ дает гомотопию между $\tilde{f}_0$ и $\tilde{f}_1$ в одном слое $SO(n)$. Утверждение доказано.

Рассмотрим теперь расслоение б) со слоем $V_{n,k}$ сначала для $k = 1$:

$$p\colon V_{n+1,2} \to S^n \quad (\text{слой } V_{n,1} = S^{n+1}).$$

Из точной последовательности расслоения б) получаем

$$\pi_j(V_{n+1,2}) = 0 \text{ при } j < n - 1,$$

$$\pi_{n-1}(V_{n+1,2}) \text{ — циклическая группа.}$$

Действительно, эта последовательность имеет вид

$$\ldots \xrightarrow{p_*} \pi_j(S^n) \xrightarrow{\partial} \pi_{j-1}(S^{n-1}) \to \pi_{j-1}(V_{n+1,2}) \to \pi_{j-1}(S^n) \to \ldots$$

Если $j = 1$, то $\pi_j(S^n) = \pi_{j-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$, $\pi_{j-1}(S^n) = 0$. Найдем гомоморфизм ∂:

$$\begin{array}{ccc} \partial\colon \pi_n(S^n) & \to & \pi_{n-1}(S^{n-1}). \\ \| & & \| \\ \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \end{array}$$

Рассмотрим для этого касательное векторное поле ξ на сфере S^n, имеющее ровно одну особую точку s_0 (с индексом 2 для четных n и индексом нуль для нечетных n согласно результатам § 15). Это векторное поле определяет отображение $\tilde{f}$: $S^n \setminus s_0 = D^n \to V_{n+1,2}$, задаваемое формулой $\tilde{f}(\tau) = \left(\tau, \frac{\xi}{|\xi|}\right)$, где τ — единичный вектор в $\mathbb{R}^{n+1}$. Ясно, что отображение $p \cdot \tilde{f} = f$: $D^n \to S^n$ имеет степень $+1$, причем $f(\partial D^n) = s_0$. Проверьте, что замыкание этого отображения на границе $\tilde{f}$: $\partial D^n \to V_{n,1} = S^{n-1}$ в слой имеет степень, равную индексу векторного поля ξ в особой точке. Из приведенной выше явной конструкции гомоморфизма ∂ получаем: гомоморфизм ∂ есть умножение на целое число, равное индексу векторного поля ξ в точке s_0. Отсюда следует:

$$\pi_{n-1}(S^{n-1})/\partial\pi_n(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Окончательно имеем

$$\pi_{n-1}(V_{n+1,2}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{если } n \text{ нечетно;} \end{cases}$$

$$\pi_j(V_{n+1,2}) = 0 \text{ при } j < n-1.$$

Рассматривая последовательно расслоения

$$p\colon V_{n+1,k+1} \to S^n \quad (\text{слой } V_{n,k}),$$

мы из точной последовательности получаем

$$\pi_j(V_{n+1,k+1}) = 0 \text{ при } j < n-k,$$

$$\pi_{n-k}(V_{n+1,k+1}) \text{ — циклическая группа (докажите).}$$

Аналогично рассматриваются расслоения над сферой для унитарной и симплектической группы:

$$U(n) \to S^{2n-1} \quad (\text{слой } U(n-1)),$$

$$Sp(n) \to S^{4n-1} \quad (\text{слой } Sp(n-1)).$$

Из точной последовательности первого расслоения легко вывести, что $\pi_j(U(n)) = \pi_j(U(n-1))$ при $j < 2n-2$, а из точной последовательности второго расслоения — что $\pi_j(Sp(n)) = \pi_j(Sp(n-1))$ при $j < 4n-2$.

Поэтому группы $\pi_j(SO(n))$ при $j < n-1$, группы $\pi_j(U(n))$ при $j < 2n-2$, группы $\pi_j(Sp(n))$ при $j < 4n-2$ не зависят от n; они обозначаются соответственно через $\pi_j(SO)$, $\pi_j(U)$, $\pi_j(Sp)$ и называются *стабильными*.

Пример 4. Рассмотрим теперь расслоение единичных касательных векторов над ориентируемой поверхностью с g ручками:

$$p\colon E \to M_g^2 \quad (\text{слой } S^1).$$

Точки многообразия E — это пары (x, τ), где $x \in M_g^2$ и τ — единичный вектор в точке x. Для $g = 0$ мы знаем, что $E = SO(3)$. Для $g = 1$ мы имеем: $E = S^1 \times M_g^2 = S^1 \times T^2 = T^3$. Поэтому рассмотрим нетривиальный случай $g \geqslant 2$. Точная последовательность нашего расслоения имеет вид

$$\ldots \to \pi_i(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_i(E) \xrightarrow{p_*} \pi_i(M_g^2) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(S^1) \to \ldots$$

Если $i > 1$, то $\pi_i(S^1) = \pi_i(M_g^2) = 0$, так как универсальные накрывающие над S^1 и M_g^2 стягиваемы. Поэтому $\pi_i(E) = 0$ при $i > 1$. При $i = 1$ имеем точную последовательность

$$\begin{array}{c} 0 \to \pi_1(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E) \xrightarrow{p_*} \pi_1(M_g^2) \to 0. \\ \begin{array}{l} \quad\;\; \| \\ \quad\;\; \mathbb{Z} \end{array} \end{array}$$

Обозначим естественную образующую группы $\pi_1(S^1)$ через τ, а канонические образующие группы $\pi_1(M_g^2)$ через $a_1, \ldots, a_g$, $b_1, \ldots, b_g$; последние удовлетворяют соотношению

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}=1.$$

Пути a_j, b_j образуют «канонические разрезы» поверхности M_g^2; в результате этих разрезов поверхность превращается в $4g$-угольник Q_{4g} (рис. 134). Положим $i_*(\tau)=\bar\tau\in\pi_1(E)$ и выберем в $\pi_1(E)$ элементы $\bar a_1, \ldots, \bar a_g$, $\bar b_1, \ldots, \bar b_g$ с $p_*(\bar a_j)=a_j$, $p_*(\bar b_j)=b_j$. Группа $i_*\pi_1(S^1)$ является нормальным делителем в $\pi_1(E)$. Группа $\pi_1(E)$ порождается образующими $\bar\tau$, $\bar a_j$, $\bar b_j$, связанными соотношениями:

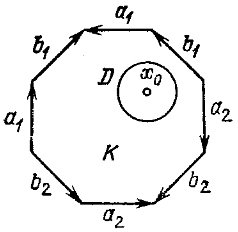

Рис. 134

1) $\bar a_j\bar\tau\bar a_j^{-1}=\bar\tau^{-\alpha_j}$,

2) $\bar b_j\bar\tau\bar b_j^{-1}=\bar\tau^{-\beta_j}$,

3) $\bar a_1\bar b_1\bar a_1^{-1}\bar b_1^{-1}\ldots\bar a_g\bar b_g\bar a\bar a_g^{-1}\bar b_g^{-1}=\bar\tau^{\gamma}$

(ниже будет показано, что $\alpha_j=\beta_j=1$, $\gamma=2-2g$). Действительно, соотношения 1) и 2) вытекают из того, что $i_*\pi_1(S^1)$ — нормальный делитель.

Соотношение 3) вытекает из того, что

$$p_*(\bar a_1\bar b_1\bar a_1^{-1}\bar b_1^{-1}\ldots\bar a_g\bar b_g\bar a_g^{-1}\bar b_g^{-1})=1.$$

Покажем, что все α_j и β_j равны единице. Действительно, внутренний автоморфизм $\bar\tau\mapsto\bar a_j\bar\tau\bar a_j^{-1}$ реализуется параллельным переносом слоя S^1 вдоль пути $a_j=p(\bar a_j)$ по базе M_g^2 согласно § 17. Ввиду ориентируемости поверхности M_g^2 после обноса получим диффеоморфизм слоя S^1 на себя, сохраняющий ориентацию. Поэтому все α_j и, аналогично, все β_j равны единице. Покажем теперь, что $\gamma=2-2g$. Зададим (на M_g^2) векторное поле ξ с одним нулем $\xi=0$ в точке x_0, не лежащей на путях (a_j, b_j). Положим $n(x)=\frac{\xi}{|\xi|}$ при $x\neq x_0$. Выкинем из поверхности M_g^2 малый диск D с центром x_0 (рис. 134). Поле n определяет отображение $K=Q_{4g}-D=S^1\times I\to E$, дающее гомотопию между произведением

$$\bar a_1\bar b_1\bar a_1^{-1}\bar b_1^{-1}\ldots\bar a_g\bar b_g\bar a_g^{-1}\bar b_g^{-1}\sim n|_{\partial D}\sim\bar\tau^{\gamma}$$

и образом границы ∂D диска D. Пути $\bar a_j$, $\bar b_j\in\pi_1(E)$ здесь определяются как поднятия путей a_j, b_j в пространство E с помощью векторного поля n. Согласно теореме Хопфа (§ 15) индекс особой точки x_0 поля n равен $2-2g$; из этого следует, что $\gamma=2-2g$.

Пример 5. Рассмотрим специальный пример — *кватернионное расслоение Хопфа.* Введем в $\mathbb{R}^{4n+4}$ структуру $(n+1)$-мерного кватернионного пространства $\mathbb{H}^{n+1}$ с кватернионными координатами $(q_0, \ldots, q_n)$. Сфера S^{4n+3} задается в этих координатах уравнением $\sum_{\alpha=0}^{n} |q_\alpha|^2 = 1$. На сфере действует (слева) группа $SU(2) = Sp(1) = S^3$ единичных кватернионов $|q| = 1$:

$$q(q_0, \ldots, q_n) = (qq_0, \ldots, qq_n).$$

Факторпространство $S^{4n+3}/SU(2)$ есть по определению кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$. Имеем главное расслоение с группой $SU(2)$:

$$S^{4n+3} \to \mathbb{H}P^n.$$

При $n=1$ имеем $\mathbb{H}P^1 = S^4$ (проверьте!), и наше расслоение превращается в «кватернионное расслоение Хопфа»

$$S^7 \to S^4 \quad (\text{слой } S^3).$$

Точная последовательность этого расслоения распадается на куски вида

$$0 \to \pi_i(S^7) \to \pi_i(S^4) \to \pi_{i-1}(S^3) \to 0$$

(гомоморфизмы $\pi_i(S^3) \to \pi_i(S^7)$ тривиальны, поскольку вложение слоя S^3 в S^7 гомотопно постоянному отображению). Следовательно, $\pi_7(S^4)$ — бесконечная группа.

4. Классификация расслоений. Рассмотрим главные расслоения:

а) $V_{n,k} \to G_{n,k}$ (слой $O(k)$),

где $G_{n,k}$ — многообразие k-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$, проходящих через начало координат;

б) $V_{n,k} \to \widehat{G}_{n,k}$ (слой $SO(k)$),

где $\widehat{G}_{n,k}$ — многообразие ориентированных k-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$, проходящих через начало координат (многообразие $\widehat{G}_{n,k}$ является двулистным накрытием над $G_{n,k}$);

в) $V_{n,k}^{\mathbb{C}} \to G_{n,k}^{\mathbb{C}}$ (слой $U(k)$),

где $G_{n,k}^{\mathbb{C}}$ — многообразие комплексных k-мерных плоскостей в $\mathbb{C}^n$, проходящих через начало координат, и $V_{n,k}^{\mathbb{C}}$ — многообразие унитарных k-реперов в $\mathbb{C}^n$;

г) $V_{n,k}^{\mathbb{H}} \to G_{n,k}^{\mathbb{H}}$ (слой $Sp(n)$),

где $G_{n,k}^{\mathbb{H}}$ — многообразие кватернионных k-мерных плоскостей в

$\mathbb{H}^n$, проходящих через начало координат, и $V_{n,k}^{\mathbb{H}}$ — многообразие кватернионных ортогональных k-реперов. В силу результатов примера 3 имеем

$$\begin{gathered}\pi_j(V_{n,k}) = 0 \text{ при } j < n-k,\\ \pi_j\left(V_{n,k}^{\mathbb{C}}\right) = 0 \text{ при } j < 2(n-k),\\ \pi_j\left(V_{n,k}^{\mathbb{H}}\right) = 0 \text{ при } j < 4(n-k).\end{gathered} \tag{2}$$

Пусть k фиксировано и $n \to \infty$ (пространство становится бесконечномерным). Если $n = \infty$, то из (2) следует, что для $V_{\infty,k}$, $V_{\infty,k}^{\mathbb{C}}$ и $V_{\infty,k}^{\mathbb{H}}$ все гомотопические группы равны нулю (эти пространства стягиваемы; проверьте).

Определение 5. Главное расслоение $E \to B$ с группой G называется *универсальным* для данной группы G, если E стягиваемо (или все группы $\pi_j(E)$ равны 0); если $\pi_j(E) = 0$ при $j \leqslant n+1$, то расслоение называется *n-универсальным*.

Важность этого понятия определяется классификационной теоремой (которую мы приводим без доказательства): множество расслоений с данной базой M и группой G (с точностью до эквивалентности) совпадает с множеством гомотопических классов отображений $[M, B_G]$ базы M в базу $B = B_G$ универсального расслоения. (Если $\dim M < n$, то можно заменить B_G базой n-универсального расслоения.)

Фактически все главные расслоения с группой G и базой M получаются из отображений $f\colon M \to B_G$ в базу универсального расслоения как индуцированные расслоения. Определим это важное понятие. Пусть заданы расслоение $p\colon E \to M$ со слоем F и структурной группой G и отображение $f\colon M' \to M$. Мы построим расслоение $p'\colon E' \to M'$ с тем же слоем F и той же группой G, называемое *индуцированным* расслоением $p\colon E \to M$ посредством f. Предположим, что структура расслоения $p\colon E \to M$ задается покрытием $M = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ и функциями склейки $\lambda_{\alpha\beta}\colon F \times U_{\alpha\beta} \to F \times U_{\alpha\beta}$, $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$. Структура индуцированного (с помощью отображения $f\colon M' \to M$) расслоения с базой M', слоем F и группой G задается так: $U'_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$; функции склейки $\lambda'_{\alpha\beta}\colon F \times U'_{\alpha\beta} \to F \times U'_{\alpha\beta}$ определяются формулой

$$\begin{gathered}\lambda'_{\alpha\beta}(y, x) = \left(T'^{\alpha\beta}(x)\, y, x\right), \quad y \in F,\\ T'^{\alpha\beta}(x) = T^{\alpha\beta}(f(x))\end{gathered}$$

(т. е. области $U'_\alpha \subset M'$ и функции $\lambda'_{\alpha\beta}$ определяются как полные прообразы соответствующих объектов из структуры расслоения $p\colon E \to M$). Возникает новое расслоение $p'\colon E' \to M'$ и его отображение $E' \to E$ в исходное расслоение, индуцирующее заданное отображение баз $f\colon M' \to M$.

Вернемся к классификационной теореме. Задача классификации расслоений над сферой S^q сводится к нахождению множества $[S^q, B_G]$ и тем самым к гомотопическим группам $\pi_q(B_G)$; для $G=O(k)$, $SO(k)$, $U(k)$, $Sp(k)$ имеем $B_G = G_{\infty,k}$, $\widehat{G}_{\infty,k}$, $G^{\mathbb{C}}_{\infty,k}$, $G^{\mathbb{H}}_{\infty,k}$, причем

$$\pi_j(G_{\infty,k}) = \pi_j(G_{n,k}) \text{ при } j<n-k,$$
$$\pi_j(\widehat{G}_{\infty,k}) = \pi_j(\widehat{G}_{n,k}) \text{ при } j<n-k,$$
$$\pi_j(G^{\mathbb{C}}_{\infty,k}) = \pi_j(G^{\mathbb{C}}_{n,k}) \text{ при } j<2(n-k).$$

Задача. Докажите общее равенство $\pi_j(G)=\pi_{j+1}(BG)$ и, в частности:

$$\pi_j(SO(k)) = \pi_{j+1}(\widehat{G}_{\infty,k}),$$
$$\pi_j(U(k)) = \pi_{j+1}(G^{\mathbb{C}}_{\infty,k}),$$
$$\pi_j(Sp(k)) = \pi_{j+1}(G^{\mathbb{H}}_{\infty,k}),$$

используя точную последовательность универсального расслоения.

Рассмотрим в заключение несколько простых примеров.

1. $G=O(1)=\mathbb{Z}_2$;

$$B_G = \lim_{n\to\infty}(S^n/\mathbb{Z}_2) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^\infty.$$

Имеем $\pi_1(\mathbb{R}P^\infty)=\mathbb{Z}_2$ и $\pi_j(\mathbb{R}P^\infty)=0$ для $j>1$.

2. $G=\mathbb{Z}_m$ (циклическая группа порядка m);

$$B_G = \lim_{n\to\infty} S^{2n+1}/\mathbb{Z}_m = \lim_{n\to\infty} L^{2n+1}_{(m)} = L^\infty_{(m)},$$

где S^{2n+1} задается в $\mathbb{C}^{n+1}$ уравнением $\sum_{\alpha=0}^{n}|z_\alpha|^2=1$; образующая $a\in\mathbb{Z}_m$ действует в S^{2n+1} по формуле

$$a(z_0, \ldots, z_n) = (e^{2\pi i/m}z_0, \ldots, e^{2\pi i/m}z_n); \quad a^m=1.$$

Факторпространство $L^{2n+1}_{(m)} = S^{2n+1}/\mathbb{Z}_m$ называется линзовым пространством.

Вообще, для дискретной группы G гомотопические группы $\pi_i(B_G)$ тривиальны при $i>1$ в силу теории накрытий.

3. $G=U(1)=SO(2)=S^1$;

$$B_G = \lim_{n\to\infty} S^{2n+1}/S^1 = \lim_{n\to\infty}\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}P^\infty.$$

Здесь сфера задается уравнением $\sum_{\alpha=0}^{n}|z_\alpha|^2=1$, а действие окружности S^1 таково:

$$(z_0, \ldots, z_n) \mapsto (e^{i\varphi}z_0, \ldots, e^{i\varphi}z_n).$$

Так как $\pi_i(S^1)=0$ при $i\neq 1$, то

$$\pi_i(\mathbb{C}P^\infty)=\pi_i(B_G)=0 \text{ при } i\neq 2,$$
$$\pi_2(\mathbb{C}P^\infty)=\mathbb{Z}$$

(см. пример 2 выше).

4. $G=SU(2)=Sp(1)=S^3$;

$$B_G=\lim_{n\to\infty} S^{4n+3}/S^3=\lim_{n\to\infty}\mathbb{H}P^n=\mathbb{H}P^\infty.$$

В этом случае сфера S^{4n+3} реализована в пространстве кватернионов $\mathbb{H}^{n+1}$. Действие группы $S^3=Sp(1)$ имеет вид

$$(q_0, \ldots, q_n)\mapsto(qq_0, \ldots, qq_n),$$

где q — единичный кватернион. Универсальность этого расслоения вытекает из того, что гомотопические группы $\pi_i(S^{4n+3})$ тривиальны при $i<4n+3$.

Классификацию G-расслоений над сферой S^n можно получить и непосредственно, без использования универсальных расслоений. Будем здесь считать, что G — группа Ли. Достаточно классифицировать главные расслоения, тем самым будут классифицированы и все ассоциированные расслоения с другими слоями. Сначала опишем главные G-расслоения над диском.

Лемма 3. *Любое главное расслоение над диском D^n со структурной группой Ли G тривиально.*

Доказательство. Пусть $p\colon E\to D^n$ — главное G-расслоение. Фиксируем G-связность в этом расслоении, т. е. для каждого пути γ из точки x_0 в точку x_1 зададим преобразование слоя $\varphi_\gamma\colon F_{x_0}\to F_{x_1}$, $F_{x_0}=F_{x_1}=G$. Все преобразования φ_γ принадлежат структурной группе G. (Напомним, что существование такой связности для случая, когда структурная группа есть группа Ли, будет доказано в следующем параграфе.)

В диске D^n из центра $x_0\in D^n$ в любую точку $x\in D^n$ идет единственный отрезок $\gamma_x=[x_0x]$. Строим отображение $\Phi\colon D^n\times F_{x_0}\to E$, полагая

$$\Phi(x, y)=\varphi_{\gamma_x}(y).$$

Это отображение вводит в E координаты прямого произведения $E=D^n\times G$, согласованные с действием структурной группы. Лемма доказана.

Сфера S^n есть объединение двух дисков D^n_+ и D^n_-, пересекающихся по экватору: $D^n_+\cap D^n_-=S^{n-1}$. Введя координаты прямого произведения отдельно над D^n_+ и над D^n_-, получим «структуру расслоения» с двумя координатными областями $U_1=D^n_+$ и $U_2=D^n_-$, причем $U_{12}=U_1\cap U_2=S^{n-1}$. Функция склейки λ_{12}

определена над $U_{12} = S^{n-1}$ и представляет собой отображение

$$T^{12}\colon S^{n-1} \to G,$$

$$\lambda_{12}(y, x) = (T^{12}(x)y, x), \qquad x \in U_{12}, \qquad y \in F.$$

Имеет место

Лемма 4. *Если заменить функцию склейки $T^{12}\colon S^{n-1} \to G$ гомотопной, то класс эквивалентности расслоения не меняется.*

Доказательство. Реализуем гомотопию как отображение

$$F\colon S^{n-1} \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to G.$$

Построим расслоение так: расширим полусферы — диски D^n_- и D^n_+ — соответственно выше и ниже экватора на расстояние ε до дисков $\bar{D}^n_\varepsilon \supset D^n_+$ и $\bar{\bar{D}}^n_\varepsilon \supset D^n_-$. Пересечение $\bar{D}^n_\varepsilon \cap \bar{\bar{D}}^n_\varepsilon$ есть в точности цилиндр $S^{n-1} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$. Построим новое расслоение со склейкой по отображению F. Это расслоение эквивалентно обоим исходным. Лемма доказана.

Таким образом, расслоение определяется элементом группы $\pi_{n-1}(G)$. Приведем значения этих групп в случаях $G = SO(k)$, $U(k)$ и $n = 1, 2, 3, 4$.

$$\pi_i(U(1)) = \pi_i(SO(2)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = 1, \\ 0 & \text{при } i > 1; \end{cases}$$

$$\pi_i(SO(3)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{при } i = 1, \\ 0 & \text{при } i = 2, \\ \mathbb{Z} & \text{при } i = 3; \end{cases}$$

$$\pi_i(SO(4)) = \pi_i(SO(3)) + \pi_i(S^3) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{при } i = 1, \\ 0 & \text{при } i = 2, \\ \mathbb{Z} + \mathbb{Z} & \text{при } i = 3; \end{cases}$$

$$\pi_i(SO(q)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{при } i = 1, \\ 0 & \text{при } i = 2, \\ \mathbb{Z} & \text{при } i = 3 \end{cases} \quad (q \geqslant 5),$$

$$\pi_i(U(q)) = \pi_i(S^1) + \pi_i(SU(q)),$$

так как топологически $U(q) = S^1 \times SU(q)$;

$$\pi_i(SU(q)) = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ 0, & i = 2, \\ \mathbb{Z}, & i = 3 \end{cases} \quad (q \geqslant 2).$$

Некоторые из равенств, входящих в эту таблицу, нами выше доказаны, остальные мы сообщаем без доказательства. Таблица позволяет автоматически классифицировать расслоения над сферами S^n размерности $n \leqslant 4$.

5. Векторные расслоения и операции над ними. Изучим подробнее *векторные расслоения,* т. е. расслоения, слоем которых является вещественное или комплексное векторное пространство, а структурной группой — подгруппа линейной, ортогональной или унитарной группы. Структура расслоения $p\colon E \to M$ определяется по существу функциями склейки $\lambda_{\alpha\beta}$ над пересечениями $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, т. е. отображениями $T^{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to G$ такими, что $T^{\alpha\beta} = (T^{\beta\alpha})^{-1}$ и $T^{\alpha\beta}T^{\beta\gamma}T^{\gamma\alpha} = 1$ в пересечении $U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ (формулы (2)). Поэтому над расслоениями можно совершать все операции, сохраняющие эти соотношения. Например, такой операцией является вещественное или комплексное представление $\rho\colon G \to GL(n, \mathbb{R})$ или $GL(n, \mathbb{C})$ (возможно, ортогональное или унитарное) структурной группы G и вообще любой гомоморфизм $\rho\colon G \to G'$, позволяющий заменить функции склейки $T^{\alpha\beta}$ функциями склейки $\rho(T^{\alpha\beta})$. В результате получим новое расслоение, которое мы будем называть представлением ρ исходного расслоения. Если расслоение обозначается какой-либо буквой, например η, то новое расслоение обозначим через $\rho(\eta)$. Другой пример: для двух расслоений (пусть η_1, η_2) со слоями $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ можно составить их *прямую сумму* $\eta = \eta_1 \oplus \eta_2$ с группой $G_1 \times G_2$ и слоем $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$ и *тензорное произведение* $\eta = \eta_1 \otimes \eta_2$ со слоем $\mathbb{R}^{mn} = \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n$ и также с группой $G_1 \times G_2$ соответственно операциям над линейными пространствами (аналогично в комплексном случае).

Вообще, определены естественные операции над расслоениями, отвечающие всевозможным операциям над линейными пространствами (слоями). Напомним эти операции.

1. *Определитель* $\det \eta$ вещественного (комплексного) расслоения η — это одномерное расслоение (т. е. его слой одномерен) с преобразованиями перехода $\det T^{\alpha\beta}$ в областях $U_{\alpha\beta}$.

2. Сопряженное расслоение η^* линейных форм на слоях; комплексно сопряженное расслоение $\tilde{\eta}$ (для комплексного расслоения η) с преобразованиями перехода $\overline{T}^{\alpha\beta}$.

3. Комплексификация $c(\eta)$ вещественного расслоения η и овеществление $r(\eta_1)$ комплексного расслоения η_1. При этом, как и для соответствующих операций над пространствами, $cr(\eta_1) = \eta_1 \oplus \overline{\eta_1}$ и $rc(\eta) = \eta \oplus \eta$ (проверьте!).

4. Тензорные степени $\eta \otimes \ldots \otimes \eta$ расслоения η, его внешние степени $\Lambda^k\eta$ (кососимметрическая часть тензорной степени), симметрические степени $S^k\eta$ (симметрическая часть тензорной степени).

Определение 6. *Сечением* расслоения $p\colon E \to M$ называется такое отображение $\psi\colon M \to E$, что $p\psi(x) = x$ для любой точки $x \in M$. Таким образом, сечения — это функции (поля) $\psi(x)$ на M, принимающие в точке $x \in M$ значения в слое F_x

над x. Сечения тривиального расслоения — это обычные («скалярные») функции или отображения базы в слой.

Пусть τ — касательное расслоение некоторого многообразия M. Тогда сечения расслоения τ — это векторные поля; сечения сопряженного расслоения τ^* — это ковекторные поля; тензоры типа (k, l) — это сечения расслоений

$$\underbrace{\tau \otimes \ldots \otimes \tau}_{\substack{\text{верхние} \\ \text{индексы}}} \otimes \underbrace{\tau^* \otimes \ldots \otimes \tau^*}_{\substack{\text{нижние} \\ \text{индексы}}}.$$

Дифференциальные формы на многообразии — это сечения расслоения $\Lambda^k\tau^*$. Общие тензоры типа $(0, k)$ — это сечения расслоения $\tau^* \otimes \ldots \otimes \tau^*$. Квадратичные формы на векторах, как, скажем, метрика (g_{ij}),— это сечения расслоения $S^2\tau^*$ (симметрический квадрат). Если многообразие M n-мерно, то имеется расслоение $\Lambda^n\tau^*$ (определитель), тривиальность которого равносильна ориентируемости (проверьте!). Среди расслоений (особенно векторных расслоений) над комплексно аналитической базой особо выделяется класс *комплексно аналитических* расслоений, у которых функции склейки комплексно аналитичны. Такими, например, являются касательное расслоение к комплексному многообразию и результаты всех приведенных выше естественных операций над ним. Отметим, что аналогично вводятся алгебраические расслоения над комплексными алгебраическими многообразиями, особенно над проективными (комплексными компактными подмногообразиями в $\mathbb{C}P^n$). Над $\mathbb{C}P^n$ имеется важное алгебраическое одномерное (комплексное) расслоение Хопфа η, которое ранее (см. пример 2) рассматривалось топологически (без введения аналитической структуры) с группой $U(1) = SO(2) = S^1$ и слоем $\mathbb{C}^1$. Аналитически мы должны рассматривать это расслоение η с группой $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел по умножению (как и все комплексные одномерные расслоения). Расслоение η над $\mathbb{C}P^n$ получается из определения $\mathbb{C}P^n$: $E = \{(z_0, \ldots, z_n)\} \xrightarrow{p} \mathbb{C}P^n$, где $E = \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0$, слой $F = \mathbb{C}^*$.

Одномерные аналитические расслоения над комплексным многообразием образуют абелеву группу относительно тензорного умножения (множество классов эквивалентности 1-расслоений называется «многообразием Пикара»). Эта группа (точнее, ее связная компонента единицы) есть комплексный тор.

Обозначим (комплексное векторное) касательное расслоение к комплексному многообразию M через $\tau(M)$. Пусть η — расслоение Хопфа над $\mathbb{C}P^n$.

Задачи. 1. Докажите, что $\tau(\mathbb{C}P^n) \oplus 1 = \underbrace{\eta \oplus \ldots \oplus \eta}_{n+1}$, где 1 обозначает одномерное (комплексное) тривиальное расслоение.

2. Докажите, что

$$\Lambda^n \tau(\mathbb{C}P^n) = \det \tau(\mathbb{C}P^n) = \eta^{n+1}$$

(равенства всюду обозначают эквивалентность).

Аналогичные, но более простые задачи ставятся для вещественного одномерного расслоения $\eta_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}P^n$ с группой $\mathbb{Z}_2 = O(1)$ (обобщенного листа Мёбиуса).

3. Докажите, что $\xi^* = \xi^{-1}$ для любого одномерного комплексного расслоения ξ.

6. Мероморфные функции. Интересный класс «расслоений с особенностями» составляют семейства линий уровня мероморфных функций на компактных комплексных многообразиях, например, алгебраических функций на проективном алгебраическом многообразии $M \subset \mathbb{C}P^q$. Мероморфная функция есть по определению комплексно аналитическое отображение $f: M \to \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \infty$. Как говорят в теории функций, f имеет *полюсы* в точках из $f^{-1}(\infty)$. В любой координатной окрестности $U_\alpha \subset M$ с многообразии $z_\alpha^1, \ldots, z_\alpha^n$ (где n — комплексная размерность многообразия M) функция $w = f(z)$ записывается в виде $f(z_\alpha^1, \ldots, z_\alpha^n)$. *Особыми слоями* называются полные прообразы $f^{-1}(f(z_0))$, где точка $z_0 = (z_{\alpha 0}^1, \ldots, z_{\alpha 0}^n)$ такова, что $df|_{z=z_0} = 0$. Остальные слои $F_a = \{f = a\}$ являются неособыми подмногообразиями многообразия M. Пусть $z_1, \ldots, z_m$ — все особые точки и $w_1 = f(z_1), \ldots, w_m = f(z_m)$ — особые значения функции f. Над областью плоскости $U_f \subset \mathbb{R}^2$:

$$U_f = [S^2 = \mathbb{C}P^1 = (\mathbb{C} \cup \infty)] \setminus \{w_1, \ldots, w_m\}$$

определено гладкое расслоение со слоем $F = F_w = f^{-1}(w)$, $w \in U_f$. Рассмотрим группу $\pi_1(U_f)$, порожденную путями $a_1, \ldots, a_m$ (рис. 135). Пути a_j дают отображения неособого слоя (монодромию) $\varphi_{a_j}: F \to F$.

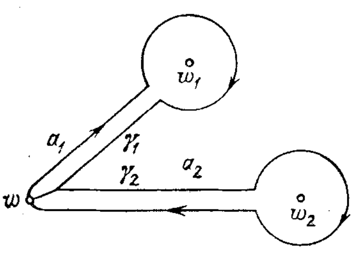

Рис. 135

Рассмотрим случай невырожденных (типичных) особых точек $z_1, \ldots, z_m$, т. е. таких, что $df|_{z_j} = 0$ и квадратичная форма $d^2 f|_{z_j}$ невырождена. В этом случае топологическое устройство слоев в малой окрестности U_j точки z_j описывается квадратичной частью функции $f - f(z_j) = \Delta f$. В окрестности точки z_j существует система локальных координат $z_j^1, \ldots, z_j^n$ (точку z_j можно считать началом этой системы), в которой функция Δf имеет вид

$$\Delta f(z) = \sum_q (z_j^q)^2 + O(|z_j|^3)$$

(форму d^2f можно привести линейной заменой к сумме квадратов). В достаточно малой области $|z_j| < \varepsilon$ при исследовании топологии слоев члены $O(|z_j|^3)$ можно не учитывать,

$$\Delta f(z_j) \approx \sum_\alpha (z_j^\alpha)^2 = q(z_j).$$

Обозначим для краткости координаты z_j^q через z^q и изучим чисто квадратичную функцию $q(z)$. Уравнение $q(z)=0$ задает особый слой (конус), уравнения $q=\delta$ при малых $\delta \neq 0$ задают близкие неособые слои в ε-окрестности исходной точки z_j (δ выбирается после ε). Уравнение $q(z)=\delta$ задает «квадрику»

$$K_\delta = \left\{ \sum_{q=1}^{n} (z^q)^2 = \delta \right\}.$$

При вещественном $\delta > 0$ это многообразие K_δ стягивается к сфере $S_\delta^{n-1} = \left\{ \sum_j (x^j)^2 = \delta,\ y^1 = \ldots = y^n = 0,\ z^q = x^q + iy^q \right\}$. Если $\delta = |\delta| e^{i\varphi}$, то уравнение сферы S_δ^{n-1} в K_δ принимает вид $\{\tilde{y}^q = 0\}$, где $q = 1, \ldots, n$,

$$z^q e^{-i\varphi/2} = \tilde{z}^q = \tilde{x}^q + i\tilde{y}^q,$$
$$\sum_q (z^q)^2 = \delta = |\delta| e^{i\varphi}.$$

Задача. Докажите, что K_δ диффеоморфно пространству линейных элементов (s, τ) сферы, где $s \in S^{n-1}$ и τ — произвольный касательный вектор к S^{n-1} в точке s.

Итак, имеем вложение

$$S_\delta^{n-1} \subset K_\delta,$$

где K_δ — неособый слой, близкий к особому слою K_0. Заметим, что вся сфера S_δ^{n-1} лежит в малой окрестности точки $z=0$ в силу ее уравнения. Если δ стремится к нулю, то неособый слой K_δ «сминается» на особый слой K_0 — возникает отображение

$$\varphi\colon K_\delta \to K_0.$$

При этом отображении сфера S_δ^{n-1} отображается в точку (эта сфера «исчезает» на особом слое). Поэтому сфера S_δ^{n-1} называется *исчезающим циклом* этой особой точки.

Изучим монодромию $K_\delta \to K_\delta$ при обходе вокруг особого слоя по пути в базе $\gamma_j(\varphi) = \delta e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Слои $K_{\delta e^{i\varphi}}$ деформируются при $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; при $\varphi = 2\pi$ мы получим «отображение монодромии»: $\sigma\colon K_\delta \to K_\delta$.

Вычислим эти отображения монодромии для $n=2$. Решаем сейчас задачу для чисто квадратичной функции

$$w = f(z) = (z^1)^2 + (z^2)^2 = u^2 + v^2, \quad u = z^1, \quad v = z^2.$$

Квадрика K_δ задается уравнением $u^2+v^2=\delta=|\delta|e^{i\varphi}$; сфера S_δ^1 есть окружность $\operatorname{Im}\tilde{u}=\operatorname{Im}\tilde{v}=0$, где $\tilde{u}=ue^{-i\varphi/2}$; $\tilde{v}=ve^{-i\varphi/2}$. Неособый слой K_δ есть произведение $K_\delta=S_\delta^1\times\mathbb{R}^1$ (цилиндр).

Отображения обхода, начиная с вещественного $\delta>0$ $(\delta=|\delta|)$,

$$K_{|\delta|}\to K_{|\delta|e^{i\varphi}},$$

можно задать так:

$$u\to ue^{i\varphi/2},\quad v\to ve^{i\varphi/2}. \tag{3}$$

Изменяя φ от нуля до 2π, получим в конце отображение $K_{|\delta|}\to K_{|\delta|}$:

$$u\to ue^{i\pi}=-u,\quad v\to ve^{i\pi}=-v. \tag{4}$$

Нашей задачей является построение такого семейства отображений обхода $K_{|\delta|}\to K_{|\delta|e^{i\varphi}}$, которое совпадало бы с (3) в малой окрестности исчезающего цикла S_δ^1 и было бы «тождественным» отображением всюду вне несколько большей, но малой окрестности $S_\delta^1\subset K_\delta$. Термин «тождественное» означает следующее: отображения вырождения φ: $K_\delta\to K_0$ (см. выше) взаимно однозначны вне исчезающего цикла S_δ^1 и устанавливают канонический диффеоморфизм между многообразиями $K_\delta\setminus S_\delta^1$ при всех (малых) δ. Все отображения обхода $K_{|\delta|}\to K_{|\delta|e^{i\varphi}}$ должны совпадать с этими каноническими диффеоморфизмами между разными $K_\delta\setminus S_\delta^1$ вне малой окрестности $U_\delta\supset S_\delta^1$ и должны совпадать с (3) внутри еще меньшей окрестности V_δ, где $K_\delta\supset U_\delta\supset V_\delta\supset S_\delta^1$.

Именно такое семейство отображений обхода («тождественное» вне окрестности исчезающего цикла) необходимо для применений локальных результатов о квадрике к глобальной задаче о вычислении преобразований монодромии на группе гомологий $H_1(F_w)=\pi_1(F_w)/[\pi_1,\ \pi_1]$ неособого слоя $F=F_w$ для произвольного отображения f: $M\to\mathbb{C}P^1$, где M — компактное двумерное многообразие.

Слой K_0 определяется уравнением $u^2+v^2=0$ или $u=\pm iv$. Из этого видно, что $K_0\backslash 0$ состоит из двух кусков:

$$K_0\setminus 0=(S^1\times\mathbb{R}^+)_1\cup(S^1\times\mathbb{R}^+)_2;$$

введем в этих кусках координаты

$$\begin{array}{ll}\rho>0,\quad (\rho,\theta)_1:\ u=\rho e^{i\theta},\quad v=iu & \text{(первый кусок)},\\ \rho>0,\quad (\rho,\theta)_2:\ u=\rho e^{i\theta},\quad v=-iu & \text{(второй кусок)}.\end{array} \tag{5}$$

Такой же вид имеет при малом δ, отличном от нуля, разность $K_\delta\setminus S_\delta^1$:

$$K_\delta\setminus S_\delta^1=(S^1\times\mathbb{R}^+)_1\cup(S^1\times\mathbb{R}^+)_2;$$

отображение вырождения φ: $K_\delta \to K_0$ индуцирует диффеоморфизм

$$(K_\delta \setminus S_\delta^1) \approx (K_0 \setminus 0),$$

вводящий координаты $(\rho, \theta)_1$ и $(\rho, \theta)_2$ на $(K_\delta \setminus S_\delta^1)$. Кривые уровня ($\rho = \text{const}$) на слое K_δ могут быть описаны как орбиты действия группы

$$\begin{aligned} u &\to u\cos\theta + v\sin\theta = ue^{-i\theta}, \\ v &\to -u\sin\theta + v\cos\theta = ue^{i\theta}, \end{aligned} \tag{6}$$

причем исчезающий цикл S_δ^1 — это орбита минимальной длины на слое K_δ. На слое K_0 это действие сведется к действию $u \to ue^{-i\theta}$ (1-й кусок), $u \to ue^{i\theta}$ (2-й кусок). Координата ρ на слое K_δ (на обоих кусках) может быть определена как расстояние от точки $(u, v) \in K_\delta$ до исчезающего цикла $S_\delta^1 \subset K_\delta$; начало отсчета угла θ мы будем вести от сечения ($\operatorname{Im} u = 0$) слоя K_δ трехмерной гиперплоскостью (на обоих кусках). Таким образом, на обоих кусках K_δ имеются координаты (θ, ρ), где $\rho \geqslant 0$ ($\rho = 0$ отвечает исчезающему циклу).

Лемма 5. *Для любого $\varepsilon > 0$ преобразования обхода $K_{|\delta|} \to K_{|\delta| e^{i\varphi}}$ могут быть построены так, что:*

1) *эти преобразования тождественны при $\rho > 2\varepsilon$;*

2) *эти преобразования имеют вид (3) при $\rho < \varepsilon$;*

3) *конечное преобразование монодромии σ: $K_{|\delta|} \to K_{|\delta|}$ для $\varphi = 2\pi$ на обоих кусках имеет вид*

$$\sigma\colon\ (\theta, \rho) \to (\theta + \theta(\rho), \rho),$$

где функция $\theta(\rho)$ имеет график, показанный на рис. 136, т. е. $\theta = \pi$ для $\rho \leqslant \varepsilon$ (на обоих кусках и для $\rho = 0$ на исчезающем цикле); $\theta = 0, 2\pi$ для $\rho \geqslant 2\varepsilon$ на обоих кусках; кривая $(\rho^*, \theta(\rho^*))$ на цилиндре один раз охватывает цилиндр при $-2\varepsilon \leqslant \rho^* \leqslant 2\varepsilon$, где $\rho^* = \rho$ на первом куске и $\rho^* = -\rho$ на втором куске.

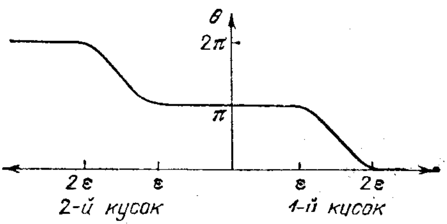

Рис. 136

Доказательство. Рассмотрим преобразования (3) при малых φ на обоих кусках поверхности K_δ. Из формул (3) непосредственно видно, что уже при малом отклонении φ от нуля координата θ при преобразованиях обхода начинает вращаться в противоположные стороны для разных кусков:

$$\theta \to \theta + \frac{\varphi}{2} \quad \text{(на 1-м куске)},$$

$$\theta \to \theta - \frac{\varphi}{2} \quad \text{(на 2-м куске)}.$$

Это следует непосредственно из сопоставления формул (3) с ограничением $K_\delta \to K_0$, вводящим координату θ, где направление θ различно на 1-м и 2-м куске, в то время как добавление угла $\varphi/2$ имеет на обоих кусках знак $(+)$. Сшивая эту деформацию с тождественной при $\rho \geqslant 2\varepsilon$ на обоих кусках, отсчитываем угол θ от нуля для 1-го куска и от 2π для 2-го куска; в результате снова получим совпадение углов при $\varphi = 2\pi$. Отображение $K_{|\delta|} \to K_{|\delta| e^{i\varphi/2}}$ определим для $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ формулой

$$(\theta, \rho) \to (\theta + \theta^\varphi(\rho), \rho),$$

где $\theta^\varphi(\rho)$ имеет график, показанный на рис. 137. Непрерывность этого отображения на сфере $S^1_\delta(\rho = 0)$ следует из того, что наши координаты θ, ρ для разных кусков указывают противоположные направления угла θ на сфере $S^1_\delta \subset K_\delta$.

Лемма доказана.

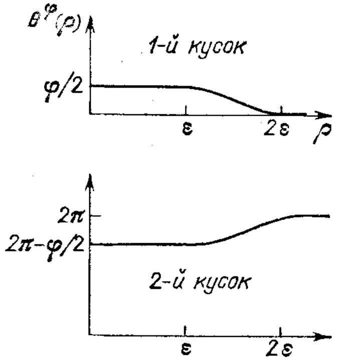

Рис. 137

7. Формула Пикара — Лефшеца. Рассмотрим теперь задачу глобально. Имеется комплексно аналитическое отображение $f\colon M \to \mathbb{C}P^1 = S^2$, где M — компактное двумерное комплексное многообразие с невырожденными особыми точками $z_1, \ldots, z_m \in M$, которым отвечают особые значения $w_j = f(z_j)$. Рассмотрим типичный слой

$$F = F_w = f^{-1}(w) \subset M$$

над неособой точкой $w \in S^2$. Введем пути a_j (см. рис. 135) и «исчезающие циклы»

$$q_j \in H_1(F_w) = \pi_1/[\pi_1, \pi_1],$$

которые строятся путем переноса исчезающих циклов, отвечающих особым точкам z_j, в слой над общей точкой w вдоль путей γ_j из точек $w_j - \delta$ в точку w при малом δ.

Теорема 3. *Имеет место следующая «формула Пикара — Лефшеца» для гомологического эффекта обходов φ_{a_j} особых значений по путям $a_j = \gamma_j^{-1}\alpha_j\gamma_j$:*

$$(\varphi_{a_j})_*\colon H_1(F_w) \to H_1(F_w),$$
$$(\varphi_{a_j})_*(p) = p + (p \circ q_j)\, q_j.$$

Здесь p — любой цикл (элемент группы $H_1(F_w)$), q_j — исчезающие циклы особых точек z_j, $p \circ q_j$ — индекс пересечения этих циклов (любых находящихся в общем положении отображений окружности в F_w, представляющих эти циклы). При этом преоб-

разования $(\varphi_{a_j})_*$ *сохраняют индекс пересечения:*

$$p_1 \circ p_2 = [(\varphi_{a_j})_* p_1] \circ [(\varphi_{a_j})_* p_2]$$

для любых $p_1, p_2 \in H_1(F_w)$.

Доказательство. Рассмотрим цикл $\tilde{p}$ в слое $F_{w_j-\delta}$ около точки w_j, трансверсально пересекающий исчезающий цикл q_j около особой точки $z_j \in F_{w_j-\delta}$, где топологическая картина определяется квадратичной частью $(d^2f)_* \approx \Delta f$. Согласно лемме 5 в результате обхода по малой окружности a_j радиуса δ вокруг w_j имеем формулу для классов гомологий:

$$[S^1_\delta] \to [S^1_\delta],$$
$$[\tilde{p}] \to \tilde{p} + (\tilde{p} \circ S^1_\delta)[S^1_\delta],$$

так как в окрестности всех точек трансверсального пересечения цикла $\tilde{p}$ и цикла S^1_δ изменение цикла $\tilde{p}$ при обходе будет однократным с тем знаком, с которым эта точка пересечения входит в индекс $\tilde{p} \circ S^1_\delta$. Заметим также, что $S^1_\delta \circ S^1_\delta = 0$. Перенося все циклы в точку w вдоль пути γ_j, мы и получаем формулу Пикара — Лефшеца.

Докажем теперь, что $p_1 \circ p_2 = (\varphi_* p_1) \circ (\varphi_* p_2)$ при обходе a_j. Мы имеем:

$$\varphi_* p_1 = p_1 + (p_1 \circ q_j) q_j,$$
$$\varphi_* p_2 = p_2 + (p_2 \circ q_j) q_j,$$

$$(p_1 + (p_1 \circ q_j) q_j) \circ (p_2 + (p_2 \circ q_j) q_j) =$$
$$= p_1 \circ p_2 + (p_1 \circ q_j)(q_j \circ p_2) + (p_1 \circ q_j)(p_2 \circ q_j) + (p_1 \circ q_j)(p_2 \circ q_j)(q_j \circ q_j).$$

Это равно $p_1 \circ p_2$ в силу равенства $p \circ q = -q \circ p$ (косая симметричность). Теорема доказана.

Задача. Вывести аналогичную формулу Пикара — Лефшеца для размерностей $n > 2$. Случаи четного и нечетного n при этом существенно отличаются друг от друга; чем?

Рассмотрим пример. Пусть $M = \mathbb{C}P^2 = (\mathbb{C}^2 \cup \mathbb{C}P^1_\infty)$ и наша функция — полином степени n по переменным z_1, z_2:

$$P_n(z_1, z_2)\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}.$$

Как обычно, расслоение на поверхности уровня $P_n(z_1, z_2) = \text{const}$ продолжается на все $\mathbb{C}P^2$ (база расслоения — $\mathbb{C}P^1$) в однородных координатах (u_0, u_1, u_2), где $z_1 = u_1/u_0$, $z_2 = u_2/u_0$.

Задача. Найти все особые слои и преобразования монодромии в гиперэллиптическом случае $P_1(z_1, z_2) = z_1^2 - Q_n(z_2)$. Неособые слои являются здесь поверхностями рода g, где $n = 2g + 1$ или $n = 2g + 2$ (см. § 2). Как мы знаем, фундаментальная группа неособого слоя (поверхности рода g) задается образующими $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ и соотношением

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1.$$

Группа $H_1 = \pi_1/[\pi_1, \pi_1]$ представляет собой $2g$-мерную решетку, порожденную векторами $[a_1], [b_1], \ldots, [a_g], [b_g]$ с индексами пересечения

$$[a_i] \circ [b_j] = \delta_{ij}, \qquad [a_i] \circ [a_j] = [b_i] \circ [b_j] = 0.$$

§ 25. Дифференциальная геометрия расслоений

1. G-связности в главных расслоениях. В первой части этой книги (см. гл. 6) уже было начато локальное рассмотрение связностей и кривизны в расслоениях. Чтобы перейти к рассмотрению топологических инвариантов связностей и кривизны (в случае, когда расслоение уже не является тривиальным и база является многообразием, а не областью евклидова пространства), мы разработаем в этой главе инвариантную систему понятий.

Определение 1. *Связностью* (G-связностью) в главном расслоении с пространством E, базой M, группой G и проекцией $p: E \to M$ называется гладкое семейство «горизонтальных» n-мерных направлений в пространстве E, инвариантное относительно (левого) действия группы G на пространстве E.

Ниже мы покажем, что преобразования параллельного переноса, определенного G-связностью, будут принадлежать группе G. Поэтому это определение согласовано с определением 24.4.

Напомним теорему 1 из § 24 о том, что каждое главное расслоение определяется свободным левым действием группы G на E. Простейший дифференциально-геометрический способ задания связности, как в лемме 1 из § 24, использует левоинвариантную метрику (g_{ij}) на пространстве E (т. е. такую метрику, что левое действие группы G на пространстве E является движением). Если такая метрика имеется (см. по этому поводу § 8, в котором доказано существование такой метрики для компактных групп G), то G-связность определяется заданием n-мерных плоскостей, ортогональных слоям, в качестве горизонтальных.

Другой способ, удобный при определении кривизны и в других приложениях связностей, состоит в задании поля горизонтальных направлений уравнением типа Пфаффа, т. е. набором дифференциальных форм (или одной формой с векторными значениями).

Реализуем алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы G как пространство правоинвариантных касательных векторных полей на группе G, где операцией Ли является коммутирование векторных полей.

Определим каноническую 1-форму ω_0 на группе G со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Значением этой формы на касательном векторе τ в точке $y \in G$ объявляется элемент алгебры Ли