«эффективным потенциалом» при заданном моменте M. Условие $U(r) \leqslant E$ определяет при заданных M и E допустимые области движения (по r). График $\frac{U(r)}{mc^2}$ имеет вид, указанный на рис. 155.

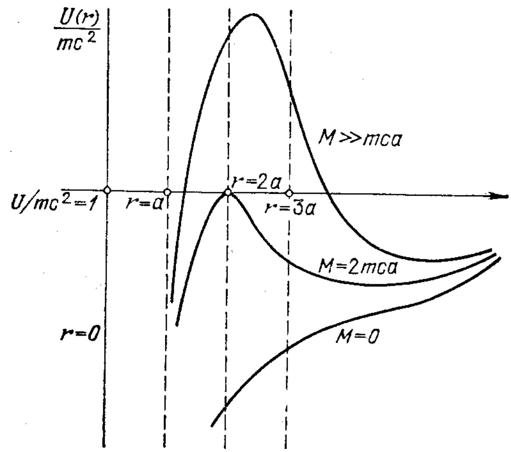


Рис. 155

Мы видим, что потенциал $U(r)$ может иметь максимум при величинах r (порядка) $2a$, в зависимости от M. При $r \to \infty$ имеем $U(r) \to 1$. Из рис. 155 видна, в частности, возможность «захвата» частиц гравитационным полем, т. е. движение $r(t)$, где $r(-\infty) = \infty$ и $r(+\infty)$ конечно.

§ 29. Слоения

1. Основные определения. Определение 1. 1) *k-мерным распределением* на n-мерном многообразии M называется гладкое поле k-мерных касательных направлений, т. е. функция, относящая каждой точке $x \in M$ линейное k-мерное подпространство касательного пространства T_xM. 2) Распределение называется *интегрируемым*, если через любую точку многообразия M проходит k-мерная интегральная поверхность, которая касается распределения в каждой своей точке. 3) Говорят, что на многообразии M задано *слоение* (размерности k), если многообразие M «расслоено» на k-мерные поверхности; это означает, что через каждую точку многообразия M проходит одна (и только одна) гладкая k-мерная поверхность, гладко (или непрерывно) зависящая от точки многообразия. Эти поверхности называются слоями слоения. Требуется, чтобы локально в многообразии около любой точки можно было ввести такие координаты $x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots$

..., y^{n-k}, что поверхности уровня $y^1 = a_1, \ldots, y^{n-k} = a_{n-k}$ задают слои слоения в этой окрестности, а $x^1, \ldots, x^k$ — локальные координаты на слоях слоения.

Слоения задаются интегрируемыми распределениями.

Пример 1. Одномерное распределение, которое уже встречалось выше, задается не обращающимся в нуль векторным полем или полем направлений. Одномерное гладкое распределение всегда интегрируемо в силу локальной теоремы существования и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким образом, одномерное распределение всегда порождает слоение.

Пример 2. Пусть на n-мерном комплексном многообразии задано комплексное векторное поле (или поле одномерных комплексных направлений). В голоморфном случае, как и выше, это распределение всегда интегрируемо и порождает одномерное комплексное слоение. Рассмотрим, например, случай $n = 2$ и комплексное уравнение

$$\frac{dz}{dw} = \frac{P(z, w)}{Q(z, w)}, \tag{1}$$

где P и Q — многочлены степени m. Распределение $Q\,dz - P\,dw = 0$ порождает одномерное комплексное слоение на $\mathbb{C}^2$. Более того, производя подстановку

$$z = \frac{u_1}{u_0}, \quad w = \frac{u_2}{u_0},$$

получим одномерное комплексное слоение на многообразии $\mathbb{C}P^2 \supset \mathbb{C}^2$, задаваемой формой $\omega = Q\,dz - P\,dw$ (см. § 27 для $\mathbb{R}P^2$). Точки, в которых $P = Q = 0$, являются особыми для слоения (т. е. слоение задано фактически в дополнение к множеству этих точек).

Задача. Найдите особые точки на бесконечности.

Интересно исследовать поведение слоев комплексного слоения около невырожденной особой точки. Имеем

$$\begin{aligned} dz &= P(z, w)\,dt, & \dot z &= P, \\ dw &= Q(z, w)\,dt, & \dot w &= Q. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим особую точку $P = 0$, $Q = 0$. Пусть особой является точка $z = w = 0$, и пусть линейная часть

$$\begin{aligned} \dot z &= az + bw + \ldots; \\ \dot w &= cz + dw + \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

невырождена, т. е. $ad - bc \neq 0$. В случае общего положения собственные значения различны, и мы можем линейной заменой привести систему к виду

$$\begin{aligned} \dot z &= \lambda_1 z + \ldots, \\ \dot w &= \lambda_2 w + \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Исследуем чисто линейную систему $\frac{dz}{dw} = \lambda \frac{z}{w}$. Получим общее решение вида $z = aw^\lambda$, а также два слоя $A\,(z = 0)$ и $B\,(w = 0)$. Удалив особую точку $(0, 0)$, получим неособое слоение в области $\mathbb{C}^2 \setminus 0$. Слои A и B неодносвязны (оба они имеют топологию $\mathbb{C} \setminus 0$).

Задача. Пусть $\gamma_1 \in \pi_1(A)$ и $\gamma_2 \in \pi_1(B)$ — образующие. Покажите, что оба элемента γ_1 и γ_2 являются предельными циклами слоения. Вычислите представление голономии

$$\gamma_i \to R_{\gamma_i}$$

(определения см. ниже в этом параграфе).

Замечание. Вопрос о приводимости системы (3) к чисто линейному виду комплексно аналитической заменой координат около особой точки $(0, 0)$ более сложен и мы здесь его не обсуждаем.

Пример 3. Пусть имеется косое произведение (расслоение) с базой M, группой G, слоем F, пространством E и проекцией $p\colon E \to M$. Связность в косом произведении задавалась как семейство «горизонтальных» площадок $\mathbb{R}^n(y)$ в каждой точке $y \in E$ (см. § 24).

Задача. Проверьте, что распределение горизонтальных площадок в E интегрируемо (т. е. порождает n-мерное слоение) в том и только в том случае, если тензор кривизны связности тождественно равен нулю (см. условие интегрируемости ниже).

Если связность порождает интегрируемое распределение, то каждый слой W этого слоения локально изоморфно проектируется на базу. Таким образом, слои этого слоения — просто накрытия над M. Группа монодромии этого накрытия называется в данном случае «дискретной группой голономий»; см. § 19. Если база M односвязна, то слои W изоморфны многообразию M глобально.

Критерии интегрируемости k-мерного распределения, например, таковы.

1-я формулировка. Запишем локально задачу об интегрировании k-мерного распределения в виде

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} = f^\alpha_\beta(x, y), \quad \alpha = 1, \ldots, n-k, \quad \beta = 1, \ldots, k, \tag{5}$$

(«уравнения Пфаффа»).

Если слоение интегрируемо, то k-мерные слои (локально) изображаются вектор-функциями

$$y^\alpha(x^1, \ldots, x^k), \qquad \alpha = 1, \ldots, n-k,$$

где $x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^{n-k}$ — локальные координаты на многообразии M. Условие интегрируемости вытекает из условия

$$\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} f^\alpha_\beta(x, y(x)) = \frac{\partial}{\partial x^\beta} f^\alpha_\gamma(x, y(x)). \tag{6}$$

2-я формулировка. Рассмотрим два любых векторных поля ξ, η, касательных к k-мерному распределению в каждой точке. Если слоение интегрируемо, то коммутатор $[\xi, \eta]$ тоже должен касаться распределения. Это условие оказывается также достаточным (мы не доказываем достаточности сформулированных условий; их необходимость очевидна; проверьте!).

Задача. Докажите эквивалентность 1-й и 2-й формулировок условия интегрируемости.

Рассмотрим теперь другой особый случай слоений на n-мерных многообразиях — слоений, имеющих размерность слоев $k = n-1$ («слоения коразмерности 1»). Локально такое слоение задается 1-формой (или уравнением Пфаффа)

$$\omega = P_i(x)\,dx^i = 0; \tag{7}$$

в неособой точке функции P_i не все равны нулю. Если форма ω замкнута, то распределение (7) интегрируемо. Действительно, локально имеем $\omega = dH$ и уровни $H = \mathrm{const}$ задают слоение. Если $f(x)$ — всюду ненулевая функция («интегрирующий множитель») и форма $f(x)\omega$ замкнута, то распределение также интегрируемо. В самом деле, уравнение Пфаффа $f(x)\omega = 0$ эквивалентно $\omega = 0$, так как $f \neq 0$.

Замечание. Более общо, можно сказать, что слоение коразмерности 1 задается в каждой окрестности U_j из некоторого покрытия многообразия M уравнением $\omega_j = 0$ вида (7), а в пересечениях $U_i \cap U_j$ имеем $f_{ij}(x)\,\omega_i = \omega_j$, где $f_{ij} \neq 0$.

Далее, заметим, что если $d(f\omega) = 0$, то $d\omega = -\left(\frac{df}{f}\right) \wedge \omega$. Отсюда мы имеем два вывода: 1) $d\omega$ делится на ω; 2) $\omega \wedge d\omega = 0$.

Задача. Докажите, что условие интегрируемости (неособого) распределения $\omega = 0$ эквивалентно любому из условий:

1) $d\omega$ делится на ω;
2) $\omega \wedge d\omega = 0$.

В трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ форма ω записывается как ковекторное поле $P = (P_\alpha)$ и $d\omega$ — как $\operatorname{rot} P$; условие 2) приобретает вид

$$\langle P, \operatorname{rot} P\rangle = 0. \tag{8}$$

2. Примеры слоений коразмерности 1. 1. Пусть на компактном многообразии M задана замкнутая форма ω, $d\omega = 0$. Уравнение

$\omega=0$ задает слоение коразмерности 1. Рассмотрим базис одномерных циклов $z_1, \ldots, z_q$ из группы $\bar{H}_1(M)=H_1/\mathrm{Tors}$, где Tors — кручение. Форма ω определяет набор «периодов»

$$\oint_{z_j} \omega = a_j, \qquad j=1, \ldots, q.$$

Конечно, на универсальной накрывающей $\widehat{M} \xrightarrow{p} M$, $\pi_1(\widehat{M})=1$, форма $p^*(\omega)$ является точной:

$$p^*(\omega)=df. \tag{9}$$

Имеется, однако, меньшая накрывающая $p_1\colon M_1 \to M$, уже на которой форма $p_1^*(\omega)$ является точной. Пусть $A \subset \pi_1(M)$ — максимальная подгруппа группы π_1 такая, что для любого $z \in A$

$$\oint_z \omega = 0. \tag{10}$$

Очевидно, A содержит коммутант группы π_1; в частности, A — нормальный делитель. Рассмотрим такое накрытие $p_1\colon M_1 \to M$, что

$$\pi_1(M_1) = p_{1*}\pi_1(M_1) = A \subset \pi_1(M) \tag{11}$$

(см. § 19). Такое накрытие имеет группу монодромии

$$B = \sigma\pi_1(M) = \pi_1(M)/A. \tag{12}$$

Очевидно, что форма $p_1^*(\omega)$ на M_1 имеет нулевые периоды. Поэтому $p_1^*(\omega)=dg$, где g — числовая функция на M_1. Имеем

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} p_1^*(\omega). \tag{13}$$

Интеграл берется по любому пути на M_1, соединяющему точки x_0 и x, и не зависит от пути. Таким образом, исходное слоение на M после поднятия распределения на накрытие становится семейством поверхностей уровня функции $g(x)$, причем группа монодромии накрытия свободная абелева.

Примеры. 1. а) Пусть M — тор T^n с угловыми координатами $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$, $0 \leqslant \varphi^j \leqslant 2\pi$. Рассмотрим форму

$$\omega = b_i d\varphi^i, \qquad b_i = \mathrm{const}. \tag{14}$$

Задача. Покажите, что минимальное накрытие $p_1\colon M_1 \to T^n$, для которого $p_1^*\omega = dg$, имеет группу монодромии $\mathbb{Z} + \ldots + \mathbb{Z}$, где число слагаемых равно рангу набора $(b_1, \ldots, b_n)$ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

б) Пусть M — компактная риманова поверхность (одномерное комплексное многообразие) и ω — голоморфный дифференциал, имеющий локально вид $\omega = f(z)dz$, где $f(z)$ — аналитическая функция (без полюсов). Рассмотрим дифференциал $\operatorname{Re}\omega$, где локально

$$\operatorname{Re}\omega = \operatorname{Re}(f(z)dz) = \operatorname{Re}(u+iv)(dx+i\,dy) \tag{15}$$

$(z = x+iy,\ f = u+iv)$. Уравнение $\operatorname{Re}\omega = 0$ задает одномерное слоение на M.

Задача. Докажите, что особые точки этого одномерного слоения, если они невырождены, все являются седлами, и их число равно эйлеровой характеристике многообразия M. Исследуйте интегральные траектории этого одномерного слоения на гиперэллиптических римановых поверхностях вида

$$w^2 = P_{2n+1}(z) = \prod_{\alpha=0}^{2n}(z-z_\alpha), \quad z_\alpha \neq z_\beta. \tag{16}$$

Голоморфные дифференциалы ω (без полюсов) на этом многообразии имеют вид

$$\omega = \frac{Q(z)\,dz}{\sqrt{P_{2n+1}(z)}}, \tag{17}$$

где степень полинома Q не превышает $n-1$. Покажите, что для почти всех наборов (z_α) и почти всех форм ω вида (17) найдется всюду плотная на M интегральная траектория. Исследуйте слоения, задаваемые формами, имеющими полюса, т. е. формами вида (17), у которых Q — рациональная функция. Какие особые точки отвечают полюсам формы ω?

2. Более сложные слоения, которые становятся семействами поверхностей уровня функции на некоторой (но уже неабелевой) накрывающей, мы фактически уже строили выше. Рассмотрим пространство единичных линейных элементов T над компактной поверхностью M_g^2 с метрикой постоянной отрицательной гауссовой кривизны. В связи с геодезическими потоками определялись два слоения (двумерных) R_+ и R_- на T. Слои слоения R_+ состояли из геодезических, асимптотически сближающихся друг с другом при $t\to+\infty$ (для R_- — при $t\to-\infty$). Пересечение $R_+\cap R_-$ — одна геодезическая. На универсальной накрывающей над M_g^2, которая есть плоскость Лобачевского L^2, слои R_+ состоят из геодезических, входящих в одну точку абсолюта при $t\to+\infty$ (см. рис. 154). Для T соответствующая накрывающая p_1: $T_1\to T$ не универсальна — это пространство единичных линейных элементов над L^2, стягивающееся к слою S^1. Поэтому $\pi_1(T_1) = \mathbb{Z}$.

Задача. Покажите, используя информацию о замкнутых геодезических, что слоение R_+ (или R_-) является семейством поверхностей уровня числовой функции только на таких накрывающих p_2: $T_2\to T$, что T_2 накрывает T_1. [Напомним структуру группы $\pi_1(T)$. В ней имеются образующие $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$,

τ и соотношения

$$\prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = \tau^{2-2g}, \quad a_i\tau = \tau a_i, \quad b_i\tau = \tau b_i \tag{18}$$

(см. § 24). Группа монодромии накрытия $T_1 \to T$ совпадает с группой $\pi_1(M_g^2) = \pi_1(T)/(\tau)$. Это — неабелева группа.]

Слоения R_+ и R_- не имеют особых точек. Слои могут иметь разную топологию: очевидно, что слой R_+ стягивается к геодезической γ при $t \to +\infty$. Поэтому $R_+ \approx \mathbb{R}^2$, если геодезическая γ непериодична, и $R_+ \approx S^1 \times \mathbb{R}^1$, если она периодична. (Периодических траекторий при этом лишь счетное множество, как и классов сопряженности в $\pi_1(M_g^2)$.)

Замечание. Наличие пары слоений R_+ и R_- с указанными выше свойствами является характерным для геодезических потоков на компактных пространствах отрицательной кривизны и некоторых других. Это свойство является чрезвычайно важным в качественной теории динамических систем; оно приводит к ряду замечательных следствий, которые мы здесь не обсуждаем.

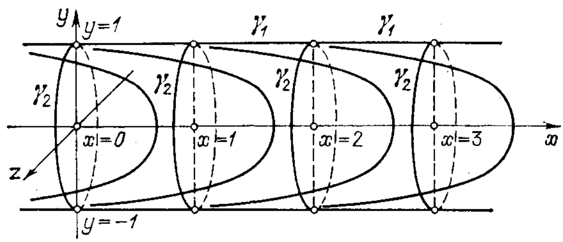


Рис. 156

3. Укажем геометрически простой пример двумерного слоения (Риба) в заполненном торе $D^2 \times S^1$, у которого граничный тор $T^2 = \partial(D^2 \times S^1)$ является целым слоем. Рассмотрим цилиндрическую область $U \subset \mathbb{R}^3$: $-\infty < x < \infty$, $y^2 + z^2 \leqslant 1$, $U \cong D^2 \times \mathbb{R}^1$ (рис. 156). Слои, лежащие внутри цилиндра, получаются друг из друга сдвигом $x \to x + a$, где a — любое число. Граница также есть слой. Слои инвариантны также относительно преобразования

$$y \to -y, \quad z \to -z,$$
$$x \to x.$$

Слоение получается из рис. 156 вращением в плоскости (y, z) вокруг оси x. Производя отождествление $(x, y, z) \sim (x + 1, y, z)$, получим слоение Риба в $D^2 \times S^1$. Так как граница $\partial(D^2 \times S^1)$ есть слой — тор T^2, то можно из двух слоений Риба построить слоение на сфере

$$S^3 = (D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2),$$

склеивая их по границе.

Укажем важные топологические инварианты слоения — «*предельные циклы*» и «*исчезающие циклы*». Рассмотрим слой W k-мерного слоения на компактном n-мерном многообразии M, точку $x_0 \in W$ и элемент γ группы $\pi_1(W, x_0)$, представленный гладкой замкнутой кривой γ на слое. В каждой точке $x \in \gamma$ построим трансверсальный к W диск D_x^{n-k}, гладко зависящий от

Предельный цикл
а

Непредельный цикл
б

Рис. 157

точки x (рис. 157 для $k = n-1$). Пересечения близких слоев W_y с семейством дисков D_x^{n-k} представляют собой кривые, дающие отображения «переноса вдоль γ»,

$$R_\gamma\colon D_{x_0}^{n-k} \to D_{x_0}^{n-k}. \qquad (19)$$

Легко видеть, что отображение R_γ не меняется при деформации семейства дисков D_x^{n-k} и деформации кривой γ, где точка x_0 неподвижна (размер дисков мал). Возникает отображение $\gamma \mapsto R_\gamma$ группы $\pi_1(W, x_0)$ в группу «ростков преобразований» трансверсального диска $D_{x_0}^{n-k}$ в себя, определенных в достаточно малой окрестности нуля, размер которой несуществен. Представление $\gamma \mapsto R_\gamma$ называется «группой голономии» слоения на слое W. Если $\gamma \in \pi_1(W)$ таково, что $R_\gamma \neq 1$, то γ называется *предельным циклом* слоения. В особом случае $k = n-1$ имеем отрезок $D_{x_0}^{n-k} = I$; точка $x_0 = 0$ разделяет отрезок I на две части. Поэтому здесь для гладких слоений возможны две ситуации (рис. 158).

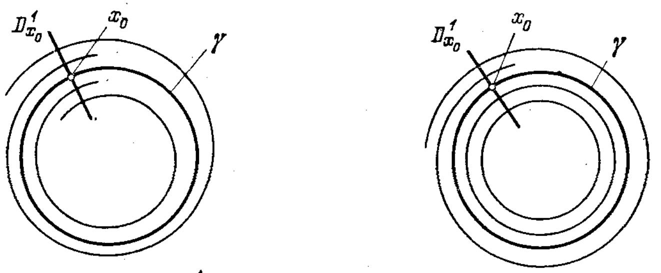
В случае а) цикл γ называется *двусторонним* предельным циклом слоения. В случае б) цикл γ называется «*односторонним*» предельным циклом. Так как гладкость отображений R_γ определяется гладкостью слоения, то в аналитических слоениях коразмерности 1 случай б) невозможен.

В примерах слоений выше мы имели следующие ситуации (проверьте!):

1) если неособое слоение задано замкнутой формой $d\omega = 0$, $\omega = 0$, то предельных циклов оно не имеет;

2) для слоений R_+ и R_- (на пространстве T линейных элементов компактной поверхности) неодносвязные слои бывают лишь с $\pi_1(W) = \mathbb{Z}$; при этом образующая группы $\pi_1(W) = \mathbb{Z}$ есть двусторонний предельный цикл слоения $R_\pm$;

3) для слоения Риба в заполненном торе $D^2 \times S^1$ на граничном торе T^2 имеется $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ с образующими γ_1 и γ_2 (см. рис. 156); образующая γ_1 есть предельный цикл «изнутри» заполненного тора; образующая γ_2 не является предельным циклом «изнутри» области.



Для всех $x \in I = D^1_{x_0}$, близких к точке $x_0 = 0$, имеем: $R_\gamma(x) \neq x$

а

$R_\gamma(x) \neq x$ для $x > 0$, $R_\gamma(x) = x$ для $x \leqslant 0$; x — точка отрезка $I = D^1_{x_0}$

б

Рис. 158

Для слоения на сфере $S^3 = (D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2)$, полученного склейкой двух слоений Риба, оба цикла γ_1 и γ_2 на торе T^2 являются «односторонними предельными циклами». Таким образом, склейка этих двух слоений не может быть аналитической (хотя и может быть бесконечно дифференцируемой). Если элемент $\gamma \in \pi_1(W)$ не является предельным циклом (т. е. если $R_\gamma = 1$), то его можно «сдвинуть» на достаточно близкие слои — он останется замкнутой кривой на близких слоях. (Если $k = n - 1$, то достаточно, чтобы γ не был предельным циклом с одной стороны, и его можно сдвинуть в эту сторону.)

Определение 2. Элемент $\gamma \in \pi_1(W)$ называется *исчезающим циклом* слоения, если сдвиг на любой достаточно близкий слой делает его гомотопным нулю на этом слое, в то время как $\gamma \neq 1$ в $\pi_1(W)$.

Например, для слоения Риба (см. рис. 156) имеем $W = T^2$. Элемент γ_2 можно сдвинуть на слои внутрь области $D^2 \times S^1$ и сдвиг будет гомотопен нулю на всех близких слоях (все близкие слои диффеоморфны $\mathbb{R}^2$).

Замечание. Известны следующие факты: а) любое гладкое слоение коразмерности 1 на S^3 имеет односторонний предельный цикл и поэтому неаналитично. б) Любое гладкое слоение коразмерности 1 на S^3 имеет замкнутый слой, диффеоморфный T^2 и ограничивающий область $D^2 \times S^1$ со слоением Риба. в) Если универсальная накрывающая $\widehat{M}$ трехмерного многообразия M нестягиваема и не диффеоморфна $S^2 \times \mathbb{R}$, то любое слоение коразмерности 1 на M имеет нетривиальные исчезающие циклы. г) Если слоение коразмерности 1 на трехмерном многообразии M не имеет предельных циклов, то найдется абелева накрывающая p_1: $M_1 \to M$ такая, что $M_1 = W \times \mathbb{R}^1(x)$ и слои слоения на M_1 — это поверхности $x = \text{const}$. Таким образом, $M = W \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$. Топологически эти слоения устроены так же, как слоения, задаваемые замкнутой невырожденной 1-формой (см. выше). Этих фактов мы не доказываем.

§ 30. Вариационные задачи с высшими производными. Гамильтоновы полевые системы

1. Гамильтонов формализм задач с высшими производными. На любом многообразии в принципе может быть поставлена вариационная задача отыскания экстремумов величины $S = \int L dt$, где лагранжиан L является скалярной функцией не только скорости $v = \dot{x}$, но и высших производных по времени: локально, в области координат $x^1, \ldots, x^n$ будем иметь $L = L(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots \ldots, x^{(m)})$. Пусть $v_q^\alpha = \dfrac{d^q x^\alpha}{dt^q}$. Следующая лемма показывает, что в этой ситуации также возникает уравнение Эйлера — Лагранжа.

Лемма 1. *Уравнение $\delta S = 0$ эквивалентно следующему уравнению Эйлера — Лагранжа:*

$$\sum_{q=0}^{m} (-1)^q \frac{d^q}{dt^q} \left(\frac{\partial L}{\partial v_q^\alpha} \right) = 0. \tag{1}$$

Доказательство леммы производится обычным интегрированием по частям. Имеем

$$\delta S = \int \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{\partial L}{\partial v_q^\alpha} \delta v_q^\alpha \right) dt. \tag{2}$$

Здесь предполагается, что вариация $\delta x^\alpha(t)$ бесконечно дифференцируема и обращается в нуль вне избранной малой окрестности. Далее по определению имеем

$$\delta v_q^\alpha = \frac{d^q}{dt^q} (\delta x^\alpha(t)). \tag{3}$$

Интегрируя q раз по частям слагаемое с множителем $\delta v_q^\alpha(t)$, получим

$$\delta S = \int \left(\sum_{q,\alpha} (-1)^q \frac{d^q}{dt^q} \left(\frac{\partial L}{\partial v_q^\alpha} \right) \right) \delta x^\alpha(t)\, dt. \tag{4}$$