

Задача. Показать, что для $G = SO(4)$ при $\chi_2 = 1$ и любом c_2 пространство E расслоения над S^4 со слоем S^3 гомотопически эквивалентно сфере S^7 (это — главное расслоение для $G = SU(2)$ и ассоциированное с главным для $G = SO(4)$).

Замечание. Как показал Милнор, пространства E некоторых из этих расслоений $E(c_2, \chi_2 = 1)$ гомеоморфны, но не диффеоморфны сфере S^7 .

§ 26. Узлы и зацепления. Косы

1. Группа узла. Важным применением фундаментальной группы является теория узлов и зацеплений в трехмерном пространстве. Рассмотрим замкнутую гладкую кривую γ в \mathbb{R}^3 , $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, которая не пересекает сама себя и имеет ненулевой вектор скорости $\dot{\gamma}$. Эта кривая может быть *заузлена* в \mathbb{R}^3 (рис. 138).



Рис. 138

Под *изотопией* узла мы будем понимать движение узла по пространству, получаемое в результате деформации тождественного отображения пространства на себя (в классе диффеоморфизмов*). Узел γ называется *нетривиальным*, если изотопией нельзя его привести к тривиальному узлу $\tilde{\gamma}: \{z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$. Нам будет удобно считать, что узел γ лежит в $S^3 \supset \mathbb{R}^3$. Добавление точек ∞ к \mathbb{R}^3 ничего не меняет в узлах и их изотопиях (эти изотопии заматают двумерные поверхности в S^3 и без ограничения общности можно считать их не задевающими одну точку). Рассмотрим ε -окрестность U_ε узла γ при малом $\varepsilon > 0$. Граница ∂U_ε есть тор T^2 , и $U_\varepsilon = D_\varepsilon^2 \times S^1$, где D_ε^2 — нормальный диск к γ радиуса ε . Выбросим из S^3 внутренность области U_ε . Останется многообразие с краем $V_1 \subset S^3$, и край $\partial V_1 = \partial U_\varepsilon$ — это тор T^2 .

*) Обычно изотопией узла называют деформацию вложения окружности в пространство (в классе гладких вложений). Однако вслед за тем доказывают, что такая деформация окружности продолжается до деформации отображения всего пространства.

Очевидно, что V_γ гомотопически эквивалентно открытой области $S^3 \setminus \gamma = W_\gamma$.

Определение 1. Фундаментальная группа $\pi_1(W_\gamma) = \pi_1(V_\gamma)$ называется *группой узла* γ .

Очевидные свойства группы узла $\pi_1(W_\gamma) = \pi_1(V_\gamma)$: 1) если узел γ тривиален, то $\pi_1(W_\gamma) = \mathbb{Z}$; это следует из того, что область $V_\gamma \subset S^3$ или $W_\gamma \subset S^3$ для $\gamma = \{z=0, x^2 + y^2 = 1\}$ стягивается

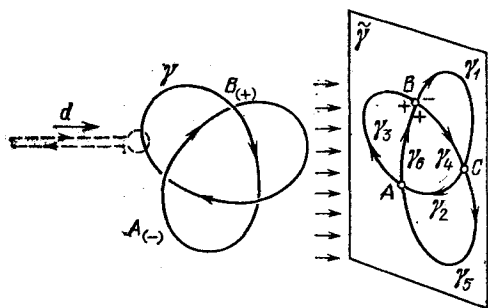


Рис. 139

к окружности S^1 (см. § 16); 2) по определению областей V_γ и W_γ группа $\pi_1(V_\gamma) = \pi_1(W_\gamma)$ (и сама топология этих областей с точностью до диффеоморфизма) не меняется при изотопии узла. Таким образом, равенство $\pi_1(W_\gamma) = \mathbb{Z}$ является необходимым условием тривиальности узла. (Заметим, что достаточность этого условия также имеет место и является трудной теоремой.)

Алгоритм вычисления группы $\pi_1(W_\gamma)$ таков: спроектируем узел вдоль направления d на плоскость \mathbb{R}^2 (рис. 139) — «экран». Для направления d общего положения можем считать, что все самопересечения проекции $\tilde{\gamma}$ на экране \mathbb{R}^2 двойные и под ненулевыми углами. Для кривой $\tilde{\gamma}$ на экране нужно указать только (кроме направления), какая из двух ветвей «выше» (+), а какая «ниже» (−) в точке пересечения. На экране возникает плоский граф с набором ребер и вершин, в которых сходятся 4 ребра. Начальную точку для вычисления $\pi_1(W_\gamma)$ поместим в $\infty \in S^3$. Базисные пути из π_1 будут подходить к узлу по направлению d (слева на рис. 139) перпендикулярно к экрану \mathbb{R}^2 . Занумеруем ребра и сопоставим каждому ребру γ_j на экране \mathbb{R}^2 по одной образующей $a_j \in \pi_1(W_\gamma)$ (например, на рис. 139 имеем на экране вершины A, B, C и ребра $[B_{(-)}C_{(+)}] = \gamma_1, [C_{(+)}A_{(-)}] = \gamma_2, [A_{(-)}B_{(+)}] = \gamma_3, [B_{(+)}C_{(-)}] = \gamma_4, [C_{(-)}A_{(+)}] = \gamma_5, [A_{(+)}B_{(-)}] = \gamma_6$, указанные в порядке прохождения кривой γ). Пусть путь a_j идет из ∞ по направлению d до средней точки соответствующего ребра с номером j , обходит его и возвращается назад — см. путь a_3 для ребра $[A_{(-)}B_{(+)}] = \gamma_3$ на рис. 139. Мы имеем образующие a_j из $\pi_1(W_\gamma)$.

Соотношения получаются так: в каждой вершине сходятся четыре ребра $\gamma_{j_1}, \gamma_{j_2}, \gamma_{j_3}, \gamma_{j_4}$. Согласно принятой нами нумерации в порядке прохождения кривой γ имеем в вершине $j_2 = j_1 + 1, j_4 = j_3 + 1$, где пары (j_1, j_2) и (j_3, j_4) составлены из номеров

смежных ребер. Пусть пара ребер (j_1, j_2) «выше», чем (j_3, j_4) , т. е. эта ветвь кривой γ лежит левее по направлению d (см. рис. 139). Тогда

$$a_{j_1} = a_{j_2} = a_{j_1+1}. \tag{1}$$

Проверьте, что для второй пары $(j_3, j_4 = j_3 + 1)$

$$a_{j_4} = a_{j_3+1} = a_{j_1}^{-1} a_{j_3} a_{j_1}. \tag{2}$$

Задача. Покажите, что набор соотношений (1), (2) для каждой вершины порождает все соотношения в группе узла *).

Пример. Для трилистника

$$a = a_3 = a_4, \quad a_1 = a_3^{-1} a_6 a_3 \quad (\text{вершина } B),$$

$$b = a_1 = a_2, \quad a_5 = a_1^{-1} a_4 a_1 \quad (\text{вершина } C),$$

$$c = a_5 = a_6, \quad c = b^{-1} a b, \quad a = c^{-1} b c \quad (\text{вершина } A),$$

$$\text{или } b = a^{-1} c a, \quad c = b^{-1} a b, \quad a = c^{-1} b c.$$

Из соотношения (2) видно, что коммутированная группа $H_1(W_1)$ всегда есть \mathbb{Z} .

Задача. Покажите, что в группе трилистника можно выбрать образующие α, β , связанные единственным соотношением $\alpha^2 = \beta^3$.

2. Полином Александра. Группа узла оказывается иногда довольно сложной. Определяется *полином Александра* (фактически, по группе узла), который является более грубым инвариантом, но позволяет различать узлы проце. Пусть группа узла задана стандартными образующими a_1, \dots, a_n (см. выше) и соотношениями $r_i(a_1, \dots, a_n) = 1$ ($i = 1, \dots, m$) вида (1), (2). Определим «операторы дифференцирования» $\frac{\partial}{\partial a_i}$ элементов группы, потребовав, чтобы произведения дифференцировались по следующему правилу:

$$\frac{\partial}{\partial a_i}(bc) = \frac{\partial b}{\partial a_i} + b \frac{\partial c}{\partial a_i},$$

причем $\frac{\partial a_i}{\partial a_j} = \delta_{ij}$. Заметим, что производная любого элемента есть линейная комбинация элементов группы с целыми коэффициентами (т. е. элемент так называемого группового кольца группы узла).

Построим $n \times m$ -матрицу $\left(\frac{\partial r_i}{\partial a_j}\right)$. Заменим в ней степени образующих a_j на степени формальной переменной t по правилу

*) Следует иметь в виду, что образующие a_j определены с точностью до замены $a_j \rightarrow a_j^{-1}$. Вид соотношений (2) при этом меняется незначительно.

$a_j^k \rightarrow t^k$. Получим $n \times m$ -матрицу, элементы которой являются многочленами от t и t^{-1} . Наибольший общий делитель $\Delta(t)$ всех миноров $(n-1)$ -го порядка этой матрицы и называется полиномом Александра. Этот полином определен с точностью до умножения на $\pm t^k$, k — любое целое число.

Задачи. 1. Доказать, что если группы двух узлов изоморфны, то соответствующие полиномы Александра $\Delta(t)$, $\Delta'(t)$ или совпадают, или связаны соотношением $\Delta'(t) = \Delta(t^{-1})$ (с точностью до умножения на $\pm t^k$, k — любое целое число).

2. Доказать, что для трилистника полином Александра имеет вид $\Delta(t) = 1 - t + t^2$.

3. Вычислить полином Александра для узла, изображенного на рис. 138, а, и показать, что этот узел не эквивалентен трилистнику.

3. Расслоение, связанное с узлом. Как мы уже видели, $H_1(W_\gamma) = \mathbb{Z}$. Поэтому вложение $\partial V_\gamma = T^2 \rightarrow V_\gamma \sim W_\gamma$ порождает гомоморфизм

$$H_1(\partial V_\gamma) = H_1(T^2) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} = H_1(W_\gamma).$$

Вследствие этого одна образующая $\bar{\gamma}$ на торе $T^2 = \partial V_\gamma$ гомологична нулю в дополнении V_γ к узлу γ . Эта образующая $\bar{\gamma}$ может представляться как конец нормального векторного поля (длины $\varepsilon > 0$) на кривой γ . Рассмотрим гладкое отображение $\varphi: T^2 \rightarrow S^1$, при котором $\varphi^{-1}(s_0) = \bar{\gamma} \subset T^2$, и s_0 — правильная точка для φ . Пусть отображение φ имеет степень 1 на другой образующей тора. Продолжим, если это возможно, отображение φ на все дополнение V_γ к узлу γ . Получим отображение

$$\tilde{\varphi}: V_\gamma \rightarrow S^1, \quad \tilde{\varphi}|_{\partial V_\gamma} = \varphi.$$

Полный прообраз $\tilde{\varphi}^{-1}(s_0)$ правильной точки s_0 есть двумерная поверхность P с границей $\partial P = \bar{\gamma}$ на торе T^2 . Сужая окрестность, видим, что сам узел γ ограничивает поверхность P в \mathbb{R}^3 (или S^3).

Задача. Докажите, что продолжение $\tilde{\varphi}$ отображения $\varphi: T^2 \rightarrow S^1$ возможно. При доказательстве используйте следующие факты: кривая $\bar{\gamma}$ гомологична нулю в $H_1(V_\gamma) = \mathbb{Z}$; $\pi_1(S^1) = 0$ при $i > 1$. Разбейте V_γ на клетки и продолжайте отображение сначала на одномерный остов (это тривиально), затем с одномерного на двумерный (это требует анализа) и затем на трехмерный с двумерного (используйте здесь равенство $\pi_2(S^1) = 0$).

Определение 2. Минимальный род гладкой несамопересекающейся поверхности P с границей γ в \mathbb{R}^3 (или S^3) называется *родом узла γ* .

В ряде простейших примеров узлов дополнительное пространство V_γ с границей $\partial V_\gamma = T^2$ оказывается расслоением над окружностью

$$p: V_\gamma \rightarrow S^1,$$

причем на границе T^2 это расслоение превращается в тривиальное расслоение $\varphi: T^2 \rightarrow S^1$ со слоем S^1 — малой окружностью в нормальной плоскости к узлу, зацепленной с узлом. Топологически можно представлять себе картину так: задано гладкое расслоение $p: V \rightarrow S^1$ над окружностью со слоем P — поверхностью рода $g \geq 0$ с границей S^1 (рис. 140); на границе это расслоение тривиально: $\partial V = T^2 = S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$. Рассмотрим заполненный тор $D^2 \times S^1$ с той же границей $\partial(D^2 \times S^1) = S^1 \times S^1 = T^2$. Склейка многообразий V и $(D^2 \times S^1)$ по общей границе $\partial V = \partial D^2 \times S^1$ дает замкнутое трехмерное многообразие M . Если $M = S^3$, то $V = V_\gamma$ есть дополнение к узлу γ , лежащему в области $D^2 \times S^1$ как кривая $0 \times S^1$.

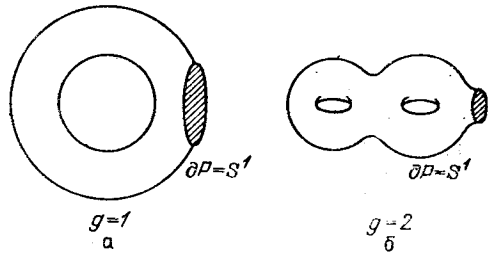


Рис. 140

Простейшие примеры:

- а) Если $g = 0$ и $V = S^1 \times D^2$, $P = D^2$, то кривая γ незаузлена.
- б) Пусть $g = 1$ (см. рис. 140, а). Многообразие V получается из прямого произведения поверхности P на отрезок $I = [0, 1]$ склейкой $(x, 0) = (h(x), 1)$ верхнего и нижнего оснований. Предположим, что склеивающее отображение $h: P \rightarrow P$ таково, что на группе $H_1(P \cup D^2) = H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ индуцируется преобразование $a \rightarrow ma + nb$, $b \rightarrow la + kb$, $mk - nl = 1$ ($a, b \in H_1(T^2)$ — образующие). На границе будем иметь прямое произведение $\partial V = S^1 \times S^1$.

Задача. Вычислите группу $\pi_1(V)$ и $\pi_1(V \cup (D^2 \times S^1))$. Подберите склейку так, чтобы получилась сфера S^3 с узлом $\gamma \subset S^3$. Получите этим способом трилистник при $m = 2, n = 3$.

Рассмотрим интересный пример: пусть задан многочлен в \mathbb{C}^2 : $f(z, w) = z^m + w^n$, где m и n взаимно просты. Рассмотрим сферу $S^3_\delta = \{|z|^2 + |w|^2 = \delta > 0\}$. Пара уравнений

$$\begin{aligned} z^m + w^n &= 0, \\ |z|^2 + |w|^2 &= \delta > 0 \end{aligned} \tag{3}$$

задает кривую $\gamma \subset S^3_\delta$.

Задача. Докажите, что для взаимно простых m, n кривая (3) связна (узел).

Рассмотрим дополнение к узлу $\gamma \subset S^3_\delta$, обозначаемое через W_γ . Построим расслоение

$$p: S^3_\delta \setminus \gamma \xrightarrow{p} S^1$$

следующим образом:

$$p(z, w) = \frac{f(z, w)}{|f(z, w)|}, \quad f(z, w) \neq 0. \quad (4)$$

Задачи. 1. Покажите, что отображение (4) имеет всюду ранг 1 и является расслоением с базой S^1 . Вычислите род слоя.

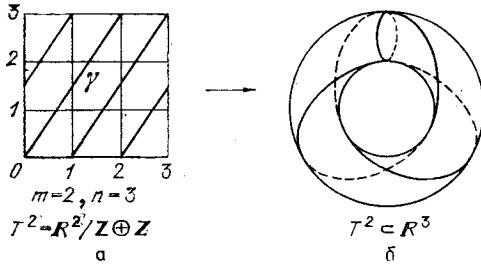


Рис. 141

2. Докажите, что формулы (3) задают «торические узлы» $\gamma \subset T^2 \subset S^3_0$, где узел γ есть несамопересекающаяся кривая на торе T^2 (рис. 141), определяющая в гомологиях $H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ элемент $\gamma = ma + nb$.

3. Покажите, что узел на рис. 138, в не является торическим.

4. Зацепления. Перейдем теперь к зацеплениям в \mathbb{R}^3 и в S^3 . Пусть задан набор окружностей $\gamma_1, \dots, \gamma_k \subset S^3$, не пересекающихся попарно, несамопересекающихся и имеющих ненулевые касательные векторы. Тривиальное зацепление показано на рис. 142, а, нетривиальное — на рис. 142, б.

Естественным инвариантом зацепления $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ является группа зацепления — фундаментальная группа $\pi_1(S^3 \setminus (\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k))$.

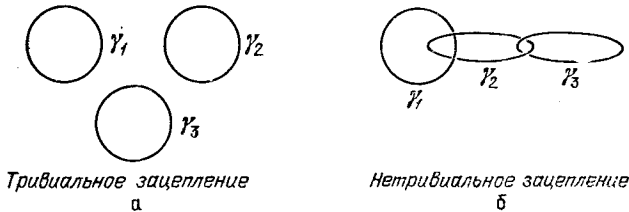


Рис. 142

Задача. Вычислите группу зацепления для случаев а, б, в, изображенных на рис. 143 ($k = 2$).

Мы знаем инвариант зацепления — матрицу коэффициентов зацепления $\{\gamma_i, \gamma_j\}$, $i \neq j$ (см. § 15). Однако даже при $k = 2$ это — неполный инвариант. На рис. 143, в показан пример, где $k = 2$, $\{\gamma_1, \gamma_2\} = 0$, обе кривые индивидуально незаузлены, но «расцепить» их нельзя. Это показывает группа зацепления.

Алгоритм вычисления группы зацепления тот же самый, что и для узла: надо спроектировать зацепление на «экран» и указать образующие и соотношения, как и выше для узлов. Инте-

решные примеры зацеплений дают уравнения (f — многочлен):

$$f(z, w) = 0, \quad |z|^2 + |w|^2 = \delta > 0. \quad (5)$$

Задачи. 1. Пусть $f(z, w) = z^m + w^n$. Найдите число компонент зацепления.

2. Докажите, что как и для узлов, отображение $S^3 \setminus (\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n) \rightarrow S^1$, определяемое формулой (4), является расслоением.

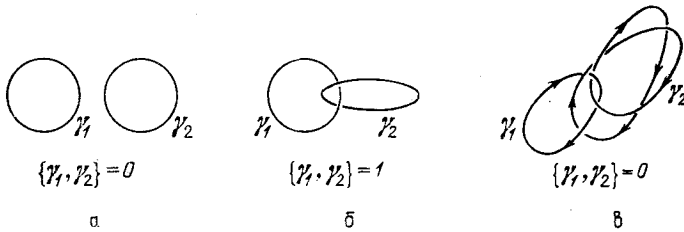


Рис. 143

Вычислите род слоя. Найдите группу зацепления в этом случае.

Рассмотрите случаи:

а) $f(z, w) = z^3 + w^6$;

б) $f(z, w) = z^2 w + w^4$.

5. **Косы.** Рассмотрим теперь группу кос. Зафиксируем на плоскости \mathbb{R}^2 набор из n точек P_1, \dots, P_n и рассмотрим произведение $\mathbb{R}^2 \times I$, где $I = [0, 1]$.

Определение 3. *Косой* называется набор гладких кривых $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ в $\mathbb{R}^2 \times I$, несамопересекающихся, не пересекающихся попарно, имеющих ненулевые касательные векторы $\dot{\gamma}_j \neq 0$, трансверсальные к слоям $\mathbb{R}^2 \times t$ для всех t . При $t = 0, 1$ мы должны иметь

$$\gamma_j(0) = (P_j, 0), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\gamma_j(1) = (P_{\sigma(j)}, 1), \quad j = 1, \dots, n,$$

где σ — перестановка индексов $1, \dots, n$ (рис. 144).

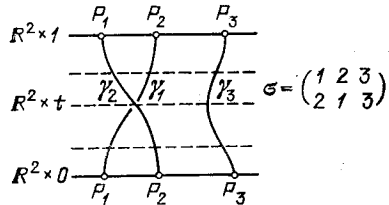


Рис. 144

Коса называется *крашеной*, если σ есть тождественная перестановка, $\sigma(j) = j$. Классы эквивалентности кос относительно изотопии образуют группу: произведение кос $K_1 K_2$ получается при стягивании нижнего основания косы K_1 к верхнему основанию косы K_2 (рис. 145, б).

Обратная коса — это та же коса, но идущая в обратную сторону по t .

Единичная коса имеет вид, показанный на рис. 145, а. Имеется гомоморфизм группы кос в группу перестановок:

$$K \rightarrow \sigma(K).$$

Ядром этого гомоморфизма (косы K , для которых $\sigma(K) = 1$) и являются крашенные косы.

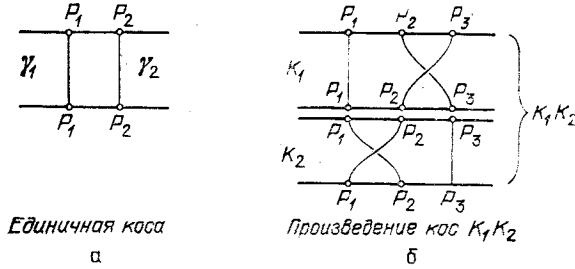


Рис. 145

Набор образующих σ_i ($i = 1, \dots, n - 1$) в группе кос соответствует элементарным транспозициям $\sigma_i = \begin{pmatrix} \dots & i & i+1 & \dots \\ \dots & i+1 & i & \dots \end{pmatrix}$ в группе перестановок S_n (рис. 146). Соотношения таковы (проверьте):

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \tag{6}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ при } |i - j| > 1.$$

Задача. Докажите, что σ_i — образующие, а (6) — полный набор соотношений.

Представляют интерес *замкнутые косы*, описываемые так. Рассмотрим заполненный тор $D^2 \times S^1 \subset \mathbb{R}^3$ и рассмотрим узлы и зацепления — наборы из нескольких несамопересекающихся и непересекающихся попарно замкнутых кривых в области $D^2 \times S^1$:

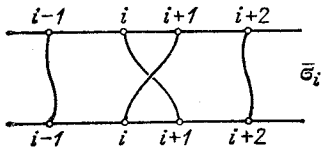


Рис. 146

$$\{\gamma_1, \dots, \gamma_q\} \subset D^2 \times S^1 \subset \mathbb{R}^3.$$

Потребуем, чтобы касательные векторы всех кривых $\gamma_1, \dots, \gamma_q$ были ненулевыми и не касались направлений дисков $D^2 \times (s)$, $0 \leq s \leq 2\pi$. Рассмотрим эти «трансверсальные» узлы и зацепления в области $D^2 \times S^1$.

Задача. Докажите, что каждый узел или зацепление указанного вида определяет класс сопряженных элементов в одной из групп кос. Покажите, что классы трансверсальной изотопии

в области $D^2 \times S^1$ таких узлов и зацеплений точно соответствуют классам сопряженности в группах кос.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что любой узел или зацепление в \mathbb{R}^3 изотопией приводится к трансверсальному узлу или зацеплению в области $D^2 \times S^1$. Однако это не помогает классификации узлов и зацеплений в \mathbb{R}^3 , так как один узел, например, может приводиться к многим замкнутым косам.

Группа кос имеет другую интересную интерпретацию. Рассмотрим множество U_n всех комплексных многочленов степени n (со старшим коэффициентом 1)

$$f = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n,$$

корни которых z_1, \dots, z_n все различны.

З а д а ч а. Докажите, что группа $\pi_1(U_n)$ совпадает с группой кос.

Рассмотрим пространство V_n , где

$$V_n = \underbrace{\mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2}_n \setminus \Delta,$$

Δ состоит из наборов (z_1, \dots, z_n) , где $z_i = z_j$ для какой-нибудь пары (i, j) .

З а д а ч и. 1. Докажите, что группа $\pi_1(V_n)$ изоморфна группе крашенных кос.

2. Докажите, что пространство V_n/S_n имеет группу $\pi_1(V_n/S_n)$, изоморфную полной группе кос. Здесь S_n — группа перестановок из элементов, действующая на V_n перестановкой координат

$$(z_1, \dots, z_n) \xrightarrow{\sigma} (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)}).$$