Глава 7

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И СЛОЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ

§ 27. Простейшие понятия качественной теории динамических систем. Двумерные многообразия

1. Основные определения. Определение 1. *Динамической системой* (или, как говорят, *автономной динамической системой*) называется гладкое векторное поле ξ на многообразии M.

Локально динамическая система записывается в виде

$$\dot{x}^\alpha = \xi^\alpha(x^1, \ldots, x^n). \tag{1}$$

Интегральные траектории — это решения уравнения (1) или кривые $\gamma(t) = \{x^\alpha(t)\}$, вектор скорости которых $\dot{\gamma}$ в каждый момент времени t совпадает с $\xi(\gamma(t))$. Интегральная траектория всегда существует локально, на конечном отрезке времени, согласно теореме существования. Для гладких полей ξ интегральная траектория единственна. На некомпактных (открытых) многообразиях возможна ситуация, что за конечное время траектория $\gamma(t)$ «уходит в бесконечность», и поэтому траектория существует только на конечных интервалах значений t.

На (компактных) замкнутых многообразиях каждая траектория неограниченно продолжаема по t и существует для всех значений времени $-\infty < t < \infty$. Векторное поле ξ определяет оператор дифференцирования функций по направлению ξ (см. § 23 части I)

$$f \to \partial_\xi f(x) = \xi^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}.$$

Экспонента от оператора

$$\widehat{S}_t = \exp(t\partial_\xi) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} t^k (\partial_\xi)^k \tag{2}$$

определяет сдвиг функций вдоль интегральных траекторий поля ξ:

$$\widehat{S}_t(f) = f(S_t(x)), \tag{3}$$

где $S_t(x) = \gamma(t)$, $\dot{\gamma} = \xi$ и $\gamma(0) = x$. Напомним, что коммутатором полей ξ, η на M называется поле $[\xi, \eta]$, локально определяемое формулой (см. часть I)

$$[\xi, \eta]^\alpha = \xi^\nu \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^\nu} - \eta^\nu \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu},$$

или

$$\partial_{[\xi, \eta]} = [\partial_\xi, \partial_\eta]. \tag{4}$$

Введем некоторые общие понятия.

Определение 2. 1) *Предельным множеством* $\omega^\pm(\gamma)$ интегральной траектории $\gamma(t)$ называется совокупность всех предельных точек последовательностей $\gamma(t_i)$, где $t_i \to \pm\infty$. Объединение $\omega^+(\gamma) \cup \omega^-(\gamma)$ называется *ω-предельным* для γ и обозначается через $\omega(\gamma)$.

2) Инвариантным ($\pm$) множеством (многообразием) динамической системы (1) называется такое подмножество (подмногообразие) $N \subset M$, что для любой точки $x \in N$ траектория $\gamma(t)$ лежит в N для $t \geqslant 0$ ($t \leqslant 0$), если $\gamma(0) = x$ (или $S_t(x) \subset N$ для $t \geqslant 0(+)$ и $t \leqslant 0(-)$).

Особо интересен случай, когда множество N инвариантно и для $t \geqslant 0$ и для $t \leqslant 0$, это — *инвариантные* множества или подмногообразия динамической системы в M.

3) Замкнутое инвариантное множество $N \subset M$ называется *минимальным*, если внутри N нет меньших замкнутых инвариантных множеств. Примерами минимальных множеств являются: а) особая точка x_0 поля ξ, где $\xi(x_0) = 0$; б) периодическая траектория поля ξ. Позднее мы познакомимся с примерами более сложных минимальных множеств.

4) Говорят, что траектория $\gamma(t)$ *захвачена* множеством $N \subset M$, если $\gamma(t)$ лежит в N для всех $t \geqslant t_0$.

5) Гиперповерхность $P \subset M$ называется *трансверсалью* динамической системы, если поле ξ не касается гиперповерхности P ни в одной ее точке. Гиперповерхность P называется *замкнутой трансверсалью*, если это — замкнутое подмногообразие многообразия M. При этом возможны два случая. а) Замкнутая трансверсаль P разделяет M на две части: $W_1 \cup W_2 = M$, $W_1 \cap W_2 = P$; в этом случае каждый из кусков W_1 и W_2 захватывает все траектории поля ξ или все траектории поля $-\xi$ (проверьте!). б) Замкнутая трансверсаль P не разделяет многообразие M на две части. Здесь особо выделяется случай, когда все траектории, начавшись в любой точке $x \in P$, возвращаются еще раз через конечное время $t(x)$ к многообразию P и его пересекают. Очевидно, что функция времени пересечения $t(x)$ гладко зависит от $x \in P$; тем самым определено гладкое отображение ψ: $P \to P$, $\psi(x) = \gamma(t(x))$, $\gamma(0) = x$.

Задача. Докажите, что все многообразие M диффеоморфно склеенному многообразию

$$M = N \times I(0, 1)/(x, 0) \sim (\psi(x), 1).$$

Докажите, что многообразие M диффеоморфно косому произведению с базой — окружностью S^1 и слоем N.

Кроме динамических систем весьма полезно строить качественную теорию для так называемых «одномерных слоений», задаваемых полями направлений (или «директоров») $\xi(x) \sim -\xi(x)$. Конечно, локально (в окрестности неособой точки $\xi(x_0) \neq 0$) одномерное слоение записывается в виде (1), но при этом надо иметь в виду два обстоятельства: во-первых, для любой скалярной функции $f \neq 0$ система $\dot{x} = \xi(x)$ определяет то же самое слоение, что и система $\dot{x} = f\xi(x)$; во-вторых, запись в виде (1) глобально не всегда возможна; поэтому одномерное слоение может не допускать корректного введения даже знака времени (рис. 147). Причины, требующие рассмотрения «одномерных слоений», могут быть различны. Например, в теории жидких кристаллов направление («директор») $\xi \sim (-\xi)$ есть ось некоторого осесимметричного (в данной точке) тензора второго ранга, определяющего оптические свойства среды. В теории динамических систем с алгебраическими правыми частями в $\mathbb{R}^n$ для изучения качественных свойств траекторий, уходящих далеко от начала координат, приходится «пополнять» пространство $\mathbb{R}^n$ бесконечно удаленными точками, превращая его в $\mathbb{R}P^n$; оказывается, система продолжается на $\mathbb{R}P^n$ как гладкое поле направлений, теряя знак времени. В случае $n = 2$ (двумерные многообразия) одномерное слоение задается 1-формой. Локально, в области $U \subset M^2$ с координатами (x, y), имеем

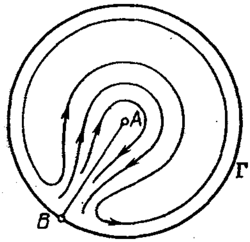

Рис. 147. В центре — особая точка A; имеется седло — особая точка B на границе Г. На отрезке BA нет знака времени.

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{5}$$

Точка (x, y) неособа, если P или $Q \neq 0$. Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — многочлены степени m. Тогда сделаем обычную проективную замену

$$x = \frac{u_1}{u_0}, \quad y = \frac{u_2}{u_0}. \tag{6}$$

Мы получим 1-форму в однородных координатах

$$\Omega = u_0^{m+2}\omega = u_0^{m+2}P\left(\frac{u_1}{u_0}, \frac{u_2}{u_0}\right)(u_0du_1 - u_1du_0) + \\ + u_0^{m+2}Q\left(\frac{u_1}{u^0}, \frac{u_2}{u_0}\right)(u_0du_2 - u_2du_0). \tag{7}$$

Уравнение $\Omega = 0$ задает слоение на всем многообразии $\mathbb{R}P^2$.

Задача. Покажите, что бесконечно удаленная прямая $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2 (u_0 = 0)$ является интегральной траекторией одномерного слоения $\Omega = 0$. Покажите, что слоение $\Omega = 0$ не допускает введения знака времени. Исследуйте особые точки слоения $\Omega = 0$ на бесконечности $(u_0 = 0)$ при $m = 2$.

Определение 3. *Предельным циклом* называется периодическая интегральная траектория динамической системы или слоения на двумерном многообразии, в достаточно малой окрестности которой нет других периодических решений.

В этом случае, как нетрудно видеть, картина интегральных траекторий около предельного цикла имеет вид, показанный на рис. 148.

Предельные циклы систем на плоскости $\mathbb{R}^2$, входящие в замкнутый диск D^2 сквозь трансверсаль $\Gamma = \partial D^2$, рассматривались в § 14 (см. теорему Пуанкаре — Бендиксона). Фактически эта теорема относится к слоениям на сфере S^2, где верхний полюс является выталкивающей особой точкой (рис. 149). Векторные

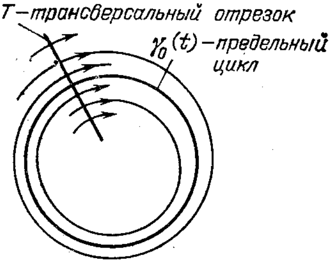

Рис. 148. Функция Пуанкаре $\tau \to f(\tau)$ для $\tau \in T$ определяется траекторией $\gamma(t)$ такой, что $\gamma(0) = \tau \in T$ и $\gamma(t) = f(\tau) \in T$; при этом в отрезке кривой между $\gamma(0)$ и $\gamma(t)$ нет пересечений с T. При $\tau = 0$ имеем точку цикла γ_0.

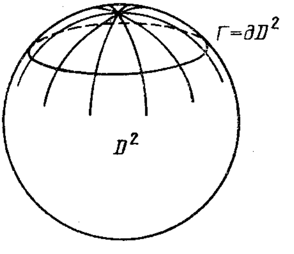

Рис. 149

поля общего положения на сфере обязательно имеют выталкивающую или втягивающую особую точку; см. § 15. Это — следствие теоремы о сумме особенностей векторного поля. Фактически это — единственная эффективная теорема, гарантирующая существование предельного цикла. Уже число циклов систем с полиномиальными правыми частями на $\mathbb{R}^2$ (даже степени 2), сводящихся к слоениям на $\mathbb{R}P^2$, неизвестно. В каждом индивидуальном случае их отыскание является нетривиальной задачей. Особый (вырожденный) случай представляют собой бездивергентные динамические системы на плоскости $\mathbb{R}^2$ (или поля $\xi = (\xi^1, \xi^2)$) такие, что $\frac{\partial \xi^a}{\partial x^a} = 0$. В этом случае преобразования S_t сохраняют площадь области (см. § 23 части I). Эти системы все гамильтоновы с одной степенью свободы; поэтому они имеют интеграл энергии и интегрируются до конца.

2. Динамические системы на торе. В силу теоремы о сумме индексов особенностей векторного поля (см. § 15) единственной замкнутой ориентируемой поверхностью, допускающей векторные поля, нигде не обращающиеся в нуль, является тор T^2. К такого рода системам на торе приводит, например, задача о качественном исследовании уравнения с периодическими коэффициентами: пусть задано уравнение

$$\dot{x}=f(x,t) \tag{8}$$

с периодической по обоим аргументам правой частью $f(x+1,t)=f(x,t)=f(x,t+1)$. Уравнение (8) определит нам на торе T^2 с координатами $x(\mathrm{mod}\,1)$, $t(\mathrm{mod}\,1)$ динамическую систему вида

$$\dot{x}=f(x,t),\quad \dot{t}=1. \tag{9}$$

Система (9) допускает замкнутую трансверсаль $S^1\subset T^2$, задаваемую уравнением $t=t_0$. Трансверсаль S^1 не разделяет тора T^2; в силу уравнения (9) каждая траектория $(x(t), t)$ возвращается к трансверсали S^1 через время $t(x)=1$. Мы получаем отображение (диффеоморфизм степени 1)

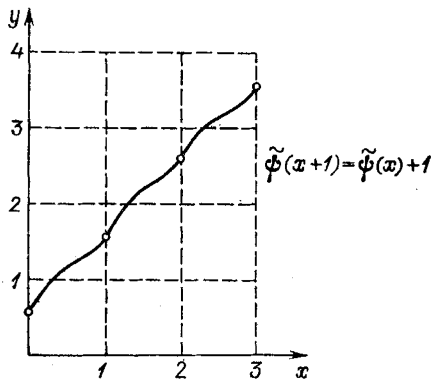

Рис. 150

$$\psi\colon S^1\to S^1, \tag{10}$$

где $\psi(x)=\gamma(t_0+1)$, $\gamma(t_0)=(x, t_0)\in T^2$. График числовой функции $y=\tilde{\psi}(x)$, задающей отображение ψ (т. е. такой, что $\psi(x)=\tilde{\psi}(x)\,\mathrm{mod}\,1)$, изображен на рис. 150. Из равенства $\tilde{\psi}(x+1)=\tilde{\psi}(x)+(\text{степень }\psi)$ следует $\tilde{\psi}(x+1)=\tilde{\psi}(x)+1$. Можно считать, что $\tilde{\psi}(0)\geqslant 0$.

Пусть $\tilde{\psi}_n(x)=\underbrace{\tilde{\psi}(\tilde{\psi}(\ldots\tilde{\psi}(x)\ldots))}_{n}$ при $n>0$ и $\tilde{\psi}_{-n}=(\tilde{\psi}_n)^{-1}$ (обратное отображение). Рассмотрим выражение

$$(\tilde{\psi}_n(x)-x)/n \tag{11}$$

(здесь числитель есть угол поворота точки x при n-кратном применении диффеоморфизма ψ). Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. а) *Величина* $(\tilde{\psi}_n(x)-x)/n$ *имеет предел при* $n\to\infty$, *не зависящий от точки* x. б) *Этот предел называется* *«числом вращения» отображения ψ и обладает свойством: число вращения рационально тогда и только тогда, когда у ψ имеется периодическая точка, т. е. такая точка x_0, что $\psi^n(x_0)=x_0$ или $\tilde{\psi}_n(x_0)=x_0+m$.*

Доказательство. Часть а). Пусть $\alpha_n(x)=\tilde{\psi}_n(x)-x$ — угол поворота точки x при n-кратном применении диффеоморфизма ψ. Имеем неравенство

$$|\alpha_n(x_1)-\alpha_n(x_2)|<1; \tag{12}$$

оно очевидно при $|x_1-x_2|<1$, а в общем случае нужно воспользоваться периодичностью функции $\alpha_n(x)$.

Пусть целое число m_n таково, что справедливо следующее неравенство:

$$m_n\leqslant\alpha_n(0)<m_n+1. \tag{13}$$

Тогда для любого x из (12) и (13) вытекает, что $|\alpha_n(x)-m_n|<2$, т. е. $\left|\frac{\alpha_n(x)}{n}-\frac{m_n}{n}\right|<\frac{2}{n}$. Но $\alpha_{nk}(x)$ есть среднее арифметическое k величин $\alpha_n(\tilde{\psi}_i(x))$, $i=0, \ldots, k-1$. Поэтому верно неравенство

$$\left|\frac{\alpha_{nk}(x)}{nk}-\frac{m_n}{n}\right|<\frac{2}{n}.$$

Итак, при всех k величина $\alpha_{nk}(x)/nk$ принадлежит отрезку $\left[\frac{m_n-2}{n}, \frac{m_n+2}{n}\right]$. Из симметричности $\alpha_{nk}(x)/nk$ по n и k получаем, что все отрезки вида $\left[\frac{m_n-2}{n}, \frac{m_n+2}{n}\right]$ попарно пересекаются; длина этих отрезков стремится к нулю. Их единственная общая точка и есть число вращения α. Утверждение а) доказано.

Часть б). Пусть имеется периодическая точка x_0; если $\psi^n(x_0)=x_0$, то $\tilde{\psi}_n(x_0)=x_0+m$. Отсюда $\psi^{kn}(x_0)=x_0$, $\tilde{\psi}_{kn}(x_0)=x_0+km$, $\frac{1}{kn}(\tilde{\psi}_{kn}(x_0)-x_0)=\frac{km}{kn}=\frac{m}{n}$. При $k\to\infty$ получаем $\alpha=\frac{m}{n}$.

Обратно, пусть $\alpha=\frac{m}{n}$. Тогда функция $\tilde{\psi}_n$ имеет вид

$$\tilde{\psi}_n(x)=x+m+O(1)=x+m+\Delta(x). \tag{14}$$

Если $\Delta(x)>0$ при всех x, то верно и более сильное неравенство: $\Delta(x)\geqslant\Delta_0>0$. Тогда для числа вращения будем иметь

$$\alpha\geqslant\frac{m}{n}+\frac{\Delta_0}{n}>\frac{m}{n}. \tag{15}$$

Действительно, достаточно рассмотреть номера, кратные n, для которых получим

$$\tilde{\psi}_{kn}(x)=x+km+k\Delta_0. \tag{16}$$

Аналогичные рассуждения показывают, что неравенство $\Delta(x)<0$ также не может выполняться при всех x. Таким образом, найдется точка x_0, в которой функция $\Delta(x)$ меняет знак. Это и есть периодическая точка. Лемма доказана.

Следствие. *Если число вращения α иррационально, то порядок точек x, $\psi(x)$, $\psi^2(x)$ ..., $\psi^N(x)$ на окружности при любом x такой же, как в случае поворота на угол α.*

Доказательство. Из доказательства леммы (часть б)) видно, что $\tilde{\psi}_n(x)>x+m$ тогда и только тогда, когда $\alpha>m/n$. Это и означает сохранение порядка при соответствии $x+n\alpha(\operatorname{mod} 1)\leftrightarrow\psi^n(x)$. Следствие доказано.

Периодические точки отображения ψ дают нам периодические решения уравнения (9). Таким образом, наличие у уравнения (9) периодических решений согласно лемме 1 равносильно рациональности числа вращения α для отображения ψ. Рассмотрим теперь случай, когда число вращения α иррационально и периодических решений уравнение (9) не имеет.

Лемма 2. *Если число вращения иррационально, то для любой точки x окружности S^1 предельные множества $\omega^+(x)$ и $\omega^-(x)$ совпадают и инвариантны относительно преобразования ψ; они не зависят от точки $x\in S^1$.*

(Здесь множество $\omega^\pm(x)$ определяется на окружности S^1 как совокупность предельных точек последовательности $\psi^n(x)$ при $n\to\pm\infty$. Множество $\omega^\pm(x)$ совпадает, очевидно, с пересечением $\omega^\pm(\gamma)\cap S^1$, где S^1 — окружность, отвечающая значению $t=t_0$, а γ — траектория системы (9) на торе T^2, проходящая через точку x при $t=t_0$.)

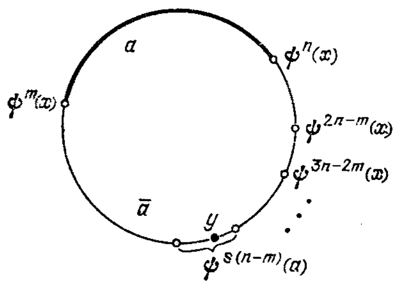

Рис. 151

Доказательство. Установим сначала инвариантность множества $\omega^\pm(x)$ относительно $\psi^{\pm1}$. Если $y\in\omega^\pm(x)$, то найдется последовательность n_1, n_2, ... такая, что $n_k\to\pm\infty$ и $\psi^{n_k}(x)\to y$. Тогда последовательность точек $\psi^{\pm1}\left(\psi^{n_k}(x)\right)=\psi^{n_k\pm1}(x)$ сходится к точке $\psi^{\pm1}(y)$. Поэтому $\psi^{\pm1}(y)\in\omega^\pm(x)$. Во вспомогательных целях установим такой факт: если точки $\psi^n(x)$ и $\psi^m(x)$ делят окружность на дуги a и $\bar{a}$ (рис. 151), то каждая половина орбиты $\{\psi^q(y),\ q\geqslant0\}$ и $\{\psi^q(y),\ q\leqslant0\}$ имеет точки на обеих дугах a и $\bar{a}$. Докажем это для полуорбиты $\{\psi^q(y),\ q\geqslant0\}$. Пусть, например, $m>n$ и $y\in\bar{a}$. Рассмотрим дуги a, $\psi^{n-m}(a)$, ..., $\psi^{s(n-m)}(a)$ $(s>0)$. Очевидно, концы этих дуг примыкают друг к другу (см. рис. 151) и образуют монотонную последовательность точек окружности.

Указанные дуги покроют всю окружность. В самом деле, в противном случае концы этих дуг, т. е. точки вида $\psi^{s(n-m)}\psi^n(x)$, образуют монотонную и ограниченную, а потому сходящуюся последовательность. Предел этой последовательности будет неподвижной точкой преобразования ψ^{n-m}, что противоречит иррациональности числа вращения и лемме 1.

Итак, найдется такое $s>0$, что дуга $\psi^{s(n-m)}(a)$ покроет точку y; $y\in\psi^{s(n-m)}(a)$, поэтому $\psi^{s(m-n)}(y)\in a$. (Для $q\leqslant 0$ доказательство идентично; нужно лишь заменить $m-n$ на $n-m$.)

Рассмотрим теперь две полуорбиты $\{\psi^q(x),\ q\geqslant 0\}$ и $\{\psi^q(y),\ q\leqslant 0\}$. Рассмотрим точку $x_0\in\omega^+(x)$. Имеется последовательность $q_k\to\infty$ такая, что $\psi^{q_k}(x)\to x_0$. На каждой дуге $a_k=\left[\psi^{q_k}(x),\ \psi^{q_{k+1}}(x)\right]$ имеется точка из полуорбиты $\{\psi^q(y),\ q\geqslant 0\}$. Пусть это — точка $\psi^{s_k}(y)\in a_k=\left[\psi^{q_k}(x),\ \psi^{q_{k+1}}(x)\right]$. Очевидно, длины дуг a_k стремятся к нулю при $k\to\infty$, и последовательность точек $\psi^{s_k}(y)$ сходится к точке x_0. Итак, совпадение $\omega^+(x)$ и $\omega^+(y)$ доказано.

Совпадение $\omega^-(x)$ с $\omega^-(y)$ доказывается так же. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если число вращения иррационально, то предельное множество $\omega(x)=\omega(y)$ любой точки окружности S^1 может либо совпадать со всей окружностью, либо быть нигде не плотным замкнутым совершенным множеством (т. е. канторовым множеством).*

(Напомним определение: множество называется *нигде не плотным*, если около любой его точки имеется не принадлежащая ему открытая область; множество *замкнуто*, если оно содержит свои предельные точки; множество *совершенно*, если оно совпадает с множеством своих предельных точек, например, совершенное множество не имеет изолированных точек.)

Доказательство. Предельное множество $\omega(x)=\omega^{\pm}(x)$ замкнуто по определению (см. выше). Докажем, что это множество совершенно. Пусть $x_0\in\omega(x)$. Все точки $\psi^q(x_0)$ принадлежат $\omega(x)$ по лемме 2. По той же лемме $\omega^+(x_0)=\omega(x_0)=\omega(x)$. Поэтому найдется последовательность $q_k\to\infty$ такая, что $\psi^{q_k}(x_0)\to x_0$. В то же время $\psi^{q_k}(x_0)\neq x_0$ по лемме 1. Таким образом, x_0 есть предельная точка множества $\omega(x)$, т. е. множество $\omega(x)$ совершенно. Какие бывают совершенные множества на окружности S^1? Либо $\omega(x)=S^1$ (всюду плотный случай), либо $\omega(x)$ содержит не все точки из S^1. Если множество $\omega(x)$ заполняет хотя бы маленькую дугу b на окружности S^1, то можно найти меньшую дугу $a\subset b$, у которой края имеют вид x_0 и $\psi^m(x_0)$. Тогда преобразование ψ^m обладает тем свойством, что концы дуг a, $\psi^m(a)$, ..., $\psi^{sm}(a)$, ... примыкают друг к другу. Поэтому, как в доказательстве леммы 2, объединение дуг $a \cup \psi^m(a) \cup \ldots \cup \psi^{sm}(a) \ldots$ покроет окружность S^1. Доказательство теоремы закончено.

Замечание. Можно построить примеры C^1-гладких отображений ψ: $S^1 \to S^1$ и систем на торе $\dot{x} = f(x, t)$ вида (9), для которых множество $\omega(x)$ будет канторовым. Однако для C^2-гладких отображений (и тем самым для аналитических функций $f(x, t)$, в частности, для тригонометрических многочленов) имеется теорема (А. Данжуа): *если число вращения иррационально, то предельное множество $\omega(x)$ совпадает со всей окружностью S^1 (т. е. траектории системы всюду плотны на торе T^2).*

Несмотря на это, появление среди предельных множеств траекторий в нетривиальных динамических системах канторовых множеств, по-видимому, неизбежно (начиная с размерности 3) даже в случае, когда правые части являются алгебраическими.

Теорема 2. *Если предельное множество $\omega(x)$ есть вся окружность (т. е. траектории системы (9) всюду плотны), то отображение ψ: $S^1 \to S^1$ топологически эквивалентно повороту. Это означает, что найдется гомеоморфизм h: $S^1 \to S^1$ (вообще говоря, не гладкий) такой, что*

$$h\psi h^{-1}(x) = x + \alpha, \tag{17}$$

где α — число вращения (α иррационально).

Доказательство. В силу следствия из леммы 1 точки $x_n = \psi^n(x)$ на окружности идут в том же порядке, что и точки $n\alpha \pmod 1$ (точки орбиты поворота на угол α). Точки x_n всюду плотны на окружности по условию. Чтобы получить гомеоморфизм h окружности, переводящий ψ в поворот, нужно продолжить по непрерывности отображение, переводящее точки x_n в соответствующие точки орбиты поворота:

$$h(x_n) = n\alpha \pmod 1.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Гомеоморфизм h, осуществляющий «линеаризацию» отображения ψ: $S^1 \to S^1$, построен нами только как непрерывный даже для аналитических или сколь угодно гладких ψ. Исследование гладкости h является нелегкой задачей.

Замечание 2. До сих пор мы исследовали динамические системы на торе, для которых минимальное множество могло совпадать со всем тором. Для поверхностей рода $g > 1$ известно следующее: в случае C^2-гладких векторных полей минимальное замкнутое множество динамической системы может быть только либо особой точкой, либо периодическим решением. Эта теорема обобщает теорему А. Данжуа, упомянутую в замечании выше. Для C^1-гладких систем легко строятся примеры с минимальными множествами типа канторова множества.