образующими $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ и соотношением

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1.$$

Группа $H_1 = \pi_1/[\pi_1, \pi_1]$ представляет собой $2g$-мерную решетку, порожденную векторами $[a_1], [b_1], \ldots, [a_g], [b_g]$ с индексами пересечения

$$[a_i] \circ [b_j] = \delta_{ij}, \qquad [a_i] \circ [a_j] = [b_i] \circ [b_j] = 0.$$

§ 25. Дифференциальная геометрия расслоений

1. G-связности в главных расслоениях. В первой части этой книги (см. гл. 6) уже было начато локальное рассмотрение связностей и кривизны в расслоениях. Чтобы перейти к рассмотрению топологических инвариантов связностей и кривизны (в случае, когда расслоение уже не является тривиальным и база является многообразием, а не областью евклидова пространства), мы разработаем в этой главе инвариантную систему понятий.

Определение 1. *Связностью* (G-связностью) в главном расслоении с пространством E, базой M, группой G и проекцией $p\colon E \to M$ называется гладкое семейство «горизонтальных» n-мерных направлений в пространстве E, инвариантное относительно (левого) действия группы G на пространстве E.

Ниже мы покажем, что преобразования параллельного переноса, определенного G-связностью, будут принадлежать группе G. Поэтому это определение согласовано с определением 24.4.

Напомним теорему 1 из § 24 о том, что каждое главное расслоение определяется свободным левым действием группы G на E. Простейший дифференциально-геометрический способ задания связности, как в лемме 1 из § 24, использует левоинвариантную метрику (g_{ij}) на пространстве E (т. е. такую метрику, что левое действие группы G на пространстве E является движением). Если такая метрика имеется (см. по этому поводу § 8, в котором доказано существование такой метрики для компактных групп G), то G-связность определяется заданием n-мерных плоскостей, ортогональных слоям, в качестве горизонтальных.

Другой способ, удобный при определении кривизны и в других приложениях связностей, состоит в задании поля горизонтальных направлений уравнением типа Пфаффа, т. е. набором дифференциальных форм (или одной формой с векторными значениями).

Реализуем алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы G как пространство правоинвариантных касательных векторных полей на группе G, где операцией Ли является коммутирование векторных полей.

Определим каноническую 1-форму ω_0 на группе G со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Значением этой формы на касательном векторе τ в точке $y \in G$ объявляется элемент алгебры Ли

$\omega_0(y, \tau) = \xi_\tau$ — правоинвариантное векторное поле такое, что $\xi_\tau(y) = -\tau$. Сокращенно можно записать форму ω_0 в виде $-(dg)g^{-1}$.

Свойства формы ω_0 таковы:

а) $\omega_0(x, \tau) \neq 0$, если $\tau \neq 0$ (очевидно),

б) $d\omega_0(y, \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2}\omega_0([\tau_1, \tau_2]) = [\omega_0(\tau_1), \omega_0(\tau_2)]$ (см. задачу 1 к § 25 ч. I). Группа G, действуя на самой себе левыми сдвигами $y \mapsto gy$ (y и g оба из группы G), переводит правоинвариантное поле ξ в правоинвариантное поле $\eta = g_*\xi$, обозначаемое через $\operatorname{Ad}(g)\xi$. Для формы ω_0 при левых сдвигах группы $y \mapsto gy$ имеем

$$(g^*\omega_0)(y_1, \tau) = \operatorname{Ad}(g)\,\omega_0(y_2, \bar{\tau}),$$

где $y_1 = g(y_2)$ и $\bar{\tau} = g_*(\tau)$. В матричной реализации групп и алгебр Ли преобразование $\operatorname{Ad}(g)$ выглядит как внутренний автоморфизм $\xi \mapsto g\xi g^{-1}$ на алгебре Ли; запись $\omega_0 = -(dg)g^{-1}$ приобретает в матричной записи буквальный смысл.

Определение 2. *Дифференциально-геометрической G-связностью* на главном расслоении $p\colon E \to M$ с группой G называется форма ω в пространстве E со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G, обладающая двумя свойствами:

1) Нормировка: ограничение формы ω на слой G есть $\omega_0 = -(dg)g^{-1}$.

2) Инвариантность: при левом действии группы G на E имеет место равенство

$$g^*\omega = \operatorname{Ad}(g)\,\omega = g\omega g^{-1}. \tag{1}$$

Лемма 1. а) *Уравнение $\omega = 0$ задает G-инвариантное семейство горизонтальных направлений, образующих связность в смысле определения* 1; б) *обратно, если задано G-инвариантное семейство горизонтальных направлений, то можно построить форму ω со свойствами* 1) *и* 2) *такую, что семейство задается уравнением* $\omega = 0$.

Доказательство. Так как ограничение формы ω на слой G есть в точности форма ω_0, то уравнение $\omega = 0$ в любой точке $y \in E$ определяет плоскость, трансверсальную слою, и размерность пространства нулей формы ω есть n (размерность базы). G-инвариантность поля плоскостей $\omega = 0$ непосредственно следует из свойства 2 в определении 2. Обратно, пусть задано G-инвариантное семейство горизонтальных n-мерных направлений в E. Построим форму ω, представляющую собой в каждой точке $x \in E$ линейное отображение касательного пространства T_xE (в точке x) в алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Структурная группа G действует на слоях правыми сдвигами $R_g\colon y \mapsto yg$. Форма ω_0 на слое $F = G$ инвариантна относительно правых сдвигов по своему определению:

$$R_g^*\omega_0 = \omega_0.$$

Поэтому форма ω_0 на слое F_x над любой точкой $x \in M$, $F_x = p^{-1}(x) \approx G$, определяется инвариантно (независимо от выбора области локальных координат со структурой прямого произведения). В каждой точке y слоя F_x форма ω_0 представляет собой изоморфизм касательного пространства к слою T_yF в алгебру Ли $\mathfrak{g}$,

$$\omega_0\colon T_yF \to \mathfrak{g}.$$

Выделение горизонтального направления $\mathbb{R}_y^n \subset T_yE$ задает разложение в прямую сумму

$$T_yE = \mathbb{R}_y^n \oplus T_yF$$

и тем самым проекцию

$$\pi\colon T_yE \to T_yF, \quad \pi(\mathbb{R}_y^n) = 0.$$

Рассмотрим суперпозицию

$$T_yE \xrightarrow{\pi} T_yF \xrightarrow{\omega_0} \mathfrak{g}.$$

Эта суперпозиция $\omega_0\pi$ и есть форма ω. Ее ограничение на слой F есть ω_0 по определению. Левый сдвиг $g\colon E \to E$ сохраняет проекцию π ввиду левоинвариантности семейства горизонтальных направлений $\mathbb{R}_y^n$, а на области значений формы ω_0 левый сдвиг действует по формуле (1). Лемма доказана.

Лемма 2. *На любом главном расслоении существует дифференциально-геометрическая G-связность (в смысле определения 2).*

Доказательство. Предположим, что структура главного расслоения $p\colon E \to M$ задана областями U_α, где $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$, и диффеоморфизмами $\varphi_\alpha\colon G \times U_\alpha \to p^{-1}(U_\alpha)$ (см. определение 1 из § 24). Мы выберем, если нужно, более мелкое покрытие так, чтобы на M существовало разбиение единицы $\{\psi_\alpha\}$, где $\psi_\alpha \equiv 0$ вне U_α и $\sum_\alpha \psi_\alpha(y) \equiv 1$ в любой точке $y \in M$ (см. § 7). В прямом произведении $G \times U_\alpha \overset{\varphi_\alpha}{\approx} p^{-1}(U_\alpha)$ зададим любую связность ω_α (например, горизонтальные направления касаются $\varphi_\alpha(g \times U_\alpha)$ для всех $g \in G$). Чтобы построить G-связность во всем E, достаточно положить

$$\omega = \sum_\alpha p^*(\psi_\alpha)\,\omega_\alpha.$$

Здесь функции $p^*(\psi_\alpha(x))$ имеют вид $\psi_\alpha(p(x))$, т. е. «подняты» с базы M. Поэтому $p^*\psi_\alpha \equiv 0$ вне $p^{-1}(U_\alpha)$, и форма $p^*\psi_\alpha(x)\omega_\alpha$ продолжается на все многообразие E как тождественно нулевая вне области $p^{-1}(U_\alpha)$. Ограничение этой формы на слой имеет вид $p^*\psi_\alpha(x)\omega_0$, так как функции $p^*\psi_\alpha(x)$ постоянны вдоль слоев (G-инвариантны). Свойство 2 из определения 2 также очевидно. Лемма доказана.

Задача. Докажите, что множество связностей в расслоении линейно связно.

Локально (над координатной областью U_α с координатами $x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n$) связность в тривиальном главном расслоении с пространством $E_\alpha = p^{-1}(U_\alpha) \overset{\varphi_\alpha}{\approx} F \times U_\alpha$ ($F = G$) может быть задана в виде 1-формы A в базе U_α со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Сопоставление формы $A = A_\mu dx_\alpha^\mu$ с формой $\omega|_{E_\alpha}$ в координатах $y = (g, x)$, заданных отображением φ_α, таково:

$$\omega = \omega_0 + gA_\mu(x)g^{-1}dx_\alpha^\mu, \tag{2}$$

где ω_0 — каноническая форма на G со значениями в $\mathfrak{g}$.

Инвариантно это можно сказать так: структура прямого произведения на E_α представляет собой пару отображений («координаты»):

$$U_\alpha \xleftarrow{p} E_\alpha \xrightarrow{q} G = F.$$

«Координаты» точки $y \in E_\alpha$ — это пара $(p(y), q(y))$. Формула (2) принимает вид

$$\omega = q^*(\omega_0) + q^{-1}(y)A_\mu(p(y))dx_\alpha^\mu q(y).$$

Каждое сечение расслоения E_α над областью U_α,

$$U_\alpha \xrightarrow{\psi} E_\alpha, \quad p\psi = 1,$$

задает координаты прямого произведения в главном расслоении E_α: мы объявляем точки вида $\psi(x)$ «единицами» групп G (слоев). Отображение q: $E_\alpha \to G$ задается после этого формулой

$$q(y) = g \in G, \quad g\psi(x) = y.$$

При этом разные сечения ψ_1 и ψ_2 задают разные координаты прямого произведения в E_α, отличающиеся на преобразование группы G в каждой точке $x \in U_\alpha$, $\psi_1(x) = g(x)\psi_2(x)$. В прямом произведении сечение определяется точками $\psi(x) = (1, x)$. В пересечении $U_{\alpha\beta}$ двух областей U_α, U_β возникает замена сечения $\psi_1 \to \psi_2$ с помощью левых сдвигов, заданных отображением $g(x)$: $U_{\alpha\beta} \to G$. Форму ω можно представить в области $E_{\alpha\beta} = p^{-1}(U_\alpha \cap \cap U_\beta)$ двояким образом:

$$g_1 = q_1(x), \quad \omega = q_1^*(\omega_0) + q_1 A_\mu^{(1)} q_1^{-1} dx^\mu,$$

$$g_2 = q_2(x), \quad \omega = q_2^*(\omega_0) + q_2 A_\mu^{(2)} q_2^{-1} dx^\mu,$$

где q_1: $E_{\alpha\beta} \to G$ и q_2: $E_{\alpha\beta} \to G$ различаются на преобразование

$g\colon U_{\alpha\beta} \to G$ (отображения q_i определяются сечениями ψ_i). Из совпадения этих двух выражений для формы ω получаем закон преобразования для коэффициентов A_μ («калибровочное преобразование»; см. часть I, § 41):

$$A_\mu^{(1)}(x) = g(x)\,A_\mu^{(2)} g^{-1}(x) - \frac{\partial g(x)}{\partial x^\mu}\, g^{-1}(x). \qquad (3)$$

Эта формула определяет «склейку связностей»; она имеет вид $A_\mu^{(1)}(x) = -\frac{\partial g(x)}{\partial x^\mu} g^{-1}(x)$ в случае, если выбором другого сечения можно сделать $A_\mu^{(2)} \equiv 0$. Это — «тривиальные связности».

Теорема 1. *G-связность, задаваемая формой ω в главном расслоении $p\colon E \to M$, определяет параллельный перенос слоев вдоль любой кусочно гладкой кривой γ в базе M, задаваемый правым сдвигом на группе G.*

Доказательство. Пусть кривая γ имеет вид $x = x(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Будем искать горизонтальную кривую $\tilde{\gamma}$ в пространстве расслоения, накрывающую γ и начинающуюся в заданной точке g_0 слоя $G = p^{-1}(x(a))$. Достаточно рассмотреть случай, когда кривая γ целиком лежит в одной координатной области U_α такой, что $p^{-1}(U_\alpha) \approx G \times U_\alpha$ (в общем случае нужно воспользоваться преобразованиями склейки $\lambda_{\alpha\beta}$). В локальных координатах прямого произведения (g, x) в пространстве расслоения кривая $\tilde{\gamma}$ должна иметь вид $(g(t), x(t))$, где $\tilde{g}(t)$ — не известная пока функция. Из условия горизонтальности $\tilde{\gamma}$ (т. е. горизонтальности касательного вектора $(\dot{g}(t), \dot{x}(t))$) будем иметь

$$\omega(\dot{g}(t), \dot{x}(t)) = -\dot{g}(t) g^{-1}(t) + \dot{x}^\mu(t) g(t) A_\mu(x(t)) g^{-1}(t) = 0.$$

Обозначая через $B(t)$ функцию со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, где $B(t) = \dot{x}^\mu(t) A_\mu(x(t))$, получим для искомой функции $g(t)$ линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{g} - gB = 0.$$

Решение этого уравнения с начальным условием $g(a) = g_0 \in G$ существует и единственно при всех $t \in [a, b]$. Таким образом, параллельный перенос определен при всех t. Покажем, что параллельный перенос слоя задается правым сдвигом группы.

Лемма. *Решение уравнения $\dot{g} - gB = 0$ при $B(t) \in \mathfrak{g}$ с начальным условием $g(a) = g_0 \in G$ имеет вид $g(t) = g_0 f(t)$, где функция $f(t)$ принимает значения в группе G.*

Доказательство. Утверждение леммы очевидно, если функция B не зависит от t: $B(t) = \mathrm{const} \in \mathfrak{g}$. В самом деле, решение уравнения $\dot{g} = gB$ в этом случае имеет вид $g(t) = g_0 \exp[(t-a)B]$, где $\exp[(t-a)B]$ — экспонента вектора из алгебры Ли $\mathfrak{g}$, принадлежащая группе G.

В случае непостоянной функции $B(t)$ разобьем отрезок $[a, t]$ на N малых частей $a=t_0<t_1<\ldots<t_N=t$. С точностью до $o(t_i-t_{i-1})$ будем иметь

$$g(t_1)=g_0+g_0(t_1-t_0)B(t_0)=g(t_0)\exp[(t_1-t_0)B(t_0)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$g(t_N)=g(t_{N-1})\exp[(t_N-t_{N-1})B(t_{N-1})].$$

Отсюда вытекает, что $g(t)=g_0f(t)$, где

$$f(t)=\lim_{|t_i-t_{i-1}|\to 0}\exp[(t_N-t_{N-1})B(t_{N-1})]\ldots\exp[(t_1-t_0)B(t_0)].$$

Каждый сомножитель принадлежит группе G, поэтому и произведение принадлежит G. Лемма, а вместе с ней и теорема, доказаны.

Следствие. *Для G-связностей верна лемма 2 из § 24 (без предположения о компактности слоя).*

Для G-связностей определена группа голономии. Эта группа является образом гомоморфизма, относящего петлям из $\Omega(x_0, M)$ преобразования слоя, и состоит из правых сдвигов группы G (хотя, возможно, не всех).

2. G-связности в ассоциированных расслоениях. Примеры. Обсудим теперь, пользуясь инвариантным языком, связности в ассоциированных расслоениях. Предположим, что группа G действует как группа преобразований в многообразии F — слое. Пусть, далее, $p_F\colon E_F\to M$ — расслоение, ассоциированное с главным расслоением $p\colon E\to M$, обладающим формой связности ω. Форму ассоциированной связности на пространстве E_F зададим со значениями в касательном векторном пространстве к слою F. Конструкция такова: каждый элемент g группы G определяет преобразование слоя $g\colon F\to F$. Вследствие этого элементы алгебры Ли группы $\mathfrak{g}$ определяют векторные поля на слое F — дифференциальные операторы (дифференцирования по направлению) на скалярных функциях. Пусть заданы точка $y\in F$ и касательный вектор τ в этой точке. Определим форму ω_F^0 на слое F, положив ее значение $\omega_F^0(y,\tau)$ на векторе τ равным τ. Ограничение искомой формы ω_F на каждый слой F должно равняться ω_F^0. Из этого вытекает, что в каждой области $p_F^{-1}(U_\alpha)\overset{\varphi_\alpha}{\approx}F\times U_\alpha$ с координатами прямого произведения форма ω_F должна иметь вид

$$\omega_F=\omega_F^0+A_\mu(y,x)\,dx_\alpha^\mu,\quad x=p(y). \tag{4}$$

В качестве $A_\mu(y, x)$ мы берем следующий касательный вектор к слою в точке $y\in E_F$: элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, совпадающий с $A_\mu(x)$, определяет векторное поле ξ на слое F; берется значение поля ξ в точке $y\in F$ — касательный вектор к слою

$$A_\mu(y,x)=\xi(y),\quad p(y)=x.$$

По определению, значение форм dx^μ_α на любом векторе τ, касающемся слоя, равно нулю. Поэтому ограничение формы ω_F на слой F есть ω^0_F.

Уравнение $\omega_F=0$ задает «горизонтальные направления» $\mathbb{R}^n_x$ для точек $x\in E_F$ в ассоциированном расслоении. Формула (4) определяет форму ω_F инвариантно.

Если слой F есть векторное пространство $\mathbb{R}^m$ и группа G действует линейно, то элементы ξ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно считать линейными векторными полями (или матрицами $A_\xi\colon \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$). Пусть $\eta^1, \ldots, \eta^m$ — координаты в слое $\mathbb{R}^m$. Если $A_\xi=(a^j_i)$, то поле $\xi(\eta)$ равно

$$\xi^j=a^j_i\eta^i.$$

Поле $A_\mu(x)$ имеет матричный вид:

$$A_\mu(x)=(A_\mu(x))^i_j=a^i_{j\mu}(x) \text{ — матрица в } \mathbb{R}^m.$$

Таким образом, в векторном расслоении со слоем $\mathbb{R}^m$ связность задается (локально) матрицей, зависящей от x и μ:

$$a^i_{j\mu}(x),\quad i, j=1, \ldots, m,\quad \mu=1, \ldots, n=\dim M,$$

или матричнозначной формой $a^i_{j\mu}dx^\mu$.

Если само расслоение — касательное расслоение многообразия M (со слоем $\mathbb{R}^n$), то имеет смысл говорить о кручении (см. часть I, § 41):

$$a^i_{j\mu}-a^i_{\mu j}=T^i_{\mu j}=-T^i_{j\mu} \text{ (тензор в } M),$$

и о симметричности связности, если $T^i_{\mu j}\equiv 0$.

Параллельный перенос слоя F вдоль пути $\gamma(t)$ в базе является для таких связностей линейным преобразованием. В локальных координатах $x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha$ области $U_\alpha\subset M$ определяются оператор ковариантного дифференцирования сечений векторного расслоения:

$$\nabla_\mu\psi^i(x)=\frac{\partial\psi^i(x)}{\partial x^\mu}+a^i_{j\mu}(x)\,\psi^j(x), \tag{5}$$

и производной по направлению $\delta=(\delta^1, \ldots, \delta^n)$ в базе $\nabla_\delta=\delta^\mu\nabla_\mu$. Неперестановочность операторов ∇_μ и ∇_ν между собой приводит к кривизне $\Omega_{\nu\mu}=[\nabla_\nu, \nabla_\mu]$.

Для гладкой кривой $\gamma(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, линейный оператор параллельного переноса слоя вдоль пути из точки $\gamma(0)$ в точку $\gamma(1)$ изображается так называемой «хронологической экспонентой» и обозначается через

$$T\exp\left\{\int_0^1\left(\frac{d}{dt}-\nabla_{\dot\gamma(t)}\right)dt\right\}. \tag{6}$$

Здесь $T[A_1(t)A_2(t')\ldots]$ обозначает так называемое хронологическое произведение двух (и более) некоммутирующих друг с другом операторов, зависящих от времени:

$$\begin{aligned} T[A_1(t)A_2(t')] &= A_1(t)A_2(t') \quad \text{при} \quad t > t', \\ T[A_1(t)A_2(t')] &= A_2(t')A_1(t) \quad \text{при} \quad t < t'. \end{aligned} \tag{7}$$

Если кривая $\gamma(t)$ разделена на малые интервалы точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = 1$, то для операторной функции $A(t)$ по определению полагаем

$$T \exp \left\{ \int_0^1 A(t)\, dt \right\} = \lim_{\substack{N \to \infty \\ |t_i - t_{i-1}| \to 0}} T \{ \exp [(t_1 - t_0) A(t_0)] \times \\ \times \exp [(t_2 - t_1) A(t_1)] \ldots \exp [(t_N - t_{N-1}) A(t_{N-1})] \}. \tag{8}$$

Полагая $A(t) = \frac{d}{dt} - \nabla_{\dot\gamma(t)}$ для гладкой кривой $\gamma(t)$, получим оператор параллельного переноса вдоль кривой.

Задачи. 1. Доказать формулу разложения в ряд для непрерывной функции $A(t)$:

$$T \exp \left\{ \int_0^1 A(t)\, dt \right\} = 1 + \int_0^1 A(t)\, dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 T(A(t') A(t''))\, dt'\, dt'' + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{n!} \int_0^1 \ldots \int_0^1 T(A(t_1) \ldots A(t_n))\, dt_1 \ldots dt_n + \ldots \tag{9}$$

2. Показать, что выражение $T \exp \int_0^t A(\tau)\, d\tau = B(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dB}{dt} = [A(t), B(t)], \tag{10}$$

а вектор $\eta(t) = B(t)\eta_0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = A(t)\,\eta(t). \tag{11}$$

Напомним, что параллельный перенос определялся из уравнения

$$\nabla_{\dot\gamma(t)} \eta(t) = 0, \tag{12}$$

или $\frac{d\eta^i(t)}{dt} + a^i_{j\mu}(t)\,\dot x^\mu(t)\,\eta^j(t) = 0$, где $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$. В этом случае имеем

$$A(t) = \frac{d}{dt} - \nabla_{\dot\gamma(t)} = -a^i_{j\mu}(t)\,\dot x^\mu(t). \tag{13}$$

Простейший случай представляет собой коммутативная группа $U(1)=SO(2)=G=S^1$ с одномерной алгеброй Ли $\mathfrak{g}_j=\mathbb{R}^1$ (тривиальной). В этом случае имеем $\omega_0=\frac{1}{2\pi}d\varphi$, где $\varphi\,(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ — координата на группе S^1. Локально заданные формы $gA_\mu g^{-1}dx^\mu$ совпадают с

$$\omega=\omega_0+gA_\mu g^{-1}dx^\mu=\frac{1}{2\pi}d\varphi+A_\mu dx^\mu. \tag{14}$$

Калибровочное преобразование чисто градиентно:

$$A_\mu\to A_\mu+\frac{\partial g(x)}{\partial x^\mu}g^{-1}=A_\mu+\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}. \tag{15}$$

Форма связности есть просто скалярная форма ω, инвариантная при действии группы G на E:

$$g^*\omega=\omega=\mathrm{Ad}(g)\,\omega=g\omega g^{-1}. \tag{16}$$

Уравнение $\omega=0$, задающее связность, есть просто одно уравнение Пфаффа, выделяющее касательные гиперплоскости в E, трансверсальные к слоям.

Оператор ковариантного дифференцирования комплексных скалярных полей (т. е. сечений одномерных расслоений со слоем $\mathbb{C}^1$) для реализации группы G в виде $U(1)$ имеет вид (см. часть I, § 41)

$$\nabla_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}+iA_\mu(x), \tag{17}$$

где $A_\mu(x)$ — вещественный скаляр (при каждом μ). Коммутатор операторов ∇_μ и ∇_ν называется «кривизной».

3. Кривизна. Пусть комплексное одномерное расслоение со слоем $\mathbb{C}^1$ комплексно аналитично и имеет структурную группу $G=\mathbb{C}^*$; базой пусть служит n-мерное комплексное многообразие M с областями комплексных локальных координат $U_\alpha(z_\alpha^1,\ldots,z_\alpha^n)$. Расслоение задается функциями склейки в областях $U_{\alpha\beta}=U_\alpha\cap U_\beta$,

$$T^{\alpha\beta}(z_\alpha^1,\ldots,z_\alpha^n)\neq 0, \tag{18}$$

со значениями в $G=\mathbb{C}^*$, и эти функции $T^{\alpha\beta}$ аналитичны. Рассмотрим логарифм (определенный, возможно, неоднозначно)

$$a_{\alpha\beta}=\ln T^{\alpha\beta}(z^1,\ldots,z^n)\,(+2\pi im). \tag{19}$$

В дальнейшем мы будем считать, что области $U_{\alpha\beta}$ односвязны, т. е. $\pi_1(U_{\alpha\beta})=0$. В этом случае можно выбрать однозначную ветвь логарифма

$$a_{\alpha\beta}=\ln T^{\alpha\beta}(z).$$

В пересечении трех областей $U_{\alpha\beta\gamma}=U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$ имеем

$$T^{\alpha\beta}T^{\beta\gamma}T^{\gamma\alpha}=1 \quad \text{или} \quad a_{\alpha\beta}+a_{\beta\gamma}+a_{\gamma\alpha}=2\pi i n_{\alpha\beta\gamma}, \tag{20}$$

где $n_{\alpha\beta\gamma}$ — целое число. Это целое число определяется, очевидно, и без предположения об аналитичности функций $T^{\alpha\beta}(z)$. Позднее будет показано, как с помощью набора $\{n_{\alpha\beta\gamma}\}$, где $\alpha\beta\gamma$ — всевозможные тройки с непустым пересечением $U_{\alpha\beta\gamma}$ (этот набор называют *коцепью*), строится топологический инвариант расслоения. Если комплексная размерность базы M равна 1, то этот топологический инвариант определяется так: занумеруем области U_α в последовательность U_1, U_2, ... и предположим, что никакие четыре области не пересекаются ($U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}\cap U_{\alpha_3}\cap U_{\alpha_4}$ — пустое множество). Рассмотрим сумму

$$n=\sum_{\alpha<\beta<\gamma} n_{\alpha\beta\gamma}. \tag{21}$$

Задача. Доказать, что вычет числа $n \bmod 2$ не зависит от выбора структуры расслоения (является «топологической величиной»). Найти этот вычет для расслоения Хопфа η над $\mathbb{C}P^1$ и для его степеней η^k.

Вернемся теперь к комплексно аналитическим расслоениям со структурной группой $\mathbb{C}^*=S^1\times\mathbb{R}^+$; алгебра Ли этой группы коммутативна и совпадает с $\mathbb{C}^1$. На группе $G=\mathbb{C}^*$ имеется комплексная координата w, $|w|>0$, и комплекснозначная форма $\omega_0=d\ln w$. В аналитическом расслоении форма связности (локально, в области U_α) записывается в виде

$$\omega=\omega_0+A_\mu^{(\alpha)}dz_\alpha^\mu+B_\mu^{(\alpha)}d\bar z_\alpha^\mu. \tag{22}$$

Потребуем, чтобы форма связности была задана локально в виде

$$\omega=\omega_0+d'f_\alpha=\omega_0+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z^j}dz^j, \tag{23}$$

где f_α — некоторые числовые функции, т. е.

$$B_\mu(z)\equiv 0, \quad A_\mu^\alpha(z)=\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\alpha^\mu}. \tag{24}$$

Для пересечений $U_{\alpha\beta}$ мы должны иметь градиентное преобразование (см. (15)):

$$d'f_\alpha-d'f_\beta=(d'+d'')\gamma_{\alpha\beta}, \tag{25}$$

где $d'+d''$ — полный дифференциал: $d=d'+d''$. Если пересечения $U_{\alpha\beta}$ односвязны, то $\ln T^{\alpha\beta}(z)$ — однозначные функции. Мы полагаем $\gamma_{\alpha\beta}=\ln T^{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}$ и выбираем, предполагая это возможным, функции f_α (вообще говоря, неаналитические). Заметим, что $d''\gamma_{\alpha\beta}=0$ в силу аналитичности функций $\gamma_{\alpha\beta}$. Поэтому форма

$\Omega = d'd''f_\alpha$ определена однозначно на всем многообразии M:

$$d'd''f_\alpha - d'd''f_\beta \equiv d''(d' + d'')\gamma_{\alpha\beta} \equiv 0 \tag{26}$$

(так как $d'^2 = d''^2 = (d' + d'')^2 = 0$ и $d'd'' = -d''d'$).

Форма Ω называется *кривизной* этой связности.

Имеем $\Omega = \sum\limits_{ij} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial z^i_\alpha \partial \bar{z}^j_\alpha} dz^i_\alpha \wedge d\bar{z}^j_\alpha$ (локально). Для двумерного случая ($n = 1$) форма кривизны имеет в области U_α вид

$$\Omega = \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\alpha} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha. \tag{27}$$

Заметим при этом, что $\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}} = \Delta$ — вещественное выражение, и $dz \wedge d\bar{z} = 2i dx \wedge dy$. Поэтому действительная и мнимая части формы Ω обе корректно определены для $n = 1$ и замкнуты. В дальнейшем будет ясно, что $\operatorname{Re} \Omega = d(\Omega_1)$ и поэтому

$$\int\limits_M \operatorname{Re} \Omega = 0.$$

Заметим еще, что если функции f_α являются аналитическими, то $\Omega = 0$.

Для вещественных баз M структура расслоения со структурной группой $S^1 = U(1)$ и слоем $\mathbb{C}^1$ определяется функциями склейки $T^{\alpha\beta}(x) = e^{i\varphi_{\alpha\beta}(x)}$ в области $U_{\alpha\beta}$. Связность в области задается 1-формой ω_α, причем разность этих форм в пересечении областей U_α, U_β имеет вид

$$\omega_\alpha - \omega_\beta = dq_{\alpha\beta}(x),$$

где $q_{\alpha\beta}(x)$ — числовая функция. Фактически функция $q_{\alpha\beta}(x)$ сводится к $\ln T^{\alpha\beta}(x) = i\varphi_{\alpha\beta}(x)$.

Кривизна Ω определяется формулой

$$2\pi i \Omega = d\omega_\alpha \quad \text{(в области } U_\alpha\text{)}.$$

Очевидно, что в области $U_{\alpha\beta}$

$$d\omega_\alpha - d\omega_\beta = ddq_{\alpha\beta} \equiv 0.$$

Таким образом, форма Ω корректно определена на всей базе M.

Инвариантным образом форму кривизны Ω для расслоений с группой S^1 можно описать так: рассмотрим форму связности ω на пространстве E расслоения $p\colon E \to M$.

Определение 3. $p^*\Omega = \frac{1}{2\pi i} d\omega$.

Для проверки корректности этого определения и его эквивалентности предыдущему определению достаточно заметить, что локально (в области U_α) $\omega=\omega_0+p^*\omega_\alpha$, где $\omega_0=\frac{1}{2\pi}d\varphi$. Форма $d\omega$ имеет вид

$$d\omega=dp^*\omega_\alpha=p^*(2\pi i\Omega). \qquad (28)$$

Число $2\pi i$ здесь является просто нормировочным множителем.

Перейдем теперь к определению и изучению кривизны в общих вещественных и комплексных расслоениях.

В касательном пространстве T_yE точки $y\in E$ при наличии связности имеется разложение $T_yE=T_yF\oplus\mathbb{R}^n_y$, где $\mathbb{R}^n_y$ — горизонтальное направление связности. Имеем проектирование H, порожденное связностью:

$$H\colon\ T_yE\to\mathbb{R}^n_y,\quad H(T_yF)=0.$$

Определение 4. Если $\tau_1,\ldots,\tau_q$ — произвольные векторы из E и $H(\tau_1),\ldots,H(\tau_q)$ — их образы в $\mathbb{R}^n_y$, то *горизонтальной частью* q-формы ω называется форма

$$H\omega(\tau_1,\ldots,\tau_q)=\omega(H\tau_1,\ldots,H\tau_q). \qquad (29)$$

Из определения видно, что если один из векторов τ_j касателен к слою («вертикален»), то $H\omega_q(\tau_1,\ldots,\tau_q)=0$. В частности, ограничение форм вида $H\omega_q$ на слой равно нулю.

Определение 5. *Формой кривизны* в пространстве расслоения E называется выражение

$$\Omega_E=Hd\omega, \qquad (30)$$

где ω — форма связности.

Теорема 2. *Имеет место «структурное уравнение»*

$$d\omega+[\omega,\omega]=Hd\omega=\Omega_E. \qquad (31)$$

Для преобразований пространства E, производимых элементами группы G, имеет место равенство

$$g^*\Omega_E=\mathrm{Ad}\,g\Omega_E=g\Omega_Eg^{-1}. \qquad (32)$$

Замечание. Формы ω и Ω_E принимают значения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, в которой имеется операция коммутирования, причем $[\xi,\eta]=-[\eta,\xi]$. Для форм со значениями в какой угодно алгебре с билинейным законом умножения можно определить операцию умножения форм (в нашем случае — операцию «коммутирования» форм со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$) по правилу

$$\alpha(p,q)[\omega_p,\omega_q](\tau_1,\ldots,\tau_{p+q})=$$
$$=\sum_\sigma\operatorname{sgn}\sigma\left[\omega_p(\tau_{i_1}\ldots\tau_{i_p}),\omega_q(\tau_{j_1}\ldots\tau_{j_q})\right], \qquad (33)$$

где σ — перестановка индексов

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&\ldots&p&p+1&\ldots&p+q\\ i_1&i_2&\ldots&i_p&j_1&\ldots&j_q\end{pmatrix}$$

и $\alpha(p,q)$ — число сочетаний из $p+q$ по p.

Для 1-форм ($p=q=1$) определение операции коммутирования принимает вид

$$[\omega_1, \omega_2](\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2}([\omega_1(\tau_1), \omega_2(\tau_2)] - [\omega_1(\tau_2), \omega_2(\tau_1)]). \tag{34}$$

Если $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, то

$$[\omega, \omega](\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2}([\omega(\tau_1), \omega(\tau_2)] - [\omega(\tau_2), \omega(\tau_1)]) = [\omega(\tau_1), \omega(\tau_2)]. \tag{35}$$

Доказательство теоремы. Мы проверим утверждение теоремы в области определения локальной системы координат $E_\alpha = p^{-1}(U_\alpha)$, в которой форма связности имеет вид

$$\omega = \omega_0 + gA_\mu(x_\alpha)g^{-1}dx^\mu_\alpha = \omega_0 + gAg^{-1}, \tag{36}$$

где $A = A_\mu dx^\mu$, $\omega_0 = -(dg)g^{-1}$. Фиксируем для удобства вычислений структуру прямого произведения $G \times U_\alpha$ в $p^{-1}(U_\alpha)$ и базис (∂_μ) в касательном пространстве к M, где $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Для оператора H в точке $(1, x) \in G \times U_\alpha$ имеем $H\partial_\mu = \partial_\mu - A_\mu$, $He = 0$, где e — касательный вектор к слою. Здесь A_μ есть элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, интерпретированный как касательный вектор к группе G в точке 1. Для формы ω_0 по самому ее определению имеем $\omega_0(A_\mu) = A_\mu$. Далее: $H\,dx^\mu = dx^\mu$, $H\omega_0(\partial_\mu) = \omega_0(H\partial_\mu) = -\omega_0(A_\mu) = -A_\mu$. Итак, $HA = A$, $H\omega_0 = A = A_\mu dx^\mu$ (в точке $(1, x)$);

$$d\omega_0 = -d(dgg^{-1}) = dgg^{-1}dgg^{-1} = [\omega_0, \omega_0];$$

$$d\omega = d\omega_0 + (dgg^{-1})(gAg^{-1}) - (gAg^{-1})(dgg^{-1}) + g(dA)g^{-1} = \\ = [\omega_0, \omega_0] - [\omega_0, g^{-1}Ag] + [g^{-1}Ag, \omega_0] + g(dA)g^{-1}.$$

Отсюда получаем ($g = 1$)

$$Hd\omega = [H\omega_0, H\omega_0] - [H\omega_0, HA] + [HA, H\omega_0] + H(dA) = \\ = [A, A] + dA. \tag{37}$$

При $g \neq 1$ форма $Hd\omega$ восстанавливается на основании ее инвариантности, $g^*(H\,d\omega) = \mathrm{Ad}(g)H\,d\omega$ (операторы H и d сохраняют это свойство). Окончательно для всех g имеем

$$H\,d\omega = \Omega_E = g(dA + [A, A])g^{-1}. \tag{38}$$

Для формы $d\omega$ получаем $d\omega = \Omega_E - g^{-1}[A, A]g - [\omega_0, \omega_0] - 2[\omega_0, g^{-1}Ag] = \Omega_E - [\omega, \omega]$.

Теорема доказана.

Локально, в координатной окрестности U_α базы M, форму Ω_E можно «опустить» в базу:

$$\Omega = DA = dA - [A, A] = \Omega_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = \\ = \left(-\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + [A_\mu, A_\nu]\right)dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{39}$$

Очевидно, что коэффициенты $\Omega_{\mu\nu}$ формы Ω — это коммутаторы: $\Omega_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$. При калибровочном преобразовании $g(x)$

$$\Omega \to g\Omega g^{-1}. \tag{40}$$

Для формы кривизны $\Omega_E = H\,d\omega = d\omega + [\omega, \omega]$ можно точно так же вычислить $d\Omega_E$ и $H\,d\Omega_E$. Мы получим «тождества Бьянки» (проверьте, как и выше)

$$d\Omega_E = 2[\omega, \Omega_E],$$
$$H\,d\Omega_E = 0.$$

Для форм Ω в областях U_α базы M элементарное вычисление показывает, что

$$D\Omega = d\Omega + [A, \Omega] = 0 \tag{41}$$

(проверьте!).

4. Характеристические классы. Конструкции. Для одномерных комплексных расслоений с коммутативной структурной группой $G = S^1$ или $G = \mathbb{C}^*$ тождества Бьянки сводятся к замкнутости формы кривизны Ω, так как $[A, \Omega] = 0$. Кроме того, $g\Omega g^{-1} = \Omega$ и форма Ω является корректно определенной замкнутой формой на базе M. В пространстве E форма $p^*\Omega = \Omega_E$ точна: $\Omega_E = d\omega$. В базе M форма Ω, возможно, не точна (это будет обсуждаться позднее). Заменим связность ω другой связностью $\bar\omega$ в том же расслоении $p\colon E \to M$.

Лемма 3. *Разность форм кривизны Ω и $\bar\Omega$, отвечающих разным связностям ω и $\bar\omega$ в одном и том же расслоении с группой $G = S^1$, является точной формой,*

$$\Omega - \bar\Omega = du.$$

Доказательство. По определению $p^*\Omega = \Omega_E = d\omega$ и $p^*\bar\Omega = \bar\Omega_E = d\bar\omega$. Разность $\omega - \bar\omega$ имеет в области U_α вид

$$\omega - \bar\omega = (\omega^0 + A_\mu\,dx^\mu) - (\omega^0 + \bar A_\mu\,dx^\mu) = (A_\mu - \bar A_\mu)\,dx^\mu.$$

Таким образом, форма $\omega - \bar\omega$ имеет вид p^*u и $\Omega - \bar\Omega = du$. Лемма доказана.

Пусть в базе M имеется двумерное замкнутое ориентированное подмногообразие $P \subset M$. Из леммы вытекает

Следствие. *Интегралы $\int_P \Omega$ и $\int_P \bar\Omega$ совпадают; следовательно, величина $\int_P \Omega$ не зависит от выбора связности в расслоении $p\colon E \to M$ и является «топологической величиной».*

Доказательство. $\int_P (\Omega - \bar\Omega) = \int_P du = \int_{\partial P} u = 0$, так как P не имеет края.

Рассмотрим теперь произвольную группу G (реализованную матрично) и локальные формы кривизны Ω в области U_α с координатами $\{x_\alpha\}$. При калибровочных преобразованиях

$$\Omega \to g(x)\Omega g(x)^{-1}.$$

Рассмотрим скалярную форму $\operatorname{Sp}\Omega$. Очевидно, имеем

$$\operatorname{Sp}\Omega = \operatorname{Sp}(g\Omega g^{-1}).$$

Следовательно, скалярная форма $\operatorname{Sp}\Omega$ определена инвариантно на всей базе M.

Из тождества Бьянки (41) получаем

$$d\Omega = -[A, \Omega].$$

Из этого вытекает, что форма $\operatorname{Sp}\Omega$ замкнута:

$$d\operatorname{Sp}\Omega = \operatorname{Sp}(d\Omega) = -\operatorname{Sp}[A, \Omega] = 0,$$

так как след коммутатора двух матриц всегда равен нулю. При замене связности ω другой связностью $\bar{\omega}$ имеем

$$d(\omega - \bar{\omega}) = d\omega - d\bar{\omega} = \Omega_E - \bar{\Omega}_E - [\omega, \omega] - [\bar{\omega}, \bar{\omega}].$$

Переходя к следам $\operatorname{Sp}\omega$, $\operatorname{Sp}\bar{\omega}$, $\operatorname{Sp}\Omega_E$, $\operatorname{Sp}\bar{\Omega}_E$ и используя равенство $\operatorname{Sp}[\omega, \omega] = 0$, получаем

$$d(\operatorname{Sp}\omega - \operatorname{Sp}\bar{\omega}) = \operatorname{Sp}\Omega_E - \operatorname{Sp}\bar{\Omega}_E = p^*(\operatorname{Sp}\Omega - \operatorname{Sp}\bar{\Omega}).$$

При этом локально $\operatorname{Sp}\omega = \operatorname{Sp}\omega_0 + \operatorname{Sp}p^*(A)$, $\operatorname{Sp}\bar{\omega} = \operatorname{Sp}\omega_0 + \operatorname{Sp}p^*(\bar{A})$. Окончательно

$$\operatorname{Sp}\Omega - \operatorname{Sp}\bar{\Omega} = du \quad (\text{в базе } M).$$

Из этого следует, что интегралы формы $\operatorname{Sp}\Omega$ по двумерным подмногообразиям многообразия M являются «топологическими величинами» (не зависят от связности в расслоении).

Рассмотрим теперь локально форму Ω в области базы U_α как матричнозначную дифференциальную 2-форму

$$\Omega = \Omega_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = (q^i_j)_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{42}$$

а связность — как матричнозначную 1-форму

$$A = A_\mu dx^\mu = (a^i_j)_\mu\, dx^\mu; \tag{43}$$

между этими формами имеется связь:

$$\Omega_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} + [A_\mu, A_\nu]. \tag{44}$$

Мы уже рассматривали произведение форм, где за операцию умножения коэффициентов бралось коммутирование. Здесь мы рассмотрим произведение форм с матричными значениями относительно обычного матричного умножения коэффициентов (ср. аналогичное определение (33))

$$\alpha(p, q)(\omega_p \wedge \omega_q)(\tau_1, \ldots, \tau_{p+q}) = \\ = \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_p \\ j_1<\ldots<j_q}} \operatorname{sgn} \sigma \omega_p(\tau_{i_1} \ldots \tau_{i_p}) \omega_q(\tau_{j_1} \ldots \tau_{j_q}), \qquad (45)$$

где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & p & p+1 & \ldots & p+q \\ i_1 & \ldots & i_p & j_1 & \ldots & j_q \end{pmatrix}$ — перестановка, $\alpha(p, q) = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}$.

Алгебра форм будет ассоциативной, но не кососкоммутативной.

Определяем «характеристические классы»

$$c_i = \operatorname{Sp}(\Omega \wedge \ldots \wedge \Omega) = \operatorname{Sp}\Omega^i, \quad i \geqslant 1. \qquad (46)$$

Форма c_i определена корректно на всей базе M, поскольку при калибровочном преобразовании

$$\Omega \to g\Omega g^{-1}, \quad \Omega^i \to g\Omega^i g^{-1}, \quad \operatorname{Sp}\Omega^i = c_i \to c_i.$$

Форма $c_i = \operatorname{Sp}\Omega^i$ замкнута в силу тождеств Бьянки

$$d\operatorname{Sp}\Omega^i = \operatorname{Sp} d\Omega^i = \sum_{j=1}^{i} \operatorname{Sp}\left(\Omega^{j-1} \wedge (d\Omega) \wedge \Omega^{i-j}\right) = 0,$$

так как $d\Omega = -[A, \Omega]$ и $\operatorname{Sp}(\Omega^{j-1}[A, \Omega]\Omega^{i-j}) = 0$. При замене связности ω другой связностью $\bar{\omega}$ форма c_i изменяется на точную форму du_i, где $p^* u_i = \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \operatorname{Sp}\left(\Omega^{j-1} \wedge (A - \bar{A})\Omega^{i-j}\right)$ (проверьте!). Поэтому интегралы $\int_P c_i$ по замкнутым ориентированным $2i$-мерным подмногообразиям P многообразия M представляют собой топологические величины.

Для группы $G = SO(2n)$ введем еще одну форму χ_n степени $2n$ на базе M

$$\beta(n)\chi_n = \sum_{\substack{i_1<i_2 \\ i_3<i_4 \\ \cdots\cdots \\ i_{2n-1}<i_{2n}}} \chi\left[\Omega(\tau_{i_1}, \tau_{i_2}), \ldots, \Omega(\tau_{i_{2n-1}}, \tau_{i_{2n}})\right], \qquad (47)$$

где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 2n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_{2n} \end{pmatrix}$ — перестановка, $\beta(n)$ — числовой коэффициент, который будет выбран позднее из требований нормировки, $\chi[L^{(1)}, \ldots, L^{(n)}]$ — полилинейная форма от n кососимметрических матриц $L^{(1)} = (l_{ij}^{(1)}), \ldots, L^{(n)} = (l_{ij}^{(n)})$, построенная так: если $l^{(k)} = l_{ij}^{(k)} du^i \wedge du^j$ — формы степени 2 в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $u_1, \ldots, u_{2n}$, то

$$l^{(1)} \wedge \ldots \wedge l^{(n)} = \chi\left[L^{(1)}, \ldots, L^{(n)}\right] du_1 \wedge \ldots \wedge du_{2n}.$$

(Это — аналог так называемого «пфаффиана».)

Если $n=1$, то $\chi(L)$ — это обычный изоморфизм между алгеброй Ли группы $SO(2)$ и прямой $\mathbb{R}^1$; форма χ_1 для $G=SO(2)$ уже вводилась выше $(G=S^1=U(1)=SO(2))$. Для $n=2$ имеем

$$\beta(2)\chi_2=\frac{1}{4!}\varepsilon^{i_1i_2i_3i_4}\Omega(\tau_{i_1},\tau_{i_2})\wedge\Omega(\tau_{i_3},\tau_{i_4}). \tag{48}$$

Задачи. 1. Докажите, что χ_n — замкнутая форма на базе расслоения со структурной группой $G=SO(2n)$. Если база M — риманово многообразие размерности $2n$ с метрикой g_{ij} и расслоение касательное, то

$$\begin{aligned}&(n=1)\quad \chi_1=R\,d\sigma=R\sqrt{g}\,du\wedge dv,\quad g=\det(g_{ij});\\ &(\text{общий случай})\ \beta(n)\chi_n=\varepsilon^{i_1\ldots i_{2n}}\Omega_{i_1i_2}\wedge\ldots\wedge\Omega_{i_{2n-1}i_{2n}},\end{aligned} \tag{49}$$

где $\Omega_{ij}=\sum_{k<l}R_{ijkl}dx^k\wedge dx^l$. Для всех групп $SO(n)$ и $SU(n)$ форма c_1 тривиальна, так как $\operatorname{Sp}\Omega\equiv0$ (алгебра Ли состоит из бесследных матриц).

2. Показать, что для расслоений со структурной группой $SO(n)$ все формы $c_{2i+1}=\operatorname{Sp}(\Omega^{2i+1})$ глобально (на всей базе) являются точными и не дают топологических величин $(i<n)$.

Для $n=2$ и группы $SO(4)$ имеем характеристические классы $c_2=\operatorname{Sp}(\Omega^2)$ и χ_2. Для четырехмерных римановых многообразий с метрикой g_{ij} имеем формулу (связность симметрична и согласована с метрикой)

$$\begin{aligned}c_2&=-R^{ij}_{\lambda\varkappa}R_{ij\nu\mu}dx^\lambda\wedge dx^\varkappa\wedge dx^\nu\wedge dx^\mu;\\ \chi_2&=\frac{1}{4!}\varepsilon^{i_1i_2i_3i_4}R_{i_1i_2\nu\mu}R_{i_3i_4\lambda\varkappa}dx^\nu\wedge dx^\mu\wedge dx^\lambda\wedge dx^\varkappa.\end{aligned} \tag{50}$$

Интегралы $\int_M c_2$ и $\int_M \chi_2$ являются функционалами от метрики (g_{ij}) на M, имеющими тождественно нулевую вариацию (т. е. не меняющимися при малом изменении метрики).

Мы уже перечислили важнейшие характеристические классы для групп $SO(n)$, $U(n)$. Можно ввести аналогичные характеристические классы b_j как формы степени $2j$ в базе $Sp(n)$ — расслоения, где группа $Sp(n)$ и ее алгебра Ли реализованы как кватернионные унитарные и косоэрмитовы матрицы, причем нетривиальными из них будут лишь b_{2i} (проверьте!). Это, однако, менее важный случай.

Сейчас мы укажем общую конструкцию характеристических классов (т. е. замкнутых форм на базе, меняющихся при изменении связности лишь на точную форму, так что интегралы по замкнутым подмногообразиям базы являются топологическими величинами). Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы G и внутренние автоморфизмы $\mathrm{Ad}\, g$ группы G на алгебре $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{Ad}\, g\colon\ l \mapsto glg^{-1} \quad \text{(в матричной реализации).}$$

Определение 6. Симметричная полилинейная форма с числовыми значениями $\psi[l_1, \ldots, l_m]$ на алгебре $\mathfrak{g}$, где $l_i \in \mathfrak{g}$, называется Ad-*инвариантной*, если эта форма ψ не меняется при преобразованиях вида $\mathrm{Ad}\, g$ группы G на алгебре $\mathfrak{g}$:

$$\psi[gl_1g^{-1}, \ldots, gl_mg^{-1}] = \psi[l_1, \ldots, l_m]. \tag{51}$$

Каждая Ad-инвариантная форма ψ определяет характеристический класс c_ψ. Построение характеристического класса по Ad-инвариантной форме ψ таково: если Ω — (локальная) форма кривизны в базе M, то полагаем

$$c_\psi(\tau_1, \ldots, \tau_{2m}) = c_\psi(\Omega) = \\ = \sum_{\substack{i_1<i_2\\ \cdots\cdots\\ i_{2m-1}<i_{2m}}} \operatorname{sgn}\sigma\psi\left[\Omega(\tau_{i_1}, \tau_{i_2}), \ldots, \Omega(\tau_{i_{2m-1}}, \tau_{i_{2m}})\right], \tag{52}$$

где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 \ldots 2m \\ i_1 \ldots i_{2m} \end{pmatrix}$ — перестановка.

Полагая $\Omega(\tau_{i_{2q-1}}, \tau_{i_{2q}}) = l_q$, сразу усматриваем аналогию между определением формы $c_\psi(\Omega)$ и определением эйлерова класса $\chi_n(\Omega)$; для классов $c_i(G = U(n),\ SO(n))$ формы ψ_i имеют вид

$$\mathrm{const}\cdot \psi_i(l_1, \ldots, l_i) = \sum_{k_1, \ldots, k_i} \mathrm{Sp}\,(l_{k_1} \ldots l_{k_i}).$$

Из Ad-инвариантности ψ следует, что $c_\psi(\Omega)$ — корректно определенная числовая форма на базе M.

Задача. Доказать, что форма $c_\psi(\Omega)$ замкнута и при изменении связности в том же расслоении изменяется на точную форму (т. е. интегралы по замкнутым подмногообразиям — топологические величины).

Пример 1. G — абелева группа T^n (или $\mathbb{R}^n$). Тогда $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$, и действие $\mathrm{Ad}\, g$ тривиально. Все симметричные полилинейные формы $\psi(l_1, \ldots, l_m)$ определяют характеристические классы c_ψ. Таким образом, совокупность всех классов вида $c_\psi(\Omega)$ — это алгебра симметрических многочленов от n образующих, соответствующих элементарным формам $\psi_j(l) = \langle l, e_j\rangle$, где $e_1, \ldots, e_n$ — ортогональный базис алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$ в евклидовой метрике.

Классы $c_{\psi_j}(\Omega)$ обозначим через $t_j(\Omega)$. Это — формы степени 2 в базе расслоения. Любой класс имеет вид

$$\sum \alpha_{i_1 \ldots i_q} t_{i_1}^{n_1} \ldots t_{i_q}^{n_q} = c_\psi(\Omega). \tag{53}$$

Пример 2. $G=U(n)$. Здесь алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из косоэрмитовых матриц. Любая симметричная Ad-инвариантная форма $\psi(l_1, \ldots, l_m)$ на $\mathfrak{g}$ может быть ограничена на *картановскую*, т. е. максимальную коммутативную подалгебру H алгебры $\mathfrak{g}$. Для алгебры Ли группы $U(n)$ в качестве H можно взять алгебру диагональных косоэрмитовых матриц (т. е. диагональных матриц с чисто мнимыми диагональными элементами). Оказывается, что ограничение Ad-инвариантной формы ψ на картановскую подалгебру полностью определяет эту форму. Этот факт мы не доказываем.

Изучим ограничение форм c_k на картановскую подалгебру. На картановской подалгебре выбирается базис $l_1^0, \ldots, l_n^0 \subset H$. Некоторые автоморфизмы вида $l \mapsto glg^{-1}$, где $g \in G$, сохраняют подпространство $H \subset \mathfrak{g}$; такие g составляют конечную группу, называемую *группой Вейля* группы G. Для $G=U(n)$ базис в H можно составить из диагональных матриц с единственным ненулевым элементом $(l_j^0)_{jj}=i$. Группа Вейля есть в этом случае группа S_n всех перестановок базиса l_j^0 (проверьте!). Рассмотрим базисные линейные формы t_j из $\mathfrak{g}^*$, полагая $t_j(l_k^0)=\delta_{jk}$. Тогда ограничения симметрических Ad-инвариантных форм ψ на картановскую подалгебру $H \subset \mathfrak{g}$ представляют собой симметрические полиномы от переменных $t_1, \ldots, t_n$. В качестве базисных симметрических полиномов можно взять следующие:

$$\psi_k^{(U)} = t_1^k + \ldots + t_n^k. \tag{54}$$

Классы $c_{\psi_k^{(U)}}$ совпадают с определенными выше классами c_k. Продолжение классов c_k с картановской подалгебры на всю алгебру Ли указано в формуле (46).

Пример 3. $G=SO(2n)$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из кососимметрических матриц. Картановская подалгебра $H \subset \mathfrak{g}$ порождается «инфинитезимальными вращениями» в плоскостях $\mathbb{R}_{12}$, $\mathbb{R}_{34}, \ldots, \mathbb{R}_{2n-1,2n}$, где номера снизу указывают пары базисных векторов в $\mathbb{R}^{2n}$. Таким образом, базис $l_1^0, \ldots, l_n^0$ таков:

$$l_j^0 = \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & -1 & 0 & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix},$$

причем единственная пара ненулевых элементов этой матрицы — это

$$(l_j^0)_{2j-1,2j} = 1, \quad (l_j^0)_{2j,2j-1} = -1.$$

Опять обозначим через t_j линейные формы в $\mathfrak{g}^*$:

$$(t_j, l_k^0) = \delta_{jk}.$$

Группа Вейля автоморфизмов $H \to H$ вида $l \mapsto glg^{-1}$, где $g \in G$, порождается следующими преобразованиями (проверьте):

а) перестановками векторов l_j;

б) одновременными переменами знака у пар форм t_i: $(t_j, t_k) \to (-t_j, -t_k)$.

На алгебре H имеем, следовательно, базисные полиномы, инвариантные относительно группы Вейля:

$$\begin{aligned} \psi_q^{(SO)} &= t_1^{2q} + \ldots + t_n^{2q}, \quad q < n, \\ \tilde{\psi}_n^{(SO)} &= t_1 \ldots t_n. \end{aligned} \tag{55}$$

Классы $c_{\psi_q^{(SO)}}$ суть в точности c_{2q}, а класс $c_{\tilde{\psi}_n^{(SO)}}$ совпадает с χ_n. Таким образом, указанные формы продолжены с картановской подалгебры на всю алгебру Ли.

Пример 4. $G = SO(2n+1)$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ по-прежнему состоит из кососимметрических матриц. Картановская подалгебра $H \subset \mathfrak{g}$ состоит из «инфинитезимальных вращений» в плоскостях $\mathbb{R}_{12}, \mathbb{R}_{34}, \ldots, \mathbb{R}_{2n-1,2n}$ и совпадает с картановской подалгеброй для подгруппы $SO(2n)$ группы $SO(2n+1)$ и даже для $U(n) \subset SO(2n)$, хотя группа Вейля увеличивается (собственно говоря, такой же картановской подалгеброй обладала коммутативная группа из примера 1, для которой $H = \mathfrak{g}$, а группа Вейля была тривиальной). Опять имеем базис $l_1^0, \ldots, l_n^0 \subset H$ и формы t_j, где $t_j(l_k^0) = \delta_{jk}$. Группа Вейля для $SO(2n+1)$ кроме элементов, уже имеющихся в $SO(2n)$, содержит еще возможность обращения направления одного плоского вращения (а не только пар, как в $SO(2n)$)

$$t_i \mapsto -t_i.$$

Поэтому среди нужных нам форм ψ имеется (мультипликативный) базис из элементарных полиномов вида

$$\psi_q^{(SO)} = t_1^{2q} + \ldots + t_n^{2q}. \tag{56}$$

Формы ψ_q задают классы

$$c_{\psi_q^{(SO)}} = c_{2q} \quad (G = SO(2n+1)). \tag{57}$$

Таким образом, и в этом примере все формы продолжаются с картановской подалгебры на всю алгебру Ли в качестве Ad-инвариантных форм.

5. Характеристические классы. Перечисление. Оказывается, что для групп $G = SO(n)$, $U(n)$ никаких других характеристических классов построить невозможно. Более точно, любая другая «естественная» или ковариантная конструкция, сопоставляющая расслоению и форме связности замкнутую форму в базе, интегралы от которой по циклам (замкнутым подмногообразиям базы) являются топологическими величинами (т. е. не меняются при изменении связности в том же расслоении), эквивалентна указанным выше классам c_i, χ_n или какому-либо полиному от них в алгебре дифференциальных форм. Эквивалентность (когомологичность) двух замкнутых форм a и b (таких, что $da = db = 0$) означает по определению, что форма $a - b$ является точной:

$$a = b + du.$$

В этом случае интегралы по любому циклу (по замкнутому ориентированному подмногообразию) P объемлющего многообразия от этих форм совпадают:

$$\int_P a = \int_P b.$$

Сейчас мы поясним термин «естественная или ковариантная конструкция». Мы определяли в § 24 понятие отображения расслоений с одинаковым слоем и одной и той же структурной группой G (отображение $\tilde{f}\colon E \to E'$, коммутирующее с проекцией, т. е. такое, что $fp = p'\tilde{f}$, где $f\colon M \to M'$ — отображение базы в базу, и индуцирующее на каждом слое диффеоморфизм из структурной группы G). Было определено понятие «индуцированного расслоения»: если задано расслоение $p'\colon E' \to M'$ и отображение $f\colon M \to M'$, то строятся расслоение $p\colon E \to M$ и отображение расслоений $\tilde{f}\colon E \to E'$. При этом говорилось (без доказательства), что любое расслоение с базой M (скажем, главное) индуцируется единственным с точностью до гомотопии отображением $M \to B_G$ в базу универсального главного расслоения $p_G\colon E_G \to B_G$, у которого пространство E_G стягиваемо. Универсальные или N-универсальные расслоения строились для групп $G = O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ и имели базы, являющиеся гладкими многообразиями для любых N:

$$\begin{aligned}
&B_G = \hat{G}_{N,n} && \text{для} && SO(n), && N \to \infty,\\
&B_G = G^{\mathbb{C}}_{N,N} && \text{для} && U(n), && N \to \infty,\\
&B_G = \mathbb{C}P^N && \text{для} && U(1) = SO(2), && N \to \infty,\\
&B_G = \mathbb{H}P^N && \text{для} && SU(2) = Sp(1), && N \to \infty.
\end{aligned}$$

Пусть задано отображение расслоений $\tilde{f}\colon E \to E'$ с отображением баз $f\colon M \to M'$, и пусть в расслоении E' задана форма связности ω'. Применяя к ω' отображение форм $\tilde{f}^*$, получаем форму $\omega = \tilde{f}^*\omega'$ на E, также являющуюся формой связности. Операторы d и H перестановочны с отображением форм $\tilde{f}^*$. Поэтому форма кривизны Ω_E также ковариантна:

$$\tilde{f}^*(\Omega'_E) = \Omega_E \quad (\Omega'_E = H d\omega', \ \Omega_E = H d\omega).$$

Все характеристические классы c_i, χ_n и общие классы (см. выше) строились естественно или ковариантно, так что имеет место равенство («функториальность»)

$$f^* c'_\psi = c_\psi, \tag{58}$$

где c'_ψ и c_ψ — характеристические классы расслоений E' и E, построенные по формам ω' и ω. При этом формы c'_ψ и c_ψ с точностью до добавления точных форм (вида du) не зависят от выбора связностей в расслоениях E' и E.

Мы назовем конструкцию замкнутой формы c в базе расслоения *топологическим характеристическим классом*, если она обладает следующими свойствами:

1. Эта конструкция определена в любых главных расслоениях с группой G (база — любое многообразие!).

2. При отображениях расслоений $\tilde{f}\colon E \to E'$ должно иметь место равенство (с точностью до форм вида du)

$$f^* c' = c + du.$$

Оказывается, топологических характеристических классов очень мало.

Для многообразия M определяются «группы когомологий» $H^q(M; \mathbb{R})$ следующим образом: элемент $a \in H^q(M; \mathbb{R})$ представляется вещественной замкнутой формой $\tilde{a}$ (т. е. $d\tilde{a} = 0$) с точностью до форм вида du (т. е. $\tilde{a}$ эквивалентно форме $\tilde{a} + du$). Прямая сумма $H^*(M; \mathbb{R}) = \sum\limits_q H^q(M; \mathbb{R})$ образует алгебру относительно внешнего перемножения замкнутых форм (см. подробнее [28]).

Имеет место

Теорема 3. *Каждый элемент c из когомологий $H^q(B_G; \mathbb{R})$ базы B_G универсального G-расслоения определяет топологический характеристический класс для всех G-расслоений и обратно.*

Доказательство. Если характеристический класс c задан как форма степени q в базах всех G-расслоений в смысле предыдущего определения, то элемент c в группе $H^q(B_G; \mathbb{R})$ — это просто характеристический класс универсального расслоения с базой B_G *). Обратно, пусть задан элемент (класс когомологий) $c \in H^q(B_G, \mathbb{R})$. Для любой базы M любое гладкое расслоение η с этой базой и группой G индуцировано единственным (с точностью до гомотопии) гладким отображением $f\colon M \to B_G$. Полагаем

$$c(\eta) = f^*(c).$$

Так как $df^* = f^* d$, то форма $c(\eta)$ замкнута и определяет элемент

*) Строго говоря, речь идет о базе N-универсального расслоения, которая является гладким многообразием.

из $H^q(M, \mathbb{R})$. Гомотопным отображениям f_1, f_2 отвечают эквивалентные формы $c_1(\eta)-c_2(\eta)=du$. Теорема доказана.

Информация о когомологиях пространства B_G. Пример 1. Группа G дискретна.

а) $G=\mathbb{Z}$, $B_G=S^1$, $H^1(B_G;\ \mathbb{R})=\mathbb{R}$, $H^q(B_G)=0$ при $q>1$.

б) $G=\mathbb{Z}_m$, m конечно; B_G — линзовое пространство,

$$H^q(B_G;\ \mathbb{R})=0 \text{ при всех } q.$$

Оказывается, для любой конечной группы G

$$H^q(B_G;\ \mathbb{R})=0 \text{ при } q>0.$$

в) $G=\mathbb{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}$ (n слагаемых); $B_G=T^n$ (тор), $H^*(B_G;\ \mathbb{R})$ — внешняя алгебра от n одномерных образующих.

г) $G=\pi_1(M_g^2)$; $B_G=M_g^2$ (поверхность рода g); $H^*(B_G;\ \mathbb{R})$ имеет одномерные образующие a_1, b_1, ..., a_g, b_g и соотношения $a_1\wedge b_1=\ldots=a_g\wedge b_g$ и $a_i\wedge b_j=0$ $(i\neq j)$, $a_k\wedge a_l=b_k\wedge b_l=0$.

д) G — свободная группа с p образующими; B_G — область на плоскости $\mathbb{R}^2$ с p выколотыми точками,

$$H^q(B_G;\ \mathbb{R})=0 \text{ при } q>1, \quad H^1(B_G;\ \mathbb{R})=\mathbb{R}^p.$$

Пример 2. Группа G абелева, $G=\mathbb{R}^k\times T^m$. Для группы $\mathbb{R}^k=G'$ имеем $B_{G'}$ — одна точка (или пространство, стягиваемое к точке). Для $G''=S^1=SO(2)=U(1)$ имеем $B_{G''}=\mathbb{C}P^\infty$. Для $G=\mathbb{R}^k\times T^m=\mathbb{R}^k\times S^1\times\ldots\times S^1$ пространство B_G имеет вид

$$B_G\sim\underbrace{B_{S^1}\times\ldots\times B_{S^1}}_{m}=\underbrace{\mathbb{C}P^\infty\times\ldots\times\mathbb{C}P^\infty}_{m}.$$

Алгебра когомологий $H^*(B_G;\ \mathbb{R})$ есть алгебра полиномов от m образующих $t_1, \ldots, t_m\in H^2(B_G;\ \mathbb{R})$.

Пример 3. $G=U(n)$; $H^*(B_G;\mathbb{R})$ есть алгебра полиномов от образующих $c_i\in H^{2i}(B_G;\ \mathbb{R})$, $i=1, \ldots, n$. Для $G=SU(n)$ алгебра $H^*(B_G;\ \mathbb{R})$ есть алгебра полиномов от образующих $c_2, c_3, \ldots, c_n$; $c_i\in H^{2i}(B_G;\ \mathbb{R})$.

Пример 4. $G=SO(2n)$; $H^*(B_G;\ \mathbb{R})$ — алгебра полиномов от образующих $c_{2i}\in H^{4i}(B_G;\ \mathbb{R})$, $i=1, \ldots, n-1$, и одной образующей $\chi_n\in H^{2n}(B_G;\ \mathbb{R})$.

Пример 5. $G=SO(2n+1)$; $H^*(B_G;\mathbb{R})$ есть алгебра полиномов от образующих $c_{2i}\in H^{4i}(B_G;\ \mathbb{R})$, $i=1, \ldots, n$.

Таким образом, все характеристические классы для основных групп G уже были построены выше.

Для некомпактных групп Ли топологические характеристические классы (как классы когомологий базы) сводятся к максимальной компактной подгруппе $K\subset G$. Без доказательства укажем такой факт. Базы B_K и B_G гомотопически эквивалентны и $H^*(B_K; \mathbb{R}) = H^*(B_G; \mathbb{R})$. Поэтому в силу теоремы 3 их топологические характеристические классы совпадают. Если группа Ли G полупроста, то у ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$ комплексификация $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ совпадает с комплексифицированной алгеброй Ли $\mathfrak{g}'_\mathbb{C}$ некоторой компактной группы G', именуемой *компактной вещественной формой* той же самой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}'_\mathbb{C} = \mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Поэтому построения характеристических классов по связности, например, указанными выше элементарными операциями над формой кривизны Ω для групп G и G' приводят к абсолютно одинаковым результатам. Мы получим для G (локально) точно те же замкнутые формы и функционалы от связности, имеющие тождественно нулевую вариационную производную по связности, что и для G'. Однако эти выражения будут часто «топологически тривиальны», т. е. будут давать точные формы вида du. Например, для $G = \mathbb{R}^k$ и $G' = T^k$ локально все одинаково, но для $G = \mathbb{R}^k$ все интегралы от характеристических классов по циклам тождественно равны нулю. Для $G = SO(p, q)$ все будет формально так же, как и для $G' = SO(p+q)$, но нетривиальные интегралы по циклам мы получим лишь сводящиеся к максимальной компактной подгруппе $SO(p) \times SO(q) \subset SO(p, q)$.

Если мы рассматриваем касательные расслоения псевдоримановых многообразий M типа (p, q), где $p + q = n = \dim M$, то мы можем построить те же самые характеристические классы как локальные выражения от метрики, что и для римановых многообразий (с положительной метрикой). При этом вариационные производные по метрике от интегралов этих форм по циклам (замкнутым ориентированным подмногообразиям) соответствующей размерности в M будут также нулевые. Однако топологически многие из этих классов будут тождественно нулевыми в том смысле, что интеграл по любому циклу есть тождественный нуль. В виде примера укажем, что алгебра Ли собственной группы Лоренца $SO(3, 1) = G$ комплексно эквивалентна алгебре Ли группы $SO(4) = G'$ или группы $\hat{G}' = SU(2) \times SU(2)$. Для $\hat{G}' = SU(2) \times SU(2)$ или $G' = SO(4)$ имеем два характеристических класса размерности 4:

$$c_2 \in H^4(B_{G'}; \mathbb{R}), \quad \chi_2 \in H^4(B_{G'}; \mathbb{R}).$$

Для $G = SO(3, 1)$, имеющей максимальную компактную подгруппу $SO(3) \subset SO(3, 1)$, имеем лишь один топологический характеристический класс

$$c_2 \in H^4(B_G; \mathbb{R})$$

(но по-прежнему два дифференциально-геометрических характеристических класса).

Использование метода универсальных расслоений позволяет также доказать важное свойство характеристических классов:

можно выбрать такой базис среди характеристических классов, что все интегралы от базисных характеристических классов по циклам (замкнутым ориентированным подмногообразиям базы любого G-расслоения) будут целыми числами.

Этот факт вытекает из того, что в универсальном расслоении с базой B_G в алгебре $H^*(B_G; \mathbb{R})$ можно выбрать полный базис элементов $d_1, \ldots, d_q$ (характеристических классов универсального расслоения), что их интегралы по циклам в B_G целочисленны.

Пусть M — база любого G-расслоения, P — замкнутое ориентированное q-мерное многообразие и φ: $P \to M$ — гладкое отображение (как говорят, «сингулярный цикл» (P, φ)). Расслоение над M индуцировано универсальным расслоением посредством отображения f: $M \to B_G$ из универсального. Имеем цикл размерности q в B_G:

$$(P,\ f\varphi),\quad f\varphi\colon\ P \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{f} B_G,$$

и форму $d'_s = f^*(d_s)$ — характеристический класс в базе M. Далее, для d'_s имеем: интеграл по циклу (P, φ) в многообразии M равен

$$\int\limits_{(P,\varphi)} d'_s = \int\limits_{P} \varphi^*(d'_s) = \int\limits_{(P,\varphi)} f^*(d_s) = \int\limits_{M} \varphi^* f^*(d_s) = \int\limits_{(P,f\varphi)} d_s$$

— целое число для цикла $(P, f\varphi)$ в B_G.

Пример 6. Рассмотрим группы $G = \mathbb{R}^1$ и $G' = SO(2) = U(1)$. Форма кривизны расслоения в обоих случаях есть скалярная 2-форма $\Omega = \Omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$. Поставим вопрос: в каком случае замкнутая 2-форма является формой кривизны некоторого G-расслоения или G'-расслоения? На языке физики это означает возможность глобально ввести вектор-потенциал, необходимый при квантовании. Ответ будет различным для G и G'. Необходимые и достаточные условия таковы (достаточность мы оставляем без доказательства):

1. Для группы $G = \mathbb{R}^1$ необходимо и достаточно, чтобы для любого 2-мерного цикла P в базе M мы имели $\int\limits_P \Omega = 0$; равносильное требование: $\Omega = dA$ для некоторой 1-формы A всюду в базе M.

2. Для группы $G' = SO(2) = U(1)$ необходимо и достаточно, чтобы набор интегралов по всем 2-циклам P в базе M был целочислен при соответствующей нормировке формы Ω: $\int\limits_P \Omega$ — целое число; вектор-потенциал A будет глобально над M задан в виде формы в расслоении E.

Физически форма Ω может представлять собой напряженность электромагнитного поля $F_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu}$, где $d(F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu) = 0$ в силу уравнений Максвелла. Форма $\Omega = F$ задана в области U пространства Минковского $\mathbb{R}^4$ (т. е. $\mathbb{R}^4_{3,1}$). Если в реальной физике электродинамика «компактна» (т. е. группа есть $SO(2)$, а не $\mathbb{R}^1$), то, как указал Дирак, возможны «магнитные монополи». В стационарной задаче имеем, например, область $U \subset \mathbb{R}^3$, где $U = \mathbb{R}^3 \setminus x_0$ (пусть $x_0 = 0$). Форма $\Omega = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ (μ, $\nu = 1, 2, 3$) есть напряженность магнитного поля в области U, причем поле имеет особенность в точке 0. Рассмотрим сферу $S^2_\rho \subset U$, заданную в виде $\sum\limits_{\mu=1}^{3} (x^\mu - x_0^\mu)^2 = \rho^2 > 0$. Для поля мы обязаны иметь

$$\int\limits_{S^2} \Omega = n \quad \text{(целое число)}.$$

Таким образом, поток магнитного поля через поверхность без противоречия с возможностью ввести вектор-потенциал (и квантовать поля в соответствии с общими принципами квантовой теории калибровочных полей) может быть целочисленным, но не обязательно нулевым. Магнитных монополей может быть несколько в точках $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^3$. Тогда будет набор независимых циклов в области $\mathbb{R}^3 \setminus (x_0 \cup \ldots \cup x_k)$.

Пример 7. Рассмотрим расслоения над сферой S^k с различными группами G, определяемые элементом группы $\pi_{k-1}(G)$ (см. § 24, п. 4).

а) $k = 1$, $G = O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$. Ввиду связности групп SO, U все расслоения над S^1 тривиальны. Имеется лишь нетривиальное расслоение с группой $G = O(n)$, поскольку $\pi_0(G) = \mathbb{Z}_2$. Связность в расслоениях с одномерной базой встретится нам позднее в однородных моделях общей теории относительности (база $\mathbb{R}^1$), но теория кривизны здесь отсутствует.

б) $k = 2$. Для $G = SO(2)$ мы имеем набор расслоений, определяемых целым числом $m \in \pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$. Это — расслоение Хопфа η (со слоем $\mathbb{C}^1$) и его тензорные степени η^m (см. § 24, п. 5). Число m может быть определено так:

$$m = \int\limits_{S^2} \Omega,$$

где Ω — форма кривизны. Иначе: реализуем расслоение над S^2 как прямое произведение над $\mathbb{C}^1 = S^2 \setminus \infty$ со связностью $A = A_\mu dx^\mu = A_z dz + A_{\bar z} d\bar z$ и потребуем, чтобы при $|x| \to \infty$

$$A_\mu \to \frac{\partial g(x)}{\partial x^\mu} g^{-1}$$

(т. е. связность стремится к тривиальной при $|x| \to \infty$). Для $G = SO(2) = U(1)$ имеем $g = e^{i\varphi}$, $\frac{\partial g}{\partial x^\mu} g^{-1} = i \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}$. Функция $\varphi(x)$

может быть определена только при $|x| \to \infty$ асимптотически; она определена на множестве лучей $\frac{x}{|x|}$, образующих окружность S^1:

$$S^1 \to S^1,$$
$$x \mapsto e^{i\varphi(x)} \quad (|x| \text{ велико}).$$

Степень этого отображения есть число n.

в) $n=3$; так как $\pi_2(G)=0$ для всех групп Ли G, которые нам встречались (и для всех вообще), то все расслоения над S^3 топологически тривиальны. Любая связность нулевой кривизны представляется в виде

$$A_\mu = \frac{\partial g(x)}{\partial x^\mu} g^{-1}(x).$$

Получаем отображение

$$g(x)\colon S^3 \to G.$$

Гомотопический класс этого отображения есть элемент группы $\pi_3(G)$, который характеризует гомотопический класс связности A нулевой кривизны. Напоминаем: $\pi_3(SO(2))=0$, $\pi_3(SO(3))= =\pi_3(SU(2))=\pi_3(SU(n))=\pi_3(SO(m))=\mathbb{Z}$ при $m \geqslant 5$, $n \geqslant 3$, $m \neq 4$, $\pi_3(SO(4))=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.

г) $n=4$. Здесь мы имеем много разных расслоений над S^4 и большое количество топологических инвариантов. Особенно интересны случаи $G=SU(2)$, $G=SO(4)$. Так как $S^4\setminus\infty=\mathbb{R}^4$, то расслоения над S^4 можно задавать связностями A_μ над $\mathbb{R}^4$, где расслоение тривиально, с граничным условием

$$A_\mu(x) \to \frac{\partial g(x)}{\partial x^\mu} g^{-1}(x) \text{ при } |x| \to \infty.$$

Функция $g(x)$ задает отображение сферы S^3 лучей $\frac{x}{|x|}$ в G:

$$g\colon S^3 \to G.$$

Топологический инвариант расслоения есть гомотопический класс этого отображения — элемент из $\pi_3(G)$. Мы имеем два характеристических класса (два целых числа) для $G=SO(4)$ и только одно число для $G=SU(2)$ или $G=SO(3)$:

$$c_2 = \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{Sp}(F_{\mu\nu}F_{\lambda\varkappa})\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\varkappa;$$

$$\chi_2 = \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{Sp}(F_{\mu\nu} * F_{\lambda\varkappa})\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\varkappa, \tag{59}$$

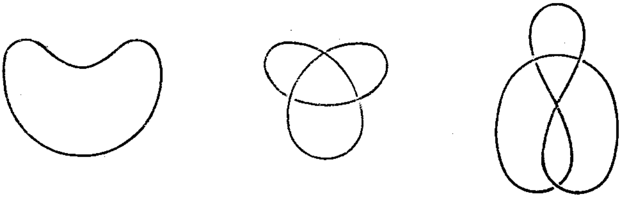
где $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} + [A_\mu, A_\nu]$.

Задача. Показать, что для $G = SO(4)$ при $\chi_2 = 1$ и любом c_2 пространство E расслоения над S^4 со слоем S^3 гомотопически эквивалентно сфере S^7 (это — главное расслоение для $G = SU(2)$ и ассоциированное с главным для $G = SO(4)$).

Замечание. Как показал Милнор, пространства E некоторых из этих расслоений $E(c_2, \chi_2 = 1)$ гомеоморфны, но не диффеоморфны сфере S^7.

§ 26. Узлы и зацепления. Косы

1. Группа узла. Важным применением фундаментальной группы является теория узлов и зацеплений в трехмерном пространстве. Рассмотрим замкнутую гладкую кривую γ в $\mathbb{R}^3$, $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, которая не пересекает сама себя и имеет ненулевой вектор скорости $\dot{\gamma}$. Эта кривая может быть *заузлена* в $\mathbb{R}^3$ (рис. 138).



Незаузлена а | *Простейший узел («трилистник»)* б | *«Восьмерка»* в

Рис. 138

Под *изотопией* узла мы будем понимать движение узла по пространству, получаемое в результате деформации тождественного отображения пространства на себя (в классе диффеоморфизмов)*). Узел γ называется нетривиальным, если изотопией нельзя его привести к тривиальному узлу $\tilde{\gamma}$: $\{z = 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$. Нам будет удобно считать, что узел γ лежит в $S^3 \supset \mathbb{R}^3$. Добавление точки ∞ к $\mathbb{R}^3$ ничего не меняет в узлах и их изотопиях (эти изотопии заметают двумерные поверхности в S^3 и без ограничения общности можно считать их не задевающими одну точку). Рассмотрим ε-окрестность U_ε узла γ при малом $\varepsilon > 0$. Граница ∂U_ε есть тор T^2, и $U_\varepsilon = D^2_\varepsilon \times S^1$, где D^2_ε — нормальный диск к γ радиуса ε. Выбросим из S^3 внутренность области U_ε. Останется многообразие с краем $V_\gamma \subset S^3$, и край $\partial V_\gamma = \partial U_\varepsilon$ — это тор T^2.

*) Обычно изотопией узла называют деформацию вложения окружности в пространство (в классе гладких вложений). Однако вслед за тем доказывают, что такая деформация окружности продолжается до деформации отображения всего пространства.