гиваема и не диффеоморфна $S^2 \times \mathbb{R}$, то любое слоение коразмерности 1 на M имеет нетривиальные исчезающие циклы. г) Если слоение коразмерности 1 на трехмерном многообразии M не имеет предельных циклов, то найдется абелева накрывающая p_1: $M_1 \to M$ такая, что $M_1 = W \times \mathbb{R}^1(x)$ и слои слоения на M_1 — это поверхности $x = \text{const}$. Таким образом, $M = W \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$. Топологически эти слоения устроены так же, как слоения, задаваемые замкнутой невырожденной 1-формой (см. выше). Этих фактов мы не доказываем.

§ 30. Вариационные задачи с высшими производными. Гамильтоновы полевые системы

1. Гамильтонов формализм задач с высшими производными. На любом многообразии в принципе может быть поставлена вариационная задача отыскания экстремумов величины $S = \int L dt$, где лагранжиан L является скалярной функцией не только скорости $v = \dot{x}$, но и высших производных по времени: локально, в области координат $x^1, \ldots, x^n$ будем иметь $L = L(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots$ $\ldots, x^{(m)})$. Пусть $v_q^\alpha = \dfrac{d^q x^\alpha}{dt^q}$. Следующая лемма показывает, что в этой ситуации также возникает уравнение Эйлера — Лагранжа.

Лемма 1. *Уравнение $\delta S = 0$ эквивалентно следующему уравнению Эйлера — Лагранжа:*

$$\sum_{q=0}^{m} (-1)^q \frac{d^q}{dt^q} \left(\frac{\partial L}{\partial v_q^\alpha} \right) = 0. \tag{1}$$

Доказательство леммы производится обычным интегрированием по частям. Имеем

$$\delta S = \int \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{\partial L}{\partial v_q^\alpha} \delta v_q^\alpha \right) dt. \tag{2}$$

Здесь предполагается, что вариация $\delta x^\alpha(t)$ бесконечно дифференцируема и обращается в нуль вне избранной малой окрестности. Далее по определению имеем

$$\delta v_q^\alpha = \frac{d^q}{dt^q} (\delta x^\alpha(t)). \tag{3}$$

Интегрируя q раз по частям слагаемое с множителем $\delta v_q^\alpha(t)$, получим

$$\delta S = \int \left(\sum_{q,\alpha} (-1)^q \frac{d^q}{dt^q} \left(\frac{\partial L}{\partial v_q^\alpha} \right) \right) \delta x^\alpha(t)\, dt. \tag{4}$$

Отсюда, как и в § 31 части I, ввиду произвольности вариаций δx^α следует уравнение (1).

Лемма доказана.

Величина $\sum(-1)^q\left(\frac{\partial L}{\partial v_q^\alpha}\right)^{(q)}=\frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)}$ называется *вариационной производной.*

Замечание. Для лагранжианов в теории поля мы уже встречали вариационный принцип Гильберта для уравнения Эйнштейна, в котором

$$S=\int R\sqrt{-g}\,d^4x,$$

и R зависит от полей $g_{ab}(x)$ со вторыми производными. Однако здесь вторые производные входили линейно. Можно избавиться от них с помощью несущественных добавок под интегралом. Кроме того, все другие лагранжианы, содержащие кривизну, также содержали вторые производные. Например, лагранжианы, имеющие тождественно нулевую вариационную производную,— характеристические классы (см. § 42, часть I и § 25).

Таким образом, из уравнений (1) видно, что они, вообще говоря, имеют порядок $2m$, где m — число производных в L. Оказывается, имеется некоторый аналог преобразования Лежандра, в невырожденном случае приводящий систему к гамильтоновой форме на пространстве размерности $2mn$, где n — размерность исходного многообразия M (теорема Остроградского). Имея в виду интересные приложения вариационных задач с производными больших порядков, мы рассмотрим лишь случай $n=1$, где мы имеем дело с одной координатой u и ее производными $u', \ldots, u^{(m)}$. Независимую переменную (время) мы будем далее обозначать через $x, u'=\frac{du}{dx}$. Рассмотрим лагранжиан на прямой

$$L=L(u,\ u',\ \ldots,\ u^{(m)}). \tag{5}$$

Введем переменные

$$\begin{gathered}
q_1=u,\quad q_2=u',\ \ldots,\quad q_m=u^{(m-1)};\\
p_1=\frac{\partial L}{\partial u'}-\left(\frac{\partial L}{\partial u''}\right)'+\ldots+(-1)^{m-1}\left(\frac{\partial L}{\partial u^{(m)}}\right)^{(m-1)};\\
p_2=\frac{\partial L}{\partial u''}-\left(\frac{\partial L}{\partial u'''}\right)'+\ldots+(-1)^{m-2}\left(\frac{\partial L}{\partial u^{(m)}}\right)^{(m-2)},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
p_m=\frac{\partial L}{\partial u^{(m)}}.
\end{gathered} \tag{6}$$

Пусть

$$H(p,q)=L-u'p_1-u''p_2-\ldots-u^{(m)}p_m. \tag{7}$$

Определение 1. Лагранжиан $L(u, u', \ldots, u^{(m)})$ называется *невырожденным*, если уравнения (6) могут быть однозначно разрешены в виде

$$u = u(p, q), \quad u' = u'(p, q), \ldots, u^{(2m-1)} = u^{(2m-1)}(p, q).$$

Лемма 2. *Если лагранжиан L имеет вид*

$$L = a(u^{(m)})^2 + \tilde{L}(u, u', \ldots, u^{(m-1)}), \tag{8}$$

то он невырожден.

Доказательство. Очевидно, что последнее из уравнений (6) в данном случае однозначно разрешимо в виде

$$p_m = 2au^{(m)}.$$

Для p_{m-1} имеем

$$p_{m-1} = \frac{\partial L}{\partial u^{(m-1)}} - \left(\frac{\partial L}{\partial u^{(m)}}\right)' = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^{(m-1)}} - p_m' = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^{(m-1)}} - 2au^{(m+1)}. \tag{9}$$

Заметим, что $u^{(\alpha)} = q_{\alpha+1}$, $\alpha = 0, \ldots, m-1$. Поэтому $p_{m-1} = f(q_1, \ldots$ $\ldots, q_m) - 2au^{(m+1)}$ или $u^{(m+1)} = p_{m-1}/2a + f(q_1, \ldots, q_m)$. Очевидно, что так мы решим рекуррентно всю систему (6). Лемма доказана.

Наконец, имеет место

Теорема 1 (Остроградский). *Для невырожденных лагранжианов уравнение Эйлера — Лагранжа эквивалентно системе Гамильтона*

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}, \quad \alpha = 1, \ldots, m, \tag{10}$$

где $H(p, q) = L - u'p_1 - u''p_2 - \ldots - u^{(m)}p_m$.

Доказательство для простоты вычислений дадим в случае $m = 2$. Пусть $L = L(u, u', u'')$. Уравнение Эйлера — Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial u''} = 0. \tag{11}$$

Канонические переменные таковы:

$$\begin{aligned} q_1 &= u, & q_2 &= u', \\ p_1 &= \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u''}, & p_2 &= \frac{\partial L}{\partial u''}. \end{aligned} \tag{12}$$

Потребуем, чтобы из последнего уравнения можно было выразить u'' в виде

$$u'' = f(q_1, q_2, p_2)$$

(условие невырожденности лагранжиана). Гамильтониан имеет вид

$$H = p_1u' + p_2u'' - L(u, u', u'') = p_1q_2 + p_2q_2' - L(q_1, q_2, q_2') =$$
$$= p_1q_2 + \Phi(q_1, q_2, p_2).$$

Из формул (12), очевидно, имеем

$$q_1' = u' = q_2 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad q_2' = u'' = \frac{\partial H}{\partial p_2},$$

$$p_2' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial u''}\right) = -p_1 + \frac{\partial L}{\partial u'} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}.$$

Из (11) следует, что $\frac{dp_1}{dx} = \frac{\partial L}{\partial u}$; поэтому $p_1' = -\frac{\partial H}{\partial q_1}$, и мы получаем гамильтонову систему (10) в фазовом пространстве с координатами q_1, q_2, p_1, p_2. Теорема доказана.

2. Примеры. Пусть $\mathscr{L} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x)$ — оператор Штурма — Лиувилля с гладким потенциалом $u(x)$. Особенный интерес представляют случаи:

а) $u(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ $\left(\text{если } \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|(1+|x|)\,dx < \infty,\right.$ то этот потенциал называют *быстроубывающим*);

б) $u(x+T) = u(x)$ (*периодический потенциал*).

Рассмотрим пока чисто формально дифференциальное уравнение

$$\mathscr{L}\psi = \lambda\psi, \qquad \psi = \psi(x, \lambda), \tag{13}$$

где λ — «спектральный параметр». Уравнение (13) при замене $\chi(x, \lambda) = -i\frac{d\ln\psi}{dx}$ приводится к виду Риккати:

$$i\chi' + \chi^2 = \lambda - u. \tag{14}$$

Пусть $\lambda = k^2$. При $\lambda \to \infty$ уравнение (14) имеет решение в виде формального ряда по переменной $\sqrt{\lambda} = k$:

$$\chi(x, k) = k + \sum_{n\geqslant 1} \frac{\chi_n(x)}{(2k)^n}. \tag{15}$$

Подставляя (15) в уравнение Риккати (14), мы увидим следующее:

а) все $\chi_n(x)$ являются многочленами от u, u', u'', ..., $u^{(k)}$ с постоянными коэффициентами;

б) все $\chi_{2q}(x)$ являются полными производными и чисто мнимы; это отражает тот факт, вытекающий из уравнения Риккати (14), что

$$\chi_{\mathrm{Im}} = -\frac{1}{2}(\ln \chi_{\mathrm{Re}})', \tag{16}$$

где $\chi = \chi_{\mathrm{Re}} + i\chi_{\mathrm{Im}}$;

в) первые из полиномов $\chi_{2m+1}(x)$ с точностью до полных производных и несущественных множителей имеют вид

$$\chi_1(x) = u(x) + f_1', \quad \chi_3(x) = u^2 + f_3',$$
$$\chi_5(x) = \frac{u'^2}{2} + u^3 + f_5', \tag{17}$$
$$\chi_7(x) = \frac{u''^2}{2} - \frac{5}{2}u^2u'' + \frac{5}{2}u^4 + f_7'.$$

Введем лагранжианы

$$L_q(u, u'; u'', \ldots) = \chi_{2q+3}(x) + f_{2q+3}'. \tag{18}$$

Можно показать, что все лагранжианы L_q невырождены. Изучим лагранжианы $L_q = \chi_{2q+3}(u, u', u'', \ldots)$ при $q \leqslant 2$. Эти лагранжианы обладают замечательным свойством: для каждого числа $q \geqslant 0$ найдется дифференциальный оператор A_q порядка $2q+1$, коэффициентами которого служат полиномы от $u, u', u'', \ldots$ (с постоянными коэффициентами), такой, что коммутатор $[\mathscr{L}, A_q] = \mathscr{L}A_q - A_q\mathscr{L}$ есть оператор умножения на скалярную функцию $f_q(u, u', u'', \ldots)$:

$$[\mathscr{L}, A_q] = f_q(u, u', u'', \ldots) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta S_q}{\delta u(x)}, \quad S_q = \int L_q dx. \tag{19}$$

Мы не доказываем здесь эти факты в общем виде. При $q = 0, 1, 2$ они проверяются прямым вычислением, которое приводит к следующим результатам:

$$[\mathscr{L}, A_0] = \mathscr{L}A_0 - A_0\mathscr{L} = f_0 = u' = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta S_0}{\delta u(x)},$$
$$S_0 = \int \frac{u^2}{2}dx, \quad A_0 = -\frac{\partial}{\partial x};$$

$$[\mathscr{L}, A_1] = \mathscr{L}A_1 - A_1\mathscr{L} = f_1 = 6uu' - u''' = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta S_1}{\delta u(x)},$$
$$S_1 = \int\left(\frac{u'^2}{2} + u^3\right)dx, \quad A_1 = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3\left(u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}u\right);$$

$$[\mathscr{L}, A_2] = \mathscr{L}A_2 - A_2\mathscr{L} = f_2 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta S_2}{\delta u(x)},$$
$$S_2 = \int L_2 dx = \int\left(\frac{u''^2}{2} - \frac{5}{2}u^2u'' + \frac{5}{2}u^4\right)dx,$$
$$A_2 = 16\frac{\partial^5}{\partial x^5} - 20\left(u\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}u\right) + 30u\frac{\partial}{\partial x}u + 5\left(u''\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}u''\right).$$

Таким образом, можно составить «уравнение коммутативности»:

$$[\mathscr{L}, A_q + c_1A_{q-1} + \ldots + c_qA_0] = 0. \tag{20}$$

Еще в 20-х гг. было открыто любопытное свойство коммутирующей пары операторов: они связаны алгебраическим соотношением $R(\mathscr{L}, A)=0$, определяющим некоторую риманову поверхность. Уравнение коммутативности является лагранжевым (это — современное наблюдение):

$$0=[\mathscr{L}, A]=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta S}{\delta u(x)},$$
$$S=S_q+\sum_{i\geqslant 1}^{n}c_iS_{q-i}. \quad S_j=\int \chi_{2j+3}dx. \tag{21}$$

Окончательно имеем уравнение коммутативности в виде

$$\frac{\delta S}{\delta u(x)}=0, \text{ где } S=S_q+c_1S_{q-1}+\ldots+c_qS_0+c_{q+1}S_{-1},$$

причем $S_{-1}=-\int u\,dx$. Исследуем это уравнение при $q\leqslant 2$. Здесь лагранжиан L зависит от u, u', u'': $L=L(u, u', u'')$. Итак, имеем лагранжианы

(А) $L=L_0+c_1L_{-1}=u^2+c_1u$;

(Б) $L=L_1+c_1L_0+c_2L_{-1}=\frac{u'^2}{2}+u^3+c_1u^2+c_2u$;

(В) $L=L_2+c_1L_1+c_2L_0+c_3L_{-1}=$

$$=\frac{u''^2}{2}-\frac{5}{2}u''u^2+\frac{5}{2}u^4+c_1\left(\frac{u'^2}{2}+u^3\right)+c_2u^2+c_3u.$$

Уравнение коммутативности

$$\frac{\delta}{\delta u(x)}\int L\,dx=0 \tag{22}$$

принимает следующий вид:

(А) $u=-\frac{c_1}{2}$, если $q=0$,

(Б) $u''=3u^2+2c_1u+c_2=-\frac{\partial V}{\partial x}, \quad -V=u^3+c_1u^2+c_1u$

или

$$x-x_0=\int\frac{du}{\sqrt{u^3+c_1u^2+c_2u+d}} \tag{23}$$

(удвоенная эллиптическая функция Вейерштрасса $2\wp(x)$), если $q=1$. Делая замену $u\to u+\text{const}$, мы без ограничения общности можем считать $c_1=0$.

(В) При $q=2$ систему удобно записать в гамильтоновой форме, следуя (6) и (7):

$$H(p, q)=L-u'p_1-u''p_2-\ldots-u^{(m)}p_m,$$
$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad \dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}. \tag{24}$$

Для интегрирования необходим еще один интеграл. Оказывается, в уравнениях коммутативности (21) имеется весьма интересная «скрытая симметрия», приводящая к полной интегрируемости.

3. Гамильтонов формализм полевых систем. При отсутствии диссипации энергии и термодинамической необратимости физические системы являются «консервативными». Современные представления о физически осмысленных системах состоят в том, что консервативные системы должны быть гамильтоновы. Однако, как показывают примеры, гамильтонов формализм может быть нетривиальным, не сводящимся к лагранжеву формализму. Дадим здесь некоторые сведения о теоретико-полевом гамильтоновом формализме. В его основе, как и в конечномерном случае, лежит важное понятие «скобки Пуассона». Рассмотрим далее функциональные пространства, состоящие из C^∞-гладких функций $u^j(x^1, \ldots, x^n)$ от n переменных, не уточняя их области определения и граничных условий. При этом будем использовать такое соглашение, что интеграл по всему пространству $\int(\ldots)\,d^nx$ от полной производной (полной дивергенции) всегда равен нулю в этом формальном исчислении, так как мы не обсуждаем граничных условий и все вариации финитны.

Скобка Пуассона определяется для функционалов от полей $u^1, \ldots, u^m$. Однако, следуя принятому в теоретической физике формализму, ее удобно записывать через «точечные функционалы», сосредоточенные на одном из полей в одной точке. Формально определяем скобку Пуассона как операцию $\{,\}$, задаваемую формулой

$$\{u^i(x),\ u^j(y)\} = F^{ij}(x,\ y), \tag{25}$$

где кроме обычных i, j имеются непрерывные индексы x, y. Скобка Пуассона должна быть линейна по каждому аргументу, должна обладать свойством Лейбница (28.7), быть кососимметричной и, наконец, удовлетворять тождеству Якоби (28.8) (см. § 28). Напомним, что тождество Лейбница состоит в следующем: $\{fg,\ h\} = f\{g,\ h\} + g\{f,\ h\}$. Пусть $J = \int P(u,\ \nabla u,\ \ldots)\,d^ny$ — произвольный функционал. Вычислим скобку Пуассона $\{u^i(x),\ J\}$. Ввиду линейности имеем

$$\left\{u^i(x),\ \int P\,d^ny\right\} = \int \{u^i(x),\ P(y)\}\,d^ny,$$

$$\left\{u^i(x),\ \frac{\partial}{\partial y^k}v(y)\right\} = \frac{\partial}{\partial y^k}\{u(x),\ v(y)\}.$$

Пусть далее для упрощения обозначений в вычислениях рассматривается случай одного поля u и одной переменной x, хотя это и не важно. Из свойства Лейбница вместе с линейностью вытекает

$$\{u(x),\ P(y)\} = \{u(x),\ u(y)\}\frac{\partial P}{\partial u}(y) + \\ + \{u(x),\ u'(y)\}\frac{\partial P}{\partial u'}(y) + \ldots + \frac{\partial P}{\partial u^{(n)}}(y)\{u(x),\ u^{(n)}(y)\}.$$

Имеем

$$\{u(x),\ P(y)\} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{\partial P}{\partial u^{(k)}}(y)\frac{\partial^k}{\partial y^k}\{u(x),\ u(y)\}.$$

Так как $(fg)' = f'g + fg'$, окончательно получим

$$\left\{u(x),\ \int P dy\right\} = \int \{u(x),\ u(y)\}\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial y^k}\left(\frac{\partial P}{\partial u^{(k)}}\right)dy,$$

или

$$\{u^i(x),\ J\} = \int \{u^i(x),\ u^k(y)\}\frac{\delta J}{\delta u^k(y)}d^n y. \tag{26}$$

Формула (26) верна для любого числа полей и любого числа переменных. Доказательство полностью аналогично.

Из формулы (26) вытекает такая формула для скобки пары функционалов J_1, J_2:

$$\{J_1,\ J_2\} = \int \frac{\delta J_1}{\delta u^i(x)}\frac{\delta J_2}{\delta u^k(y)}\{u^j(x),\ u^k(y)\}\,d^n x d^n y, \tag{27}$$

где

$$\delta J = \int \frac{\delta J}{\delta u^j(x)}\delta u^j(x)\,d^n x$$

(по определению все вариации $\delta u^j(x)$ финитны).

Определение 2. Скобка Пуассона (25) называется *локальной*, если она задана конечной суммой

$$\{u^i(x),\ u^j(y)\} = F^{ij}(x,\ y) = \sum_k B_k^{ij}\partial_x^k\delta(x-y), \tag{28}$$

где $k=(k_1, \ldots, k_n)$, $k_j \geqslant 0$, $\partial_x^k = \partial_{1x}^{k_1}\ldots\partial_{nx}^{k_n}$, $\partial_{jx} = \partial/\partial x^j$. Символ $\delta(x-y) = \prod_{i=1}^n \delta(x^i - y^i)$ представляет собой обычную δ-функцию (ядро единичного оператора)

$$\int f(x)\,\delta(x-y)\,d^n x = f(y),$$

$$\int f(x)\,\partial_x^k\delta(x-y)\,d^n x = (-1)^{k_1+\ldots+k_n}\partial_y^k f(y).$$

Мы воспринимаем здесь все эти символы формально-алгебраически, не обсуждая функциональных пространств. Набор коэффициентов B_k должен зависеть от полей u только в точке x и от конечного числа их производных в той же точке («принцип локальности»).

Обозначим через A дифференциальный оператор

$$A = (A_x^{ij}) = \sum_k B_k^{ij}(u)\,\partial_x^k,$$

где сумма считается конечной. Из формулы (26) имеем

$$\{u^i(x),\ J\} = \int \{u^i(x),\ u^j(y)\}\,\frac{\delta J}{\delta u^j(y)}\,d^n y = \int \left(A_x^{ij}\,\delta(x-y)\right)\frac{\delta J}{\delta u^j(y)}\,d^n y = \int \delta(x-y)\left(A^*\,\frac{\delta J}{\delta u(y)}\right)d^n y = (A^*)^{ij}\,\frac{\delta J}{\delta u^j(y)},$$

где A^* — сопряженный оператор, $(v(x)\partial_j)^* = -\partial_j(v(x)\ldots)$. Учитывая косую симметрию скобки Пуассона $A^* = -A$, получаем

$$\{u^i(x),\ J\} = -A^{ij}\frac{\delta J}{\delta u^j(x)}. \tag{29}$$

Аналогично для пары функционалов в силу (27) верна формула

$$\{J_1,\ J_2\} = \int \frac{\delta J_1}{\delta u^i(x)}\,A^{ij}\,\frac{\delta J_2}{\delta u^j(x)}\,d^n x, \tag{30}$$

где интегрирование по y выполняется тривиально в силу свойств δ-функции. Проверка тождества Якоби для произвольной скобки Пуассона вида (30), заданной матричным оператором $A = (A^{ij})$, сложнее. Ясно, однако, что для операторов A, коэффициенты которых «постоянны» — т. е. не зависят от полей u и их производных (они могут явно зависеть от x),— тождество Якоби выполнено. Это — буквальный аналог скобок Пуассона с постоянными коэффициентами в конечномерном случае.

Простейшие примеры. Постоянные скобки.

1. *Лагранжева скобка.* Пусть заданы поля $p_1, \ldots, p_n, q^1, \ldots, q^n$ со скобками

$$\begin{aligned} \{p_i(x),\ p_j(y)\} &= \{q^i(x),\ q^j(y)\} = 0,\\ \{q^i(x),\ p_j(y)\} &= \delta^i_j\,\delta(x-y). \end{aligned} \tag{31}$$

Такая скобка Пуассона возникает из невырожденных функционалов вида

$$S\{q\} = \int \Lambda\left(q, \frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial x^\alpha}\right) d^n x\,dt,$$

$$p_j(x) = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot q^j},\quad \dot q^j = \frac{\partial q^j}{\partial t}.$$

Согласно формулам (6), (7) можно легко обобщить это и на лагранжианы с производными больших порядков. Если взять гамильтониан

$$P_0 = \mathscr{H} = \int T_0^0 d^n x = \int \left(p_j \dot{q}^j - \Lambda\right) d^n x, \tag{32}$$

то уравнения Эйлера — Лагранжа приобретут гамильтонов вид (проверьте!)

$$\begin{gathered} \dot{p}_j(x) = \{p_j(x), \mathscr{H}\} = -\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta q^j(x)}, \\ \dot{q}^j(x) = \{q^j(x), \mathscr{H}\} = \frac{\delta\mathscr{H}}{\delta p_j(x)}. \end{gathered} \tag{33}$$

Компоненты полного импульса

$$P_\alpha = \frac{1}{c}\int T_\alpha^0 d^n x = \frac{1}{c}\int p_j \frac{\partial q^j}{\partial x^\alpha} d^n x \tag{34}$$

являются генераторами групп сдвигов по координатам x^α, если принять их за гамильтонианы (проверьте!).

2. *Уравнение Кортевега — де Фриза* (КдФ). Мы имеем одно поле $u(x)$ и скобку

$$\{u(x), u(y)\} = \delta'(x-y). \tag{35}$$

Эта скобка обладает «аннулятором» I_0, т. е. таким функционалом, что

$$\{u(x), I_0\} = 0, \quad I_0 = \int u\, dx.$$

Импульс (генератор сдвигов по x) имеет вид

$$P = \int \frac{1}{2} u^2\, dx, \quad \{u(x), P\} = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{36}$$

Гамильтониан вида (37) порождает известное уравнение КдФ

$$-\mathscr{H} = \int \left(\frac{1}{2}u_x^2 + u^3 + \frac{c}{2}u^2\right) dx. \tag{37}$$

Уравнение КдФ таково:

$$\dot{u}(x) = \{u(x), \mathscr{H}\} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta u(x)} = 6uu_x - u_{xxx} + cu_x. \tag{38}$$

З а д а ч а. Докажите, что все величины (17) порождают законы сохранения для КдФ, т. е. для $S_q = \int L_q\, dx$ в силу КдФ имеем $\dot{S}_q = 0$. Докажите, что $\{S_q, S_l\} = 0$, $\mathscr{H} = S_1 + cS_0$.

Как и в конечномерном гамильтоновом формализме (см. § 34 части I), основным нетривиальным свойством скобок Пуассона, для которого нельзя обойтись без тождества Якоби (кроме остальных, более простых свойств), является следующее. Пусть имеются три функционала J_1, J_2, $J_3=\{J_1, J_2\}$. Они задают три гамильтоновых векторных поля («потоки») на функциональном пространстве по формуле

$$\frac{\partial u^j(x)}{\partial t_\alpha}=\{u^j(x),\ J_\alpha\},\qquad \alpha=1,\ 2,\ 3.$$

Тогда коммутатор первых двух потоков равен третьему. Если $\{J_1, J_2\}=0$, то порожденные ими потоки коммутируют.

«Аннулятором» скобки Пуассона называют совокупность функционалов, имеющих нулевую скобку с любым функционалом. Невырожденные скобки не имеют нетривиального аннулятора.

Интересные примеры скобок Пуассона возникают в гидродинамике. Будем исходить из алгебры Ли L_n векторных полей в $\mathbb{R}^n$, состоящей из полей с нулевой дивергенцией:

Имеем (см. § 23 части I)

$$[v,\ w]^k=v^i\partial_i w^k-w^i\partial_i v^k,$$

где $v=v^ie_i$, $w=w^ie_i$, $[e_i,\ e_j]=0$. На языке структурных констант для набора компонент — полей $v^i(x)$, $w^j(y)$ — их коммутатор таков:

$$[v,\ w](z)=\int\int c_{ij}^k(x,\ y,\ z)\,v^i(x)\,w^j(y)\,e_k d^nx d^ny, \tag{39}$$

поэтому

$$c_{ij}^k(x,\ y,\ z)=\delta_j^k\delta(x-z)\,\delta_i(x-y)-\delta_i^k\delta(y-z)\,\delta_j(y-x). \tag{40}$$

Сопряженное пространство L_n^* имеет своими координатами поля $p_j(x)$, где выражения (скалярные произведения)

$$\int p_j(x)\,v^j(x)\,d^nx \tag{41}$$

не меняются при гладких заменах переменных x. Таким образом, величина $p=(p_1,\ \ldots,\ p_n)$ с точки зрения теории тензоров является плотностью ковектора, которая при заменах $x(x')$ дополнительно умножается на якобиан J. Будем называть величину p *плотностью импульса*. Скобка Пуассона имеет вид

$$\begin{aligned}\{p_i(x),\ p_j(y)\}=\int c_{ij}^k(x,\ y,\ z)\,p_k(z)\,d^nz=\\ =p_i(y)\,\delta_j(x-y)-p_j(x)\,\delta_i(y-x).\end{aligned} \tag{42}$$

Сопряженное пространство L_n^{0*} имеет вид фактора:

$$L_n^{0*}=L_n^*/(p_j=\partial_j\varphi), \tag{43}$$

так как для плотностей вида $p_j=\partial_j\varphi$ имеем

$$\int(\partial_j\varphi)\,v^j\,d^nx=-\int\varphi\,(\partial_jv^j)\,d^nx\equiv 0$$

в силу условия $\partial_j v^j = 0$ для $v \in L_n^0$. Уравнения гидродинамики несжимаемой жидкости с плотностью $\rho = \mathrm{const}$ задаются гамильтонианом

$$\mathscr{H} = \int \frac{p^2}{2\rho} d^n x \tag{44}$$

на фазовом пространстве L_n^{0*}, $\partial_i v^i = 0$, при условии $p_i = \rho v^i$ в евклидовой метрике. Эти уравнения пишут обычно на всем L_n в виде системы

$$\begin{gathered}\dot{p}_i = \rho \dot{v}^i = \rho\left(v^k \partial_k\right) v_i + \frac{1}{2} \partial_i \rho v^2 + \partial_i P, \\ \partial_i v^i = 0,\end{gathered} \tag{45}$$

где P — давление, определяемое из формулы (45).

Для сжимаемой жидкости следует рассмотреть расширение алгебры L_n «внутренними переменными». На языке полей следует добавить новые полевые переменные — плотность массы ρ и плотность энтропии s — со скобками

$$\begin{gathered}\{p_i(x),\ \rho(y)\} = \rho(x)\, \delta_i(x-y), \\ \{p_i(x),\ s(y)\} = s(x)\, \delta_i(x-y), \\ \{s(x),\ s(y)\} = \{\rho(x),\ \rho(y)\} = \{s(x),\ \rho(y)\} = 0.\end{gathered} \tag{46}$$

Гамильтониан имеет вид (в евклидовом пространстве)

$$\mathscr{H} = \int \left[\frac{p^2}{2\rho} + \varepsilon_0(\rho,\ s)\right] d^n x, \quad \rho v_i = p_i.$$

Задачи. 1. Покажите, что $\{v_i(x),\ v_j(y)\} = \frac{1}{\rho}(\partial_i v_j - \partial_j v_i)\delta(x - y)$.

2. Рассмотрим подстановку («переменные Клебша»)

$$p_i = \rho \partial_i \psi + s \partial_i \alpha$$

в размерности $n = 2$. Покажите, что скобки имеют вид (выписаны все ненулевые)

$$\{\rho(x),\ \psi(y)\} = \{s(x),\ \alpha(y)\} = \delta(x-y).$$

Исследуйте вопрос о возможности глобального задания переменных Клебша.

3. Для $n = 3$ рассмотрим подстановку

$$p_i = \rho \partial_i \psi + s \partial_i \alpha + \beta \partial_i \gamma$$

со скобками (выписаны ненулевые)

$$\{\rho(x),\ \psi(y)\} = \{s(x),\ \alpha(y)\} = \{\beta(x),\ \gamma(y)\} = \delta(x-y).$$

Покажите, что эта скобка Пуассона согласована с (46). Исследуйте «калибровочную группу» — неоднозначность введения переменных Клебша ρ, ψ, s, α, β, γ.

4. Пусть $n=3$ и жидкость баротропна, т. е. $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\rho)$, и в изучаемых процессах энтропия исключается как полевая переменная. Пусть $p_i=\rho\partial_i\psi+\alpha\partial_i\beta$. Исследуйте возможность глобального введения переменных Клебша ρ, ψ, α, β.

Для любого тензорного поля $T(x)$ можно ввести скобки Пуассона $\{p_i(x),\ T(y)\}$, исходя из такого требования «вмороженности»: любой гамильтониан вида

$$\mathscr{H}_w=\int w^i(x)\,p_i(x)\,d^nx$$

порождает для поля $T(y)$ уравнение

$$\dot T(x)=\{T(x),\ \mathscr{H}_w\}=L_wT(x), \tag{47}$$

где правая часть является производной Ли тензорного поля T вдоль поля w. Дополняя (47) требованием $\{T(x),\ T(y)\}=0$, мы получим расширение алгебры скобок Пуассона однозначным образом. Особо интересный случай — это магнитное поле $T=H_{ij}$ (замкнутая 2-форма в $\mathbb{R}^3$). Плотности массы и энтропии — это 3-формы в $\mathbb{R}^3$. Их отношение $s\rho^{-1}$ — это скаляр в $\mathbb{R}^3$. Гамильтониан (48) вместе с указанной скобкой порождает уравнения магнитной гидродинамики, где поле «вморожено» в жидкость,

$$\mathscr{H}=\int\left(\frac{p^2}{2\rho}+\varepsilon_0(\rho,\ s)+\frac{H^2}{8\pi}\right)d^3x. \tag{48}$$

Рассмотренные здесь скобки Пуассона являются частным случаем более общих «дифференциально-геометрических» скобок.

Определение 3. Однородные дифференцильно-геометрические скобки для набора полей $u^1(x),\ \ldots,\ u^n(x)$ имеют вид

$$\{u^i(x),\ u^j(y)\}=g^{ij,\alpha}(u(x))\,\partial_\alpha\delta(x-y)+b_k^{ij,\alpha}(u(x))\,u_\alpha^k\delta(x-y), \tag{49}$$

где $u_\alpha^k=\partial_\alpha u^k(x)$, $x=x^1,\ \ldots,\ x^m$, $\alpha=1,\ \ldots,\ m$, i, $j=1,\ \ldots,\ n$.

Неоднородные дифференциально-геометрические скобки задаются формулой

$$\{u^i(x),\ u^j(y)\}=$$
$$=g^{ij,\alpha}(u(x))\,\partial_\alpha\delta(x-y)+\left[b_k^{ij,\alpha}(u(x))\,u_\alpha^k+c^{ij}(u(x))\right]\delta(x-y). \tag{50}$$

Функционалами гидродинамического типа естественно называть величины вида

$$\mathscr{H}=\int h(u)\,dx$$

с плотностью, не зависящей от производных. Такие гамильтонианы вместе со скобкой (49) порождают *уравнения гидродинами-*

ческого типа

$$\dot{u}^i = \{u^i(x),\ \mathscr{H}\} = a_j^{i,\alpha}(u)\,u_\alpha^j. \tag{51}$$

Скобки (49), класс функционалов гидродинамического типа и уравнения вида (51) инвариантны относительно локальных замен переменных $u = u(v)$, не содержащих производных.

Лемма 3. *При локальных заменах $u = u(v)$ все $g^{ij,\alpha}$ (при фиксированном α) преобразуются как тензоры типа (2,0) в u-пространстве, а компоненты $b_k^{ij,\alpha}$ преобразуются как символы Кристоффеля $b_k^{ij,\alpha} = g^{is,\alpha}\Gamma_{sk}^{j,\alpha}$, если $g^{ij,\alpha}$ невырождена.*

Лемма легко следует из свойства Лейбница.

Рассмотрим более детально одномерный по x случай $m = 1$. Пусть $\det g^{ij} \neq 0$.

Теорема 2. *Скобка Пуассона (49) обладает всеми свойствами (включая тождество Якоби) тогда и только тогда, когда «метрика» g^{ij} симметрична, связность Γ_{jk}^i согласована с этой метрикой и имеет нулевую кривизну и кручение.*

Следствие. *Скобки Пуассона вида (49) при $m = 1$ определяются одним инвариантом (локально) — сигнатурой метрики $g^{ij} = g^{ji}$, $\det g^{ij} \neq 0$. Найдутся локальные координаты в u-пространстве такие, что $g^{ij} = \mathrm{const}$, $b_k^{ij} = 0$.*

Доказательство этих фактов мы не приводим; оно требует некоторых вычислений. Оказывается, гамильтоновость систем вида (51) для $m = 1$ вместе с «диагонализуемостью», т. е. приводимостью матрицы $a_j^i(u)$ к диагональному виду в целой области, достаточна для интегрируемости уравнений вида (51) по Лиувиллю в некотором точном смысле. Для случая $n = 2$ (двухкомпонентные системы) ряд фактов известен еще с XIX века (по-видимому, начиная с Римана); они сводятся к простому утверждению:

Задача. 1) Докажите, что для функций $x = x(u^1, u^2)$, $t = t(u^1, u^2)$ уравнения (51) линейны (*преобразование годографа*). 2) Докажите, что при $n = 2$ система (51) диагонализуется локальной заменой $u(v)$.

Для числа полей $n > 2$ обобщение метода годографа найдено совсем недавно и в отличие от классического случая $n = 2$ существенно опирается на гамильтоновость. Рассмотрим две коммутирующих гамильтоновых системы вида (51) для $m = 1$:

$$u_t = v_j^i(u)\,u_x^j,$$

$$u_t = w_j^i(u)\,u_x^j,$$

где v_j^i диагональна, $v_j^i = \delta_j^i v^i(u)$, $v^1 \neq v^2 \neq \ldots \neq v^n$. Тогда $w_j^i(u)$ также диагональна (проверьте!). Следующая система уравнений:

$$w^i(u) = v^i(u)\,x + t, \quad \text{где } w_j^i = w^i\delta_j^i, \tag{52}$$

определяет набор функций

$$u^1(x, t), \ldots, u^n(x, t). \tag{53}$$

Оказывается, набор функций (53) — решений системы (52) — удовлетворяет уравнению $u_t^i = v_j^i(u) u_x^j$. Это и есть обобщенный метод годографа.

Для неоднородных скобок (50) при $m = 1$ и условии $\det g^{ij} \neq 0$ верна

Теорема 3. *Величина $c^{ij}(u)$ имеет вид*

$$c^{ij}(u) = c_k^{ij} u^k + c_0^{ij}, \tag{54}$$

где $c_k^{ij} = \mathrm{consf}$, $c_0^{ij} = \mathrm{const}$ *в координатах* u^k, *где* $g^{ij} = \mathrm{const}$, $b_k^{ij} \equiv 0$. *При этом* c_k^{ij} *— тензор структурных констант полупростой алгебры Ли с метрикой Киллинга* g^{ij}, *а* c_0^{ij} *— коцикл на этой алгебре, т. е. верно тождество*

$$c_0^{is} c_s^{jk} + c_0^{ks} c_s^{ij} + c_0^{js} c_s^{ki} = 0. \tag{55}$$

Доказательство этой теоремы несложно провести в координатах, где $g^{ij} = \mathrm{const}$, $b_k^{ij} \equiv 0$.

Многомерный случай и другие обобщения этой теории мы здесь обсуждать не будем.