§ 28. Гамильтоновы системы на многообразиях. Теорема Лиувилля. Примеры

1. Гамильтоновы системы в кокасательном расслоении. Постановка вариационных задач на многообразиях точно такая же, как и в евклидовом пространстве: пусть на многообразии M задан лагранжиан — скалярная функция $L(x, v)$, где x — точка многообразия M, а v — касательный вектор к M в этой точке. Экстремумы действия на гладких кривых с какими-либо граничными условиями

$$S = \int\limits_{\gamma(t)} L(x, \dot{x})\, dt, \quad v = \dot{\gamma} = \dot{x}, \quad x = \gamma(t),$$

приводят к уравнению Эйлера — Лагранжа, локально имеющему вид уравнения второго порядка на M:

$$\dot{p}_\alpha \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^{\cdot} = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}. \tag{1}$$

В случае невырожденности преобразования Лежандра (см. § 33 части I), когда уравнение $p_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial v^\alpha}(x, v)$ однозначно разрешимо в виде $v^\alpha = v^\alpha(x, p)$, получим эквивалентную систему Гамильтона

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}, \quad \dot{x}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}. \tag{2}$$

Гамильтонова система (2) представляет собой динамическую систему на пространстве кокасательного расслоения $T^*(M)$ размерности $2n (n = \dim M)$, точками которого являются пары (x, p), где p — ковектор в точке $x \in M$.

Дифференциальная форма $\Omega = \sum\limits_\alpha dx^\alpha \wedge dp_\alpha$ замкнута (и даже точна, т. е. $\Omega = d\omega$, где $\omega = p_\alpha\, dx^\alpha$), определена глобально на всем $T^*(M)$ и невырождена: это означает, что форма $\Omega^n = \Omega \wedge \ldots \wedge \Omega$ (n раз, где $n = \dim M$) пропорциональная элементу объема с ненулевым коэффициентом. Форма Ω определяет скалярное произведение векторов (кососимметрическое и невырожденное)

$$\langle \xi, \eta \rangle = -\langle \eta, \xi \rangle = J_{ab} \xi^a \eta^b, \tag{3}$$

где $a, b = 1, \ldots, 2n$, $\Omega = J_{ab} dy^a \wedge dy^b$, координаты $y^1, \ldots, y^{2n}$ на $T^*(M)$ определяются по правилу $y^\alpha = x^\alpha$, $y^{n+\alpha} = p_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n$. Уравнения Гамильтона (2) имеют вид «кососимметрического градиента»

$$\dot{y}^a = J^{ab} \frac{\partial H}{\partial y^b}, \tag{4}$$

$J^{ab} J_{bc} = \delta^a_c$. Скобка Пуассона $\{f, g\}$ функций f, g на «фазовом пространстве» $T^*(M)$ есть скалярное произведение их «градиентов»:

$$\{f, g\} = J^{ab} \frac{\partial f}{\partial x^a} \frac{\partial g}{\partial x^b} = \langle \nabla f, \nabla g \rangle. \tag{5}$$

В силу замкнутости формы Ω скобка Пуассона вводит на линейном пространстве функций структуру алгебры Ли. При этом «градиент» функции $\{f, g\}$ есть коммутатор «градиентов» функций f и g:

$$f \to (\nabla f) = \left(J^{ab} \frac{\partial f}{\partial y^b}\right), \quad g \to (\nabla g) = \left(J^{ab} \frac{\partial g}{\partial y^b}\right), \tag{6}$$
$$\{f, g\} \to [\nabla f, \nabla g].$$

Все эти факты были установлены локально в § 33 части I. Их перенос на многообразия носит автоматический характер, поскольку они представляют собой локальные тождества.

2. Гамильтоновы системы на многообразиях. Примеры. При рассмотрении гамильтоновых систем на многообразиях надо иметь в виду два обстоятельства:

1. Если $\omega = H_a dy^a$ — любая замкнутая 1-форма, то система $\dot{y} = J^{ab} H_b$ определяет группу канонических преобразований S_t, поскольку локально замкнутая форма ω есть дифференциал некоторой функции; глобально форма ω может не быть дифференциалом однозначной функции.

2. Гамильтоновы системы возникают не только на многообразиях вида $T^*(M)$ и при этом форма Ω не обязана быть точной.

Важны также более общие многообразия — *фазовые пространства*, на которых определена скобка Пуассона гладких функций. Пусть y^a, $a = 1, \ldots, N$,— локальные координаты на многообразии Y — фазовом пространстве. Скобка Пуассона функций $f(y)$ и $g(y)$ задается кососимметрическим тензорным полем $J^{ab}(y) = -J^{ba}(y)$ по формуле (5). Эта операция обладает очевидными свойствами билинейности и кососимметричности; легко проверяется также «тождество Лейбница»

$$\{fg, h\} = g\{f, h\} + f\{g, h\}. \tag{7}$$

Требуется также выполнение тождества Якоби

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0. \tag{8}$$

Гамильтоновы системы на фазовом пространстве по определению имеют вид (4), где $J^{ab} = J^{ab}(y)$ — тензор, задающий скобку Пуассона, а $H = H(y)$ — любая функция, называемая гамильтонианом. Векторное поле $\nabla H = \left(J^{ab} \frac{\partial H}{\partial y^b}\right)$, отвечающее системе (4), называется гамильтоновым. Коммутатор гамильтоновых полей связан со скобкой Пуассона соотношением (6) (проверьте!).

В рассмотренном выше важном примере кокасательного расслоения T^*M скобка J^{ab} была *невырожденной* (т. е. $\det(J^{ab}) \neq 0$) и имела канонический (постоянный) вид $\{x^\alpha, x^\beta\} = \{p_\alpha, p_\beta\} = 0$, $\{x^\alpha, p_\beta\} = \delta^\alpha_\beta$. Более общий класс фазовых пространств с невырожденной скобкой Пуассона допускает следующее описание. Пусть $N = 2n$, скобка Пуассона J^{ab} невырождена, т. е. $\det(J^{ab}) \neq 0$; обозначим через J_{ab} обратную матрицу. Выполнение тождества Якоби (8) для любых функций f, g, h эквивалентно замкнутости формы (см. часть I, теорему 34.2)

$$\Omega = \frac{1}{2} J_{ab} dy^a \wedge dy^b. \qquad (9)$$

Многообразия с невырожденной замкнутой 2-формой Ω называются *симплектическими*. Таким образом, класс фазовых пространств с невырожденной скобкой совпадает с классом симплектических многообразий.

Для *вырожденной* скобки Пуассона имеются функции $f_q(y)$ (быть может, заданные локально) такие, что

$$\{f_q, g\} = 0 \qquad (10)$$

для любой функции $g(y)$.

Задача. Доказать, что для вырожденной матрицы $J^{ab}(y)$ постоянного ранга функции $f_q(y)$ с условием (10) локально всегда существуют. (По поводу условий интегрируемости см. ниже § 29, п. 1.)

Если из (10) найдены все такие величины $f_q(y)$, то на их общей поверхности уровня $f_q(y) = \text{const}$, $q = 1, 2, \ldots$, скобка Пуассона уже становится невырожденной.

Рассмотрим важный пример: *скобки Пуассона — Ли*. Так называется класс скобок, где тензор $J^{ab}(y)$ линейно зависит от координат,

$$J^{ab}(y) = c^{ab}_d y^d, \quad c^{ab}_d = \text{const}. \qquad (11)$$

Рассмотрим совокупность L всех линейных функций на фазовом пространстве, которое мы обозначим через L^*. Для базисных линейных функций — координат y^a — скобка определяет операцию коммутирования

$$[y^a, y^b] = c^{ab}_d y^d \equiv \{y^a, y^b\}. \qquad (12)$$

Из косой симметрии $c^{ab}_d = -c^{ba}_d$ и тождества Якоби (8) вытекает, что операция (12) превращает линейное пространство L в алгебру Ли, причем c^{ab}_d — ее структурные константы. Скобки (12), вообще говоря, вырождены.

Пример 1. Пусть L — алгебра Ли группы вращений $SO(3)$. Метрика Киллинга на $SO(3)$ евклидова и позволяет не различать L и L^* (все индексы считаются нижними). Скобки Пуассона базисных функций M_i на L^* имеют вид

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \tag{13}$$

где ε_{ijk} равно знаку перестановки ijk. Функция $M^2 = \sum M_i^2$ такова, что $\{M^2, M_i\} = 0$, $i = 1, 2, 3$. На поверхностях уровня $M^2 = \mathrm{const}$ (сферы) скобка (13) невырождена. Гамильтоновы системы на L имеют вид «уравнений Эйлера»

$$\dot{M} = [M, \Omega], \quad \Omega = (\Omega^i) = \left(\frac{\partial H}{\partial M_i}\right), \tag{14}$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор в L. (При $2H = a_1 M_1^2 + a_2 M_2^2 + a_3 M_3^2$ уравнения (14) совпадают с уравнениями движения твердого тела, закрепленного в центре масс.) Вывод уравнений верен для всех компактных (и полупростых) групп Ли (проверьте!). Такие системы на группах $SO(n)$ называются «многомерным аналогом твердого тела» ([32]), если гамильтониан — квадратичная функция от M.

Пример 2. С алгеброй Ли L группы $E(3)$ движений трехмерного евклидова пространства связаны важные системы, возникающие в гидродинамике. Эта алгебра Ли уже не является полупростой. На фазовом пространстве L^* имеется 6 координат M_1, M_2, M_3, p_1, p_2, p_3 и скобки Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, p_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k, \quad \{p_i, p_j\} = 0. \tag{15}$$

Скобка (15) обладает двумя независимыми функциями $f_1 = \sum p_i^2$, $f_2 = \sum p_i M_i$ такими, что $\{f_q, g\} = 0$ $(q = 1, 2)$ для любой функции $g(M, p)$. На поверхностях уровня $f_1 = p^2 > 0$, $f_2 = ps$ скобка (15) невырождена. Замена $(M, p) \to (\sigma, p)$, где $\sigma_i = M_i - \frac{s}{p} p_i$, устанавливает изоморфизм этих поверхностей уровня с кокасательным расслоением T^*S^2 к сфере (проверьте!).

Задача. Докажите, что на поверхностях уровня $\{f_1 = p^2 > 0, f_2 = ps\} \approx T^*S^2$ скобка Пуассона (15) может быть задана замкнутой формой

$$\Omega = \sum_{\alpha=1}^{2} d\xi_\alpha \wedge dx^\alpha + F_{12}(x)\, dx^1 \wedge dx^2, \tag{16}$$

где x^1, x^2, ξ_1, ξ_2 — координаты на T^*S^2, $x^1 = \theta$, $x^2 = \psi$, $p_1 = p\cos\theta\cos\psi$, $p_2 = p\cos\theta\sin\psi$, $p_3 = p\sin\theta$, $\sigma_1 = \xi_2 \operatorname{tg}\theta\cos\psi - \xi_1\sin\theta$, $\sigma_2 = \xi_2\operatorname{tg}\theta\sin\psi + \xi_1\cos\psi$, $\sigma_3 = -\xi_2$; $\{\theta, \psi\} = \{\xi_1, \psi\} = \{\xi_2, \theta\} = 0$, $\{\theta, \xi_1\} = \{\psi, \xi_2\} = 1$, $\{\xi_1, \xi_2\} = s\cos\theta$.

Уравнения, являющиеся гамильтоновыми по отношению к скобке (15) с гамильтонианом H, записываются в виде «уравнений Кирхгофа»

$$\dot{p} = [p, \omega], \quad \dot{M} = [M, \omega] + [p, u], \tag{17}$$

где $u^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\omega^i = \frac{\partial H}{\partial M_i}$ (квадратные скобки обозначают векторное произведение). Для квадратичных гамильтонианов $H(M, p)$ уравнения (17) описывают движение твердого тела в жидкости — идеальной, несжимаемой и покоящейся на бесконечности. К виду (17) приводятся также уравнения движения волчка в осесимметричном поле. Оказывается, естественное ограничение гамильтоновой системы (17) на поверхность $f_1 = p^2$, $f_2 = ps$ может быть записано в виде уравнения экстремалей (Эйлера — Лагранжа) $\delta S = 0$ на сфере S^2, где функционал S является «многозначным», т. е. корректно определена лишь его вариация δS — замкнутая 1-форма на функциональном пространстве траекторий на сфере. Такое сведéние можно найти в книге [28].

3. Геодезические потоки. Важнейшим в геометрии классом гамильтоновых систем являются так называемые «геодезические потоки». Геодезический поток определяется на многообразии $T = T(M)$ касательных векторов к гладкому многообразию, на котором задана риманова метрика $g_{\alpha\beta}$; его гамильтониан имеет вид (локально)

$$H(x, p) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta, \quad g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma. \tag{18}$$

Этот гамильтониан возникает из лагранжиана $L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta$, задающего геодезические линии, параметризованные натуральным параметром. Напомним принцип Мопертюи, согласно которому, в частности, движение частицы в потенциальном поле сил $U(x)$ по многообразию M с метрикой $g_{\alpha\beta}(x)$ при фиксированной энергии $E = H(x, p) = \frac{1}{2} \langle p, p \rangle + U(x)$ происходит по геодезическим новой метрики

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(x, E) = \mathrm{const}(E - U(x))\, g_{\alpha\beta}(x) \tag{19}$$

(хотя параметр пробегания не определяется из решения экстремальной задачи; см. § 33 части I). Таким образом, в принципе Мопертюи геодезический поток интересен нам только как одномерное слоение на M.

Мы будем далее рассматривать геодезические потоки только на многообразиях M с положительной (римановой) метрикой $g_{\alpha\beta}$ и предполагать, что многообразие M является замкнутым. Задав уровень энергии $E = H(x, p) = \frac{1}{2} \langle p, p \rangle$, мы получим динамическую систему на компактном многообразии линейных элементов постоянной длины. Это многообразие представляет собой расслоение со слоем S^{n-1} (где $n = \dim M$) и базой M. С точки зрения качественной теории можно сказать следующее: эта система не имеет особых точек; периодические траектории могут здесь изучаться с помощью топологической теории критических точек функционала длины в пространстве всех замкнутых кривых. Особенно интересный случай представляют компактные многообразия, имеющие отрицательную кривизну по всем двумерным направлениям. Рассмотрим для простоты поверхности M, снабженные метрикой постоянной отрицательной гауссовой кривизны.

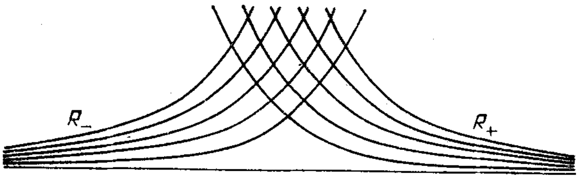

Рис. 152

Геодезический поток на таком M представляет собой динамическую систему (векторное поле ξ) на многообразии $T = T(M)$ линейных (единичных элементов к поверхности M — уровне энергии $H(x, p) = 1$. Оказывается, что каждый класс сопряженных элементов группы $\pi_1(M)$ определяет ровно одну периодическую траекторию. Характерной особенностью метрики отрицательной кривизны является «экспоненциальное» поведение геодезических: пусть $\gamma(t)$ — интегральная траектория поля ξ на T (т. е. геодезическая на M). Тогда можно найти семейство геодезических,

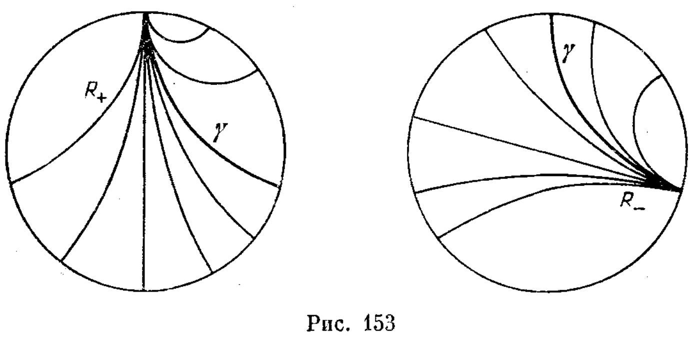

Рис. 153

экспоненциально быстро приближающихся к $\gamma(t)$ при $t \to +\infty$. Это — поверхность в T, содержащая в себе $\gamma(t)$. Обозначим эту поверхность через $\check{R}_+(\gamma)$. Аналогично определяется поверхность $R_-(\gamma)$ для $t \to -\infty$ (рис. 152). Точное определение поверхностей R_+ и R_- таково: на универсальной накрывающей поверхности M — плоскости Лобачевского L^2 — поверхность $R_\pm$ состоит из геодезических, входящих в одну и ту же точку абсолюта (рис. 153) при $t \to \pm\infty$.

Пересечение $R_-(\gamma)\cap R_+(\gamma)$ есть в точности геодезическая γ. Возникает интересная ситуация: каждая траектория $\gamma\subset T$ лежит на двух поверхностях $R_+(\gamma)\supset\gamma$ и $R_-(\gamma)\supset\gamma$; таким образом, компактное многообразие T «расслоено» на два семейства поверхностей R_+ и R_- со свойствами, перечисленными выше. Однако динамическая система неинтегрируема, т. е. не имеет первых интегралов (более того, каждая из поверхностей R_+, R_- и «почти каждая» из траекторий γ геодезического потока всюду плотно заполняет T; мы этого доказывать не будем). Семейства поверхностей R_+ и R_- на T дают весьма любопытный пример «двумерных слоений», о которых мы скажем позднее.

Задача. Докажите, что слои R_+ или R_- могут быть (топологически) либо плоскостями $\mathbb{R}^2$, либо цилиндрами $S^1\times\mathbb{R}^1$. (На слоях R_+ и R_- топология строится так: нужно брать конечные пересечения связных компонент множеств, открытых в R_+ или в R_- в индуцированной топологии.)

4. Теорема Лиувилля. Геодезические потоки иногда допускают «лишние» интегралы движения, например, если метрика на многообразии M имеет нетривиальную группу движений (однородные пространства, поверхности вращения) и в некоторых других особых случаях. При наличии лишних интегралов, разумеется, ни одна траектория не может быть всюду плотной в многообразии T_1 единичных касательных векторов $\left(E=\frac{1}{2}\langle p,p\rangle=\mathrm{const}\right)$. Аналогичная ситуация возникает и в случае более общих гамильтоновых систем, если имеются «лишние» интегралы, кроме энергии. Важная теорема Лиувилля изучает тот случай гамильтоновых систем в $\mathbb{R}^{2n}$ с n степенями свободы (или на произвольном $2n$-мерном симплектическом многообразии M с формой Ω), когда имеется ровно n функционально независимых интегралов $H=f_1, f_2, \ldots, f_n$, скобки Пуассона которых попарно равны нулю.

Теорема 1 (Лиувилль). *Предположим, что система с гамильтонианом H имеет n интегралов $f_1=H, f_2, \ldots, f_n$ с линейно независимыми попарно коммутирующими кососимметрическими градиентами $\xi_j=J^{ab}\dfrac{\partial f_j}{\partial x^b}$ (J_{ab} определяется равенством $\Omega=J_{ab}dy^a\wedge dy^b$, где y^a — локальные координаты, $J^{ab}J_{bc}=\delta^a_c$). Тогда:*

1) *Поверхности уровня интегралов $f_1=a_1, \ldots, f_n=a_n$ представляют собой факторгруппы $\mathbb{R}^n$ по решеткам ранга $\leqslant n$; в частности, компактные неособые поверхности уровня являются n-мерными торами.*

2) *Если поверхность уровня $f_1=a_1, \ldots, f_n=a_n$ компактна, то в ее окрестности можно ввести такие координаты $s_1, \ldots, s_n$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ $(0\leqslant\varphi_i<2\pi)$ («действие — угол»), что:* (а) $\Omega=\sum\limits_\alpha ds_\alpha\wedge$

$\wedge d\varphi_\alpha$ *или* $\{s_\alpha, s_\beta\} = \{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} = 0$, $\{s_\alpha, \varphi_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$; (б) $s_\alpha = s_\alpha(f_1, \ldots, f_n)$, φ_α — *координаты на поверхностях* $f_j = \mathrm{const}$; (в) *наша система имеет вид*

$$\dot f_\alpha = 0 \Leftrightarrow \dot s_\alpha = 0, \qquad \dot\varphi_\alpha = \omega_\alpha(s_1, \ldots, s_n). \tag{20}$$

Доказательство. Поверхность $f_1 = a_1, \ldots, f_n = a_n$ представляет собой гладкое n-мерное многообразие; мы обозначаем его через $M^n(a_1, \ldots, a_n)$. Набор кососимметрических градиентов $(\xi_j^a) = J^{ab}\dfrac{\partial f_j}{\partial y^b}$ по условию линейно независим. При этом в силу условия $\{f_\alpha, f_\beta\} = 0$ все векторные поля ξ_j касаются поверхности $M^n(a_1, \ldots, a_n)$ и попарно коммутируют. Таким образом, на многообразии M и, в частности, на поверхности $M^n(a_1, \ldots, a_n)$ и ее окрестности действует группа $\mathbb{R}^n$ с генераторами ξ_j. Выберем начальную точку $x_0 \in M^n(a_1, \ldots, a_n)$ и выделим в $\mathbb{R}^n$ решетку: вектор $d \in \mathbb{R}^n$ принадлежит решетке, если d, действуя на x_0, снова дает x_0. Возникает подгруппа $\{d\} \subset \mathbb{R}^n$. Эта подгруппа дискретна и поэтому изоморфна решетке, натянутой на k векторов $\mathbb{R}^n$, где $k \leqslant n$. Очевидно, что лишь при $k = n$ мы получим компактное многообразие T^n. Утверждение 1) доказано.

Для доказательства утверждения 2) сначала выберем начальную точку $x_0(a_1, \ldots, a_n)$, гладко зависящую от поверхности уровня в малой окрестности изучаемой поверхности. На данной поверхности уровня можно составить такие линейные комбинации η_j полей ξ_j, $\sum b_j^i \xi_i = \eta_j$, что вводимые с их помощью координаты в группе $\mathbb{R}^n$, действующей на $T^n = M^n(a_1, \ldots, a_n)$, совпадут с углами $0 \leqslant \varphi_j \leqslant 2\pi$ ($\varphi_j = 0$ — это точка x_0). Коэффициенты b_j^i будут зависеть от набора $a_1, \ldots, a_n$ в окрестности избранной поверхности уровня. Таким образом,

$$\eta_j = b_j^i(f_1, \ldots, f_n)\,\xi_i.$$

Это вводит координаты $\tilde\varphi_1, \ldots, \tilde\varphi_n$ в целую область около $M^n(a_1, \ldots, a_n)$. В этой области имеем координаты $(f_1, \ldots, f_n, \tilde\varphi_1, \ldots, \tilde\varphi_n)$ и невырожденную матрицу скобок Пуассона

$$\begin{pmatrix} \{f_i, f_j\} = 0, & \{f_i, \tilde\varphi_j\} \\ \{\tilde\varphi_i, f_j\}, & \{\tilde\varphi_i, \tilde\varphi_j\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A(f) \\ -A^{\mathrm{T}}(f) & B(f) \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где $\det A \neq 0$.

Введем теперь переменные действия $s_i = s_i(f_1, \ldots, f_n)$, где $i = 1, \ldots, n$. Для фазового пространства $\mathbb{R}^{2n}$ с каноническими координатами $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ переменные действия имеют

вид
$$s_i = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\gamma_i}\sum_{k=1}^{n} p_k dq_k, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{22}$$

Здесь γ_i — i-й базисный цикл тора T^n,
$$\gamma_i\colon\ 0 \leqslant \tilde{\varphi}_i \leqslant 2\pi, \quad \tilde{\varphi}_j = \mathrm{const} \quad \text{при} \quad j \neq i.$$

Ясно, что попарные скобки Пуассона $\{s_i, s_j\} = 0$ при всех i, j, поскольку $\{f_i; f_j\} = 0$.

Задача. Докажите, что переменные действия $s_1, \ldots, s_n$ канонически сопряжены угловым переменным $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n$:
$$\{s_i, \tilde{\varphi}_j\} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{23}$$

В произвольном $2n$-мерном симплектическом многообразии M с формой
$$\Omega = J_{ab} dy^a \wedge dy^b$$
нужно действовать так: форма Ω обращается в нуль на торах T^n. Поэтому на некоторой окрестности тора T^n эта форма точная:
$$\Omega = d\omega.$$

Переменные действия имеют вид, аналогичный (22):
$$s_i = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\gamma_i}\omega, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{24}$$

Положим теперь
$$\varphi_i = \tilde{\varphi}_i + b_i(s_1, \ldots, s_n). \tag{25}$$

Подберем b_i из условия $\{\varphi_i, \varphi_j\} = 0$. Это всегда можно сделать, поскольку $\{\varphi_i, s_j\} = \delta_{ij}$. Координаты
$$\varphi_i = \tilde{\varphi}_i + b_i(f_1, \ldots, f_n) \tag{26}$$
на каждой поверхности уровня $f_1 = a_1, \ldots, f_n = a_n$ совпадут с выбранными ранее углами φ_i с точностью до сдвига. Матрица скобок Пуассона имеет вид
$$\{s_i, s_j\} = \{\varphi_i, \varphi_j\} = 0, \quad \{\varphi_i, s_j\} = \delta_{ij}, \tag{27}$$
гамильтониан $H = f_1$ имеет вид
$$H = f_1(s_1, \ldots, s_n), \tag{28}$$
а форма Ω имеет вид $\Omega = \sum ds_\alpha \wedge d\varphi_\alpha$.

5. **Примеры.** Уже ранее (см. § 32 части I) мы сталкивались с примерами ситуации, указанной в теореме Лиувилля.

1. Системы с одной степенью свободы. Пусть поверхность уровня $H(x, p) = E$ компактна (рис. 154). Тогда мы имеем кано-

нические координаты («действие — угол»)

$$s(E) = \oint_{H=E} p\,dx,\ \varphi, \Omega = ds \wedge d\varphi,$$
$$H = H(s). \tag{29}$$

2. Частица в сферически симметричном потенциальном поле $U(r)$, $r = |x|$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ (см. § 32 части I). Имеем три интеграла:

$$f_1 = H, \quad f_2 = M_z,$$
$$f_3 = M^2 = \sum M_i^2. \tag{30}$$

Проверьте, что $\{f_i, f_j\} = 0$.

3. Геодезические на поверхности вращения (вокруг оси z) — см. § 31 части I. Имеем два интеграла:

$$f_1 = H = \frac{1}{2} g_{ij} v^i v^j, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \varphi, \quad f_2 = p_\varphi = M. \tag{31}$$

Следствиями этих законов сохранения были, например, теорема Клеро и полная интегрируемость геодезического потока.

4. Рассмотрим более общие лагранжианы, обладающие высокой симметрией. Уже раньше, в части I (см. § 29), были найдены геодезические на сфере и плоскости Лобачевского. Другие примеры сферически симметричных лагранжианов дают релятивистские задачи: а) движение заряженной частицы в центральном поле сил с потенциалом α/r в специальной теории относительности (СТО); б) движение массивной пробной частицы в гравитационном поле Шварцшильда (см. § 39 части I) в общей теории относительности (ОТО).

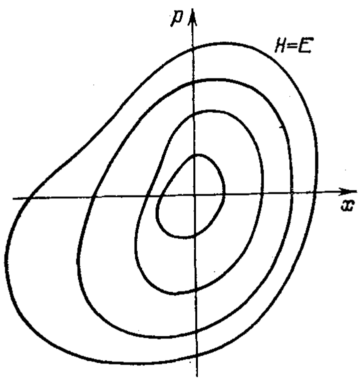

Рис. 154

а) В трехмерном формализме с лагранжианом $L_{\text{св}}^{(2)}$ при изложении СТО мы для движения частицы в потенциальном поле будем иметь следующий лагранжиан (см. § 32 части I):

$$L = mc^2\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{1/2} - \frac{\alpha}{r}. \tag{32}$$

В этом случае гамильтониан частицы имеет вид (см. §§ 32, 39 части I)

$$H(p) = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r}, \tag{33}$$

где p — трехмерный импульс (p_1, p_2, p_3).

Движение в силу сохранения полного момента является плоским. Пусть оно происходит в плоскости (x, y) с координатами (r, φ).

Пусть $M = p_\varphi$. Тогда (см. § 32 части I)

$$
\begin{gathered}
p^2 = p_r^2 + \frac{M^2}{r^2}, \quad p = (p_r, p_\varphi), \\
H = \varepsilon = c\sqrt{p_r^2 + \frac{M^2}{r^2} + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r} = \mathrm{const}.
\end{gathered} \tag{34}
$$

В случае притяжения $\alpha < 0$. Если $Mc > |\alpha|$, то из (34) видно, что падение на центр невозможно, как и в классической механике. Если $Mc < |\alpha|$, то падение на центр возможно.

Для точного решения сферически симметричных плоских задач технически удобно воспользоваться уравнением Гамильтона — Якоби (см. § 35 части I). Пусть $p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}$, $H = -\frac{\partial S}{\partial t}$. Рассмотрим уравнение $E = H(x, p)$ в виде

$$
-\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right). \tag{35}
$$

В координатах (r, φ) ищем решение уравнения (35) в виде

$$
S = -Et + M\varphi + f(r), \qquad f = f(r, M, E). \tag{36}
$$

Интегральная траектория $r(\varphi)$ определится уравнением $\frac{\partial S}{\partial M} = \mathrm{const}$.

Для гамильтониана (34)

$$
H = -\frac{\partial S}{\partial t} = c\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{M^2}{r^2} + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r}. \tag{37}
$$

Для $S = -Et + M\varphi + f(r, M, E)$ имеем окончательно

$$
S = -Et + M\varphi + \int \sqrt{\frac{1}{c^2}\left(E - \frac{\alpha}{r}\right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2c^2}\, dr. \tag{38}
$$

Траектория $r(\varphi)$ имеет вид

$$
\frac{\partial S}{\partial M} = \varphi + \frac{\partial f}{\partial M} = \mathrm{const}. \tag{39}
$$

Зависимость от времени определяется из уравнения $\frac{\partial S}{\partial E} = \mathrm{const}$.

Задачи. 1. Докажите, что при $\alpha < 0$ и $Mc < |\alpha|$ решения представляют собой спирали с радиусом r, достигающим нуля за конечное время.

2. Пусть $\alpha < 0$ и $E < mc^2$. Покажите, что траектории, вообще говоря, не замкнуты. Найдите поправку к движению по эллипсам в классической механике.

б) Рассмотрим теперь задачу о движении частиц ненулевой массы $m > 0$ в метрике Шварцшильда (см. § 39 части I). В координатах t, r, θ, φ имеем при $r > a$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{40}$$

Гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2} g^{ab} p_a p_b, \qquad a,\ b = 0, 1, 2, 3. \tag{41}$$

Далее $g^{00} = (g_{00})^{-1} = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}$, $g^{rr} = (g_{rr})^{-1} = 1 - \frac{a}{r}$. Движение плоское. Поэтому можно положить $\theta = \frac{\pi}{2}$. В координатах t, r, φ, $x^0 = ct$ получим для уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial x^a} \frac{\partial S}{\partial x^b} g^{ab} = \text{const} =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} \left(\frac{\partial S}{c\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = g^{ab} p_a p_b. \tag{42}$$

Константа в правой части может быть отождествлена с величиной m^2c^2, так как (42) есть уравнение массовой поверхности. Как и в случае а), ищем действие S в виде

$$S = -Et + M\varphi + f(r, M, E).$$

Функции $r(t)$ и $r(\varphi)$ определятся из уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \text{const}, \qquad \frac{\partial S}{\partial M} = \text{const}.$$

Подставляя вид (43) в уравнение (42), найдем траекторию:

$$\varphi = \int \frac{M}{r^2} \left[\frac{E^2}{c^2} - \left(m^2c^2 + \frac{M^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{a}{r} \right) \right]^{-1/2} dr. \tag{44}$$

Величина $E = cp_0$ может быть отождествлена с энергией частицы ($E > mc^2$).

Замечание. Устремляя в формуле (44) m к нулю, можно получить движение частиц нулевой массы — например, световых лучей в метрике Шварцшильда.

Зависимость r от t описывается уравнением

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \frac{dr}{cdt} = \frac{1}{E} [E^2 - U^2(r)]^{1/2}, \quad m \neq 0, \tag{45}$$

где $U(r) = mc^2 \left[\left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(1 + \frac{M^2}{m^2c^2r^2}\right) \right]^{1/2}$. Величина $U(r)$ называется «эффективным потенциалом» при заданном моменте M. Условие $U(r) \leqslant E$ определяет при заданных M и E допустимые области движения (по r). График $\frac{U(r)}{mc^2}$ имеет вид, указанный на рис. 155.

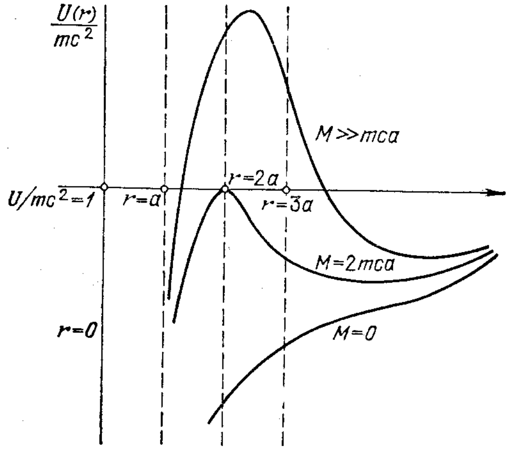

Рис. 155

Мы видим, что потенциал $U(r)$ может иметь максимум при величинах r (порядка) $2a$, в зависимости от M. При $r \to \infty$ имеем $U(r) \to 1$. Из рис. 155 видна, в частности, возможность «захвата» частиц гравитационным полем, т. е. движение $r(t)$, где $r(-\infty) = \infty$ и $r(+\infty)$ конечно.

§ 29. Слоения

1. Основные определения. Определение 1. 1) *k-мерным распределением* на n-мерном многообразии M называется гладкое поле k-мерных касательных направлений, т. е. функция, относящая каждой точке $x \in M$ линейное k-мерное подпространство касательного пространства $T_x M$. 2) Распределение называется *интегрируемым*, если через любую точку многообразия M проходит k-мерная интегральная поверхность, которая касается распределения в каждой своей точке. 3) Говорят, что на многообразии M задано *слоение* (размерности k), если многообразие M «расслоено» на k-мерные поверхности; это означает, что через каждую точку многообразия M проходит одна (и только одна) гладкая k-мерная поверхность, гладко (или непрерывно) зависящая от точки многообразия. Эти поверхности называются слоями слоения. Требуется, чтобы локально в многообразии около любой точки можно было ввести такие координаты $x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots$