

Глава 8

ГЛОБАЛЬНАЯ СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

§ 31. Некоторые многообразия общей теории относительности (ОТО)

1. Постановка задачи. Задача ОТО с точки зрения геометрии состоит в нахождении четырехмерных многообразий M^4 с метрикой g_{ab} сигнатуры $(+, -, -, -)$, удовлетворяющей уравнению Эйнштейна

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}, \quad (1)$$

где T_{ab} — тензор энергии-импульса материи. С общей точки зрения имеется лишь одно ограничение на тензор T_{ab} : если $\xi = (\xi^a)$ — любой времениподобный вектор, $\xi^a \xi^b g_{ab} > 0$, то должно быть $T_{ab} \xi^a \xi^b \geq 0$ (условие положительности плотности энергии).

Фактически мы будем рассматривать главным образом лишь так называемый гидродинамический тензор энергии-импульса (см. § 39 части I)

$$T_{ab} = (p + \varepsilon) u_a u_b - p g_{ab}, \quad (2)$$

важный для отыскания гравитационных полей макроскопических тел; здесь $u = (u_a)$ — вектор 4-скорости, $\langle u, u \rangle = 1$, p — давление, ε — плотность энергии.

Вообще говоря, анализ уравнений (1) представляет собой трансцендентно сложную задачу. Однако в ряде случаев, когда отыскивается метрика с большой группой движений G , действующей на M^4 , уравнение (1) в удобной локальной системе координат приводится к сравнительно простому виду, допускающему точное решение или хотя бы качественное исследование. При этом всегда возникает вопрос о том, в какой мере полно мы нашли решение: найдено все многообразие M^4 или только область на нем? Простейшим и весьма фундаментальным случаем, когда чисто координатный подход привел к нахождению лишь одной области на M^4 , является релятивистский аналог поля точечной массы — «решения Шварцшильда» (см. § 39 части I). Дадим некоторые определения.

Определение 1. Функция $f(x)$ на M^4 называется а) *временноподобной*; б) *пространственноподобной*; в) *световой* или *изотропной* в точке $x \in M^4$, если:

$$\text{а) } g^{ab} \frac{\partial f}{\partial x^a} \frac{\partial f}{\partial x^b} > 0, \text{ т. е. } \langle \nabla f, \nabla f \rangle > 0;$$

$$\text{б) } g^{ab} \frac{\partial f}{\partial x^a} \frac{\partial f}{\partial x^b} < 0, \text{ т. е. } \langle \nabla f, \nabla f \rangle < 0;$$

$$\text{в) } g^{ab} \frac{\partial f}{\partial x^a} \frac{\partial f}{\partial x^b} = 0, \text{ т. е. } \langle \nabla f, \nabla f \rangle = 0.$$

Здесь $\nabla f = \text{grad } f$.

Например, если $f(x) = x^a$, то

$$\langle \nabla f, \nabla f \rangle = g^{ab} \frac{\partial f}{\partial x^a} \frac{\partial f}{\partial x^b} = g^{aa}.$$

Скалярный квадрат $\langle \nabla f, \nabla f \rangle$ мы будем часто обозначать через g^{ff} .

2. Сферически симметричные решения. Определение 2. Многообразие M^4 с метрикой Эйнштейна g_{ab} называется *сферически симметричным*, если оно обладает группой движений $G = SO(3)$ с двумерными орбитами S^2 . Эти орбиты обязательно пространственноподобны, так как стационарная подгруппа группы $SO(3)$ действует на касательном пространстве к точке сферы S^2 изотропно, в то время как временноподобное направление одномерно. Факторпространство $M^4/SO(3)$ обозначим через M^2 — это двумерное пространство параметров, нумерующих орбиты группы. Получаем расслоение

$$p: M^4 \rightarrow M^2 \quad (3)$$

со слоем $S^2 = p^{-1}(x)$, $x \in M^2$, где S^2 — орбиты группы $SO(3)$ на M^4 . На расслоении (3) имеется связность: горизонтальные площадки этой связности по определению ортогональны к слоям — орбитам $SO(3)$ в метрике g_{ab} .

Лемма 1. Эта связность тривиальна, т. е. интегрируема.

Доказательство. Рассмотрим точку $y \in M^4$. Пусть $H_y \subset SO(3)$ — стационарная подгруппа точки y . На орбите группы $SO(3)$ неподвижная точка y группы H_y изолирована. Неподвижные точки группы H_y образуют двумерную поверхность в M^4 , ортогональную к слоям. Тем самым мы «проинтегрировали» семейство ортогональных площадок к слоям (орбитам). Лемма доказана.

Пусть $U \subset M^2$ — окрестность точки базы $x \in M^2$ с координатами τ, R и метрикой вида

$$g_{00}d\tau^2 + g_{11}dR^2, \quad g_{00} > 0, \quad g_{11} < 0 \quad (4)$$

(т. е. τ и R ортогональны). Такие координаты в области на M^2

всегда можно выбрать. Пусть θ, φ — стандартные координаты на сфере S^2 , в которых $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ — метрика единичной сферы, инвариантная относительно $SO(3)$. В силу леммы 1 во всей области $p^{-1}(U) \subset M^4$ вводятся координаты τ, R, θ, φ такие, что метрика Эйнштейна имеет вид

$$g_{00}d\tau^2 + g_{11}dR^2 - r^2d\Omega^2, \quad r = r(R, \tau), \quad (5)$$

где g_{00} и g_{11} зависят только от (R, τ) и r — «размер орбиты». В силу леммы 1 формула (5) дает локально общую $SO(3)$ -симметричную метрику на M^4 , так как метрику базы M^2 всегда можно записать в виде (4).

При выводе решения Шварцшильда уравнения Эйнштейна (1) с $T_{ab} \equiv 0$ мы полагали (пусть $c = 1$)

$$\tau = t, \quad R = r \quad (6)$$

и получили ответ в виде (см. § 39 части I)

$$g_{00} = 1 - \frac{a}{r}, \quad g_{11} = -\frac{1}{1 - \frac{a}{r}}. \quad (7)$$

Эта формула действует корректно только при $r > a$ («область внешнего наблюдателя»). Формально можно рассмотреть эту формулу и при $r < a$. Здесь мы имеем:

- а) функция r (радиальная координата) становится времениподобной: $g^{rr} > 0$;
- б) функция t (временная координата) становится пространственноподобной: $g^{tt} < 0$.

При $r \rightarrow a$ из внешней области имеем

$$g^{rr} \rightarrow 0, \quad g^{tt} \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow a. \quad (8)$$

Таким образом, функция t на M^4 вообще не может иметь смысла при $r = a$. Функция r на M^4 , если имеет смысл, является световой при $r = a$. Впрочем, формулы (7) показывают, что сами координаты t, r, θ, φ при $r = a$ не имеют смысла. Однако координаты τ, R на базе M^2 можно выбрать иначе, чем в решении Шварцшильда (7). Решая уравнения Эйнштейна в пустом пространстве

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 0 \quad (9)$$

или

$$R_{ab} = 0,$$

можем, без ограничения общности, выбрать τ так, чтобы $g_{00} \equiv 1$. Этот выбор возможен, поскольку любая метрика на базе M^2 может быть приведена к виду $d\tau^2 + g_{11}dR^2, g_{11} < 0$. Решение уравнений (9) не вызывает затруднений. Выписывая символы Γ_{bc}^a и R_{ab} по общим формулам (см. §§ 29, 30 части I), получим

уравнения на параметры ν , λ , μ (см. (17))

$$\begin{aligned} g_{00} &= e^\nu, & -g_{11} &= e^\lambda, & r^2 &= e^\mu, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} &= \dot{\varphi}, & \frac{\partial \varphi}{\partial R} &= \varphi', & g_{00} &\equiv 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение удобно записать в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{a^2} + 1 \right) (1 - \cos \eta), \\ \frac{\tau}{a} &= \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{a^2} + 1 \right)^{3/2} (\pi - \eta + \sin \eta), \\ 0 &\leq \eta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (11)$$

Устройство полного «многообразия Крускала» M^4 показано на рис. 159. При $r=0$ орбиты группы $SO(3)$ сводятся к точкам.

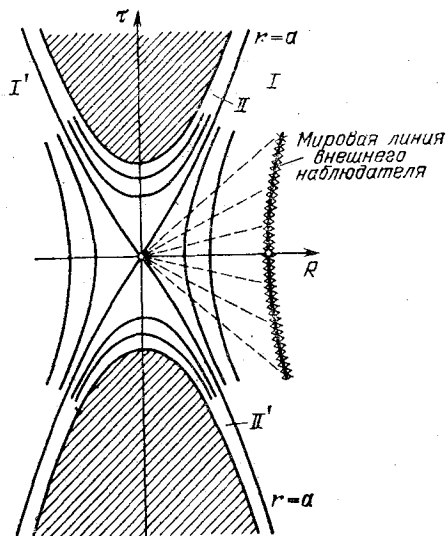


Рис. 159. Изображена (R, τ) -плоскость. Заштрихована «бессмысленная» область $r \leq 0$. Жирными линиями показаны кривые уровня $r(R, \tau) = \text{const}$. Пунктирными линиями показаны кривые уровня $t(R, \tau) = \text{const}$. При $r = a$ имеем $|t| = \infty$, исключая точку пересечения двух линий (седловую). Здесь имеется неопределенность — сюда входят все линии $t = \text{const}$. Точка $\tau = 0, R = 0$ седловая; здесь $\frac{\partial r}{\partial \tau}, \frac{\partial r}{\partial R} = 0$. На линиях $r = a$ имеем $\langle \nabla r, \nabla r \rangle = 0$. Области I и I' изометричны ($R \rightarrow -R$); области II и II' также изометричны ($\tau \rightarrow -\tau$).

В этих точках метрика M^4 имеет особенность. Мировая линия внешнего наблюдателя в области I (области Шварцшильда) имеет вид

$$r = r_0 > a, \quad -\infty < t < \infty, \quad (12)$$

$$\theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0.$$

Внешний наблюдатель может получить сигнал из области II'

(«белая дыра»), но не может послать обратно сигнал в II' . Напротив, внешний наблюдатель может послать сигнал в область II («черная дыра»), но не может получить сигнал из II . Никакая посылка сигналов из I в I' и обратно невозможна. Нарисуйте самостоятелно световые конусы на (τ, R) -плоскости.

Важным применением решений Шварцшильда — Крускала является задача о коллапсе сферически симметричной массы (коллапсирующая звезда, или «коллапсар»).

Рассмотрим времениподобную мировую линию γ частиц в координатах τ, R (при всех θ, φ) вида, показанного на рис. 160. Это объединение мировых линий γ при всех θ, φ дает трехмерную поверхность $S_\gamma \subset M^4$, разделяющую M^4 на две области: A — внешняя и B — внутренняя. Коллапс звезды описывает сферически симметричное решение уравнений (1) со следующими свойствами:

а) g_{ab} такое же, как в многообразии Крускала в области $A, R_{ab} = 0$;

б) g_{ab} удовлетворяет уравнению (1) с гидродинамическим тензором энергии-импульса (2) в области B , где задано «уравнение состояния» $\varepsilon = \varepsilon(p)$;

в) граница звезды (кривая γ на (τ, R) -плоскости) пересекает при $t \rightarrow +\infty$ «линию горизонта» $r = a$, на которой $g^{rr} = 0$; при $t \rightarrow -\infty$ граница звезды ни разу не пересекала линию горизонта.

Итак, мы должны решать уравнение (1) в области B , где $T_{ab} \neq 0$. Из сферической симметричности следует, что могут быть ненулевыми только

$$T_0^0 = \varepsilon, \quad T_1^0, \quad T_0^1, \quad T_\alpha^\alpha = -p. \quad (13)$$

Выберем *сопутствующую* систему координат, в которой $u = (1, 0)$, $T_0^1 = T_1^0 = 0$. Тогда

$$T_0^0 = \varepsilon, \quad T_0^1 = T_1^0 = 0, \quad T_\alpha^\alpha = -p, \quad (14)$$

и метрика будет иметь вид (5).

З а м е ч а н и е. Вообще говоря, сопутствующая система отсчета, в которой временная координата τ ортогональна пространственным координатам R, θ, φ , не является «синхронной», т. е. $g_{00} \neq 1$.

Законы сохранения $\nabla_a T_b^a = 0$ дают: если $g_{00} = e^\nu$, $g_{11} = -e^\lambda$, $r^2 = e^\mu$, то

$$\nu' = -\frac{2p'}{p + \varepsilon}, \quad (\lambda + 2\mu)' = -\frac{2p'}{p + \varepsilon}. \quad (15)$$

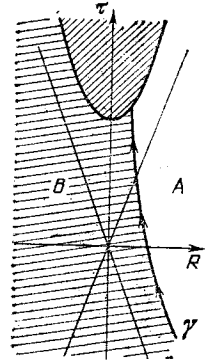


Рис. 160

Из соотношений (15) следует

$$\begin{aligned} -g_{11}r^4 &= \exp\left\{-2\int\frac{d\varepsilon}{\rho+\varepsilon}\right\}\exp\varphi(R), \\ g_{00} &= \exp\left\{-2\int\frac{d\rho}{\rho+\varepsilon}\right\}\exp\psi(\tau). \end{aligned} \quad (16)$$

Выбор функций $\varphi(R)$ и $\psi(\tau)$ в (16) окончательно фиксирует локальные координаты τ , R и позволяет исключить ε , ρ из уравнений (1).

После вычисления символов R_{ab} и Γ_{bc}^a в координатах $y^0 = \tau$, $y^1 = R$, $y^2 = \theta$, $y^3 = \varphi$ уравнения (1) приобретут вид:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad -\frac{8\pi G}{c^4} T_1^1 &= \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu'v' \right) - e^{-\nu} \left(\ddot{\mu} - \frac{1}{2} \dot{\mu}\dot{\nu} + \frac{3}{4} \dot{\mu}^2 \right) - e^{-\mu}; \\ \text{б)} \quad -\frac{8\pi G}{c^4} T_2^2 &= \frac{1}{4} e^{-\lambda} (2v'' + v'^2 + 2\mu'' + \mu'^2 - \mu'\lambda' - v'\lambda' + \mu'v) + \\ &\quad + \frac{1}{4} e^{-\nu} (\dot{\lambda}\dot{v} + \dot{\mu}\dot{v} - \dot{\lambda}\dot{\mu} - 2\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 - 2\ddot{\mu} - \dot{\mu}^2); \quad (17) \\ \text{в)} \quad \frac{8\pi G}{c^4} T_0^0 &= -e^{-\lambda} \left(\mu'' + \frac{3}{4} \mu'^2 - \frac{\mu'\lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\dot{\lambda}\dot{v} + \frac{\dot{\mu}^2}{2} \right) + e^{-\mu}; \\ \text{г)} \quad \frac{8\pi G}{c^4} T_0^1 &= 0 = \frac{1}{2} e^{-\lambda} (2\dot{\mu}' + \dot{\mu}\mu' - \dot{\lambda}\mu' - v'\dot{\mu}). \end{aligned}$$

Положим $g^{rr} = 1 - \frac{a}{r}$, где $a = a(\tau, R)$. Для решений Шварцшильда мы имели $a = \text{const} = 2MG/c^2$, где M — масса тела. В общем случае уравнение

$$a(\tau, R) = r(\tau, R) \quad (18)$$

задает «горизонт» $g^{rr} = 0$, где $r(\tau, R)$ становится изотропной функцией, $\langle \nabla r, \nabla r \rangle = g^{rr} = 0$.

З а м е ч а н и е. Уравнения Эйнштейна (см. (17)) после подстановки связи (16) с $\varphi \equiv \psi = 0$ могут быть получены из лагранжиана «двумерной теории поля»

$$\tilde{S} = \int \tilde{\Lambda} dR d\tau,$$

где $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}(\lambda, \mu, \dot{\lambda}, \dot{\mu}, \lambda', \mu') = T_1 + T_2 + U$,

$$\begin{aligned} T_1 &= -e^{\frac{k-1}{2}\lambda + (k+1)\mu} \left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu'(k\lambda' + 2k\mu') \right), \\ T_2 &= e^{-\frac{k-1}{2}\lambda + (1-k)\mu} \left(\frac{\dot{\mu}^2}{2} + \dot{\mu}\dot{\lambda} \right), \quad U = 2e^{\frac{k+1}{2}\lambda + k\mu}. \end{aligned}$$

Формальный тензор энергии-импульса для функционала \tilde{S} , опре-

деленный в § 37 части I, имеет такой вид:

$$\tilde{T}_0^0 = -\tilde{\Lambda} + \dot{\lambda} \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial \dot{\lambda}} + \dot{\mu} \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial \dot{\mu}} = T_2 - T_1 - U,$$

$$\tilde{T}_1^1 = -\tilde{\Lambda} + \dot{\lambda}' \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial \dot{\lambda}'} + \dot{\mu}' \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial \dot{\mu}'} = T_1 - T_2 - U,$$

$$\tilde{T}_0^1 = \dot{\lambda} \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial \dot{\lambda}'} + \dot{\mu} \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial \dot{\mu}'} = \frac{1}{2} e^{-\lambda} (2\dot{\mu}' + \dot{\mu}\mu' - \dot{\lambda}\mu' - (k\lambda' + 2k\mu')\dot{\mu}),$$

$$\tilde{T}_1^0 = \dot{\lambda}' \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial \dot{\lambda}} + \dot{\mu}' \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial \dot{\mu}} = -T_0^1 e^{-(k-1)\lambda - 2k\mu}.$$

Уравнения Эйнштейна (17) сферически симметричной материи с гидродинамическим тензором энергии-импульса приобретут вид $\delta \tilde{S} = 0$ на поверхности связей $\tilde{T}_0^1 = \tilde{T}_1^0 = 0$. Использование функционала \tilde{S} удобно для исследования решений, не зависящих от $\tau = \xi^0$ или $R = \xi^1$. Если $\dot{\lambda} \neq 0$, $\dot{\lambda}' \neq 0$, $\dot{\mu} \neq 0$, $\dot{\mu}' \neq 0$, то уравнения $\tilde{T}_0^1 = \tilde{T}_1^0 = 0$ решаются, и уравнения Эйнштейна (17) сведутся, как мы увидим, к системе первого порядка (24).

Из уравнений (17) вытекает (проверьте!)

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(\tau, R)}{\partial \tau} &= -pr^2 \frac{\partial r}{\partial \tau} \frac{8\pi G}{c^4}, \\ \frac{\partial a}{\partial R} &= \epsilon r^2 \frac{\partial r}{\partial R} \frac{8\pi G}{c^4}, \end{aligned} \tag{19}$$

где ϵ и p связаны с метрикой соотношениями (16). Так как ϵ — плотность энергии, то $4\pi\epsilon r^2 dr e^{-\lambda}$ — энергия сферического слоя. Сумма энергий сферических слоев имеет вид

$$\Sigma_{\text{полн}} = \int 4\pi\epsilon r^2 e^{-\lambda} dr.$$

Однако, из (19) видно, что интегралом системы является другая величина

$$E_{\text{полн}} = \int 4\pi\epsilon r^2 dr, \tag{20}$$

совпадающая на поверхности связи $\tilde{T}_0^1 = \tilde{T}_1^0 = 0$ с гамильтонианом двумерной теории поля с лагранжианом $\tilde{\Lambda}$ (выше). Итак, мы получили «гравитационный дефект энергии»

$$E_{\text{полн}} \neq \Sigma_{\text{полн}}.$$

Рассмотрим случай $p = 0$ (пылевидное вещество). Тогда из (19) и (16) имеем

$$a = a(R); \quad g_{00} = \text{const}. \tag{21}$$

Пусть $g_{00} = 1$. По определению имеем (см. (16))

$$1 - \frac{a}{r} = g^{00} \dot{r}^2 + g^{11} r'^2 \quad \left(\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial \tau}, r' = \frac{\partial r}{\partial R} \right),$$

$$g_{00} = \exp \left\{ -2 \int \frac{dp}{p + \varepsilon} \right\} \exp \psi(\tau),$$

$$g_{11} = \exp \left\{ -2 \int \frac{d\varepsilon}{p + \varepsilon} \right\} \exp \varphi(R),$$

где $g^{00} = \frac{1}{g_{00}}$, $g^{11} = \frac{1}{g_{11}}$, причем

$$g_{11} = -\frac{1}{r^4 \varepsilon^2}, \quad \varepsilon = \frac{a'}{r^2 r'} \frac{c^4}{8\pi G}.$$

Отсюда получаем ($\psi(\tau) \equiv 1$, $g_{00} \equiv 1$)

$$\dot{r} = \sqrt{1 - \frac{a(R)}{r} + (a'(R))^2 \left(\frac{8\pi G}{c^4} \right)^{-2}}. \quad (22)$$

Мы знаем, что $\dot{a} = -\frac{8\pi G}{c^4} p r^2 \dot{r} = 0$ (см. (19)).

Это уравнение интегрируется одной квадратурой и дает известное «решение Толмена», приводящее либо к коллапсу, либо к разлету пылевидной материи, так как \dot{r} не может менять знак при $1 - \frac{a}{r} > 0$, если метрика неособа. В области вне горизонта имеем

$$\dot{r} = \sqrt{\Phi(r, R)} = \sqrt{g^{rr} + |g^{11} r'^2|} \neq 0, \quad g^{rr} > 0. \quad (23)$$

Отсюда следует, что при отсутствии особенностей метрики и плотности энергии $0 < \varepsilon < \infty$ вне горизонта знак величины \dot{r} меняться не может.

Для общих уравнений (19) при $p = k\varepsilon$, $0 \leq k \leq 1$, из (16) имеем

$$\dot{a} = -p r^2 \dot{r} \frac{8\pi G}{c^4},$$

$$a' = \varepsilon r^2 r' \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (24)$$

$$1 - \frac{a}{r} = \dot{r}^2 \varepsilon^{\frac{2k}{k+1}} - r'^2 r^4 \varepsilon^{\frac{2}{k+1}},$$

если $\varphi \equiv \psi \equiv 0$. Исключая ε , представим уравнения в виде

$$\dot{r} = \sqrt{\Phi(r, r', a, a')} = \sqrt{g^{rr} + |r'^2 r^4 \varepsilon^{2/k+1}|} \varepsilon^{-2k/h+1},$$

$$\dot{a} = -k \frac{a'}{r'} \sqrt{\Phi}, \quad 0 \leq k < 1. \quad (25)$$

Таким образом, решение (кроме знака \dot{r}) полностью определяется заданием $r(R, 0)$ и $a(R, 0)$. Вне горизонта $g^{rr} > 0$ имеем тот же вывод, что и для $p = 0$: неизменность знака \dot{r} ввиду $\Phi \geq g^{rr} > 0$.

Вывод. Если метрика и плотность энергии $\varepsilon > 0$ не имеют особенностей, происходит монотонный коллапс (или разлет) материи.

Замечание 1. Более простой вид уравнения (25) имеют в случае «предельно жесткого уравнения состояния», т. е. при $k = 1$. Здесь

$$1 - \frac{a}{r} = \varepsilon (\ddot{r}^2 - r'^2 r^4). \quad (26)$$

Замечание 2. Уравнения (24) при $\varphi \equiv \psi \equiv 0$ обладают группой масштабных преобразований:

$$\begin{aligned} r &\rightarrow \lambda r, & a &\rightarrow \lambda a, & \tau &\rightarrow \alpha \tau, \\ R &\rightarrow \beta R, & \varepsilon &\rightarrow \gamma \varepsilon, & p &\rightarrow \gamma p, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \lambda^{-\frac{8k}{k+1}}$, $\gamma = \lambda^{-2}$.

Можно искать «автомодельные решения», инвариантные относительно однопараметрических подгрупп этой группы, имеющих вид $\alpha = \beta^s$, $\lambda = \beta^l$, $\gamma = \frac{(1-s)(1+k)}{4k}$. Эти инвариантные решения имеют вид

$$r = R^\nu r_1(\lambda), \quad a = R^\nu a_1(\lambda), \quad \varepsilon = R^{-2\nu} \varepsilon_1(\lambda), \quad \lambda = \frac{\tau}{R^s}. \quad (28)$$

Уравнения (24) имеют решения вида (28) только при $s = \frac{1-k}{1+3k}$. В этом случае уравнения (24) определяют систему обыкновенных уравнений (динамическую систему)

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{d\lambda} &= -k \varepsilon_1 r_1^2 \frac{dr_1}{d\lambda} \frac{8\pi G}{c^4}, \\ \gamma a_1 - s \lambda \frac{da_1}{d\lambda} &= \varepsilon_1 r_1^2 \left(\gamma r_1 - s \lambda \frac{dr_1}{d\lambda} \right) \frac{8\pi G}{c^4}, \\ 1 - \frac{a_1}{r_1} &= \left(\frac{dr_1}{d\lambda} \right)^2 \varepsilon_1^{\frac{2k}{k+1}} - \left(\gamma r_1 - s \lambda \frac{dr_1}{d\lambda} \right)^2 r_1^4 \varepsilon_1^{\frac{2}{k+1}}. \end{aligned}$$

Исследование стационарных решений (не зависящих от τ) и решений, не зависящих от R , также приводит к динамическим системам, которых мы здесь не приводим.

Постановка краевой задачи для уравнений (24) может быть такова. В начальный момент $\tau = 0$ мы требуем выполнения следующих условий:

а) $r' > 0$, $a' > 0$ (сферические слои материи упорядочены по радиусу r и $\varepsilon > 0$).

б) На краях должно быть $r(R_0) = 0$, $a(R_0) = 0$ и $r \rightarrow \infty$, $a \rightarrow a_0$ при $R \rightarrow R_1$. Тогда допустимая область изменения сопутствующей (лагранжевой) координаты R есть $R_0 \leq R < R_1$, в то время как $0 \leq r < \infty$. Возможно, интервал по R также бесконечен (это несущественно). Уравнения (24) верны всегда, но эквивалентны уравнениям (17) лишь при $\varepsilon \neq 0$, $r' \neq 0$, $\dot{r} \neq 0$. При $r \rightarrow \infty$ отсюда следует $\varepsilon \rightarrow 0$, так что интеграл сходится: $a_0 = \frac{8\pi G}{c^4} \int_{R_0}^{R_1} \varepsilon r^2 dr < \infty$, поскольку $a_0 = E_{\text{полн}} \cdot \text{const.}$

в) При $\tau = 0$ должно быть $r(R) = r(R, 0) > a(R)$, $R > R_0$. Условие в) возникает из требования, чтобы в начальный момент $\tau = 0$ вся материя была наблюдаемой (рис. 161).

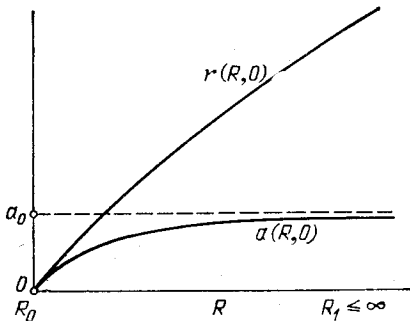


Рис. 161

3. Аксиально симметричные решения. Рассмотрим теперь аксиально симметричное стационарное решение, описывающее гравитационное поле «вращающейся черной дыры», — так называемое «решение Керра».

Определение 3. Метрику g_{ab} сигнатуры $(+, -, -, -)$ на многообразии M^4 назовем *аксиально симметричной* и *стационарной*, если в некоторой локальной системе координат она не зависит от времени t и угловой (пространственноподобной) координаты $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. В частности, на многообразии действует коммутативная группа движений $G = \mathbb{R} \times S^1$, где орбиты $\mathbb{R} \times (s_0)$ времениподобны, а орбиты $t_0 \times S^1$ пространственноподобны.

Решение Керра уравнений (1) в пустом пространстве $T_{ab} = 0$ определяется в координатах, обозначаемых через r, θ, φ, t , формулой ($c = 1$)

$$ds^2 = dt^2 - \left[dr^2 + 2a \sin^2 \theta dr d\varphi + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{2mr}{\rho^2} (dr + a \sin^2 \theta d\varphi + dt)^2 \right], \quad (29)$$

где $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $a = \text{const.}$ Обычные координаты $x, y, z \in \mathbb{R}^3$

имеют вид

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \left(\varphi - \operatorname{arctg} \frac{a}{r} \right), \\ y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \left(\varphi - \operatorname{arctg} \frac{a}{r} \right), \\ z &= r \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (30)$$

Таким образом, поверхности уровня $r = \text{const}$, $t = t_0$ — это сплюснутые по оси z эллипсоиды. Поверхности $\theta = \theta_0$, $t = t_0$ — это однополостные гиперболоиды вида

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 \sin^2 \theta} - \frac{z^2}{a^2 \cos^2 \theta} = 1. \quad (31)$$

В частности, координата r может быть отрицательной, как будет видно ниже.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 - 2mr + a^2, \\ dt^* &= dt - 2mr \frac{dr}{\Delta}, \\ d\varphi^* &= d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr. \end{aligned} \quad (32)$$

В новых координатах r , t^* , φ^* , θ метрика (29) приобретет вид (проверьте!):

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta (d\varphi^*)^2 - \\ &\quad - \frac{2mr}{\rho^2} (a \sin^2 \theta d\varphi^* + dt^*)^2 + (dt^*)^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Группа G действует преобразованиями

$$t^* \rightarrow t^* + \text{const}, \quad \varphi^* \rightarrow \varphi^* + \text{const}.$$

При $a = 0$ из формул (33) получим метрику Шварцшильда (6), (7).

Задача. Покажите, что при $m = 0$ эта метрика эквивалентна метрике Минковского.

Для ненулевых компонент g^{ab} метрики (33) имеем ($c = 1$, $G = 1$)

$$\begin{aligned} g^{00} &= \frac{1}{\Delta} \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \right), \\ -g^{rr} &= \frac{\Delta}{\rho^2}, \quad -g^{\theta\theta} = \frac{1}{\rho^2}, \\ -g^{\varphi^*\varphi^*} &= \frac{1}{\Delta \sin^2 \theta} \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2} \right), \\ g^{\varphi^*t^*} &= \frac{4mra}{\rho^2 \Delta}. \end{aligned} \quad (34)$$

Как и для решения Шварцшильда, горизонт определяется условием $g^{rr} = 0$ или $\Delta = 0$:

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 = 0, \quad (35)$$

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}.$$

Возникает два случая:

- 1) $a > m$ — корни r_{\pm} комплексны;
- 2) $a < m$ — корни r_{\pm} вещественны и положительны.

Разберем сначала случай 1) (быстрое вращение). Здесь $\Delta \neq 0$ для вещественных r и метрика (33) всегда имеет смысл. Горизонт отсутствует, так как $g^{rr} < 0$ для всех r . Всегда имеем $g^{00} > 0$. Метрика имеет особенности при $r = 0$, $\cos^2 \theta = 0$ (и любых t^* и φ^*). В координатах x, y, z множество особенностей задается уравнением

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0, \quad t^* \text{ любое.} \quad (36)$$

Эта особенность наблюдаема извне (т. е. из области $r \rightarrow \infty$) — она «голая». Вне особенности метрика регулярна. Уравнение $g^{\varphi^* \varphi^*} = 0$ дает

$$r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta = 0, \quad r = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}.$$

Это — «эргосфера». Внутри эргосферы градиент функции φ^* времениподобен.

Линии $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, $t^* = \text{const}$ координаты φ^* являются замкнутыми и времениподобными в области

$$g_{\varphi^* \varphi^*} = - \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) > 0. \quad (37)$$

При $\cos \theta = 0$ это — линии $r^2 = r_0^2 < ma$.

Рассмотрим теперь случай 2) ($a < m$). Область внешнего наблюдателя — это область

$$(I) \quad r > m + \sqrt{m^2 - a^2} = r_+; \quad (38)$$

функция r в этой области пространственноподобна. Имеются также области

$$(II) \quad r_- < r < r_+ \quad (39)$$

(r времениподобна),

$$(III) \quad -\infty < r < r_- \quad (40)$$

(r пространственноподобна). Если $r \rightarrow r_+$ из области I , то $g^{00} \rightarrow \infty$. Поэтому время внешнего наблюдателя t^* имеет смысл лишь в области I . Координата r является световой при $r = r_{\pm}$ (на горизонте).

Метрика имеет особенность в области III. В области III цикл изменения φ^* ($r = r_0 < 0$, $\theta = \text{const}$, $t^* = \text{const}$) является замкнутым и времениподобным (проверьте!). Построение полного многообразия M^4 склейкой областей типа I, II, III можно произвести по аналогии с многообразиями Крускала (см. (11)). 1) К области I при $r \rightarrow r_+$ могут быть приклеены 2 области типа II («белая дыра» при $t \rightarrow -\infty$ и «черная дыра» при $t \rightarrow +\infty$, как и для решения Шварцшильда выше); 2) к области типа II могут быть приклеены: а) две области типа III, где $r \rightarrow r_-$, б) две области типа I, где $r \rightarrow r_+$; 3) к области типа III могут быть приклеены две области типа II при $r \rightarrow r_-$. Склейка условно рисуется диаграммой (рис. 162).

Локальные системы координат V_n, W_n охватывают внутренности четверак

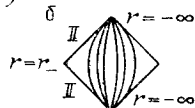
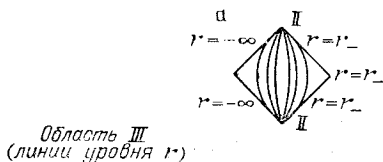
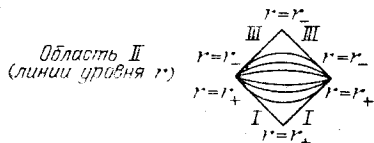
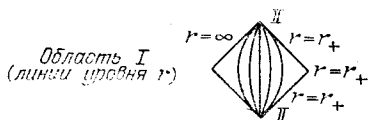
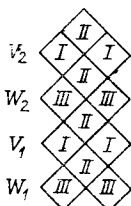
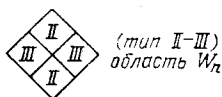


Рис. 162

Координаты в каждой четверке типов I-II и II-III (см. рис. 162) аналогичны координатам Крускала (см. рис. 159). Аналитически здесь, однако, более утомительно производить склейку, но она может быть проведена по аналогии со сферически симметричным случаем. Заметим, что преобразование B , переводящее V_n в V_{n+1} и W_n в W_{n+1} , является движением. Мы можем поэтому построить «неодносвязное решение Керра», полагая

$$\bar{M}^4 = M^4/B$$

для любой точки $x \in M^4$. Набор возможных переходов в будущее

по времениподобным линиям таков:

$$\text{область } (V_n, I) \rightarrow \text{область } (W_{n+1}, II) \cong \text{область } (V_n, II),$$

$$\text{область } (W_n, II) \rightarrow \text{область } (V_n, I),$$

$$\text{область } (W_n, III) \rightarrow \text{область } (W_n, II) \cong \text{область } (V_n, II).$$

Таким образом, в неоднозначном многообразии \bar{M}^4 имеются времениподобные циклы, начинающиеся и кончающиеся в области I внешнего наблюдателя.

З а м е ч а н и я. Решения Шварцшильда и Керра (в случае 2) обладают таким свойством: поверхность горизонта не является особенностью метрики в M^4 . Как говорят, в этих решениях нет «голой сингулярности», которая бы непосредственно могла наблюдаться. Имеются теоремы, показывающие единственность этих метрик в определенных классах решений уравнений Эйнштейна $R_{ab} = 0$ с указанным свойством: метрика Шварцшильда — единственное решение среди статических метрик в координатах x, y, z, t , где $g_{0\alpha} = 0$; асимптотически тривиальное при $r \rightarrow \infty$ и имеющее неособую поверхность горизонта в (x, y, z) -пространстве, вне которых они определены; метрика Керра — единственное решение среди стационарных метрик $g_{0\alpha} \neq 0$, неособых вне поверхности горизонта. Мы не приводим здесь доказательства этих важных теорем единственности.

Существует гипотеза, согласно которой всякая коллапсирующая масса конечной величины асимптотически по времени при $t \rightarrow \infty$ создает метрику Шварцшильда или Керра (в области внешнего наблюдателя). При этом предполагается, что начальная метрика при $t = 0$ не имела особенностей.

4. Космологические модели. Другой класс задач ОТО связан с построением и изучением свойств эволюционных моделей, которые могли бы дать определенные представления об эволюции глобальной метрики Вселенной «в целом». Соответствующие четырехмерные многообразия M^4 с метрикой g_{ab} называются *космологическими моделями*. Ввиду трудностей, связанных с невозможностью сформулировать какие-либо универсальные граничные условия для уравнений Эйнштейна в этом случае, мы ограничимся рассмотрением так называемых однородных космологических моделей, где предполагается, что метрика (в данный момент времени) в некотором смысле одинакова во всех точках пространства. Более точно это формулируется так.

О п р е д е л е н и е 4. Четырехмерное многообразие M^4 с метрикой g_{ab} , удовлетворяющей уравнению Эйнштейна (1), называется *однородной космологической моделью*, если задана группа движений G , действующая на M^4 (пусть слева) и имеющая трехмерные пространственноподобные орбиты.

В дальнейшем всегда выбираются локальные координаты такие, что x^1, x^2, x^3 направлены касательно к орбитам группы G

(они называются «пространственными»), а временная координата x^0 направлена трансверсально к орбитам группы G . Если координата $x^0 = ct$ ортогональна к орбитам и $g_{00} = 1$, то это — синхронная система отсчета. Мы будем в основном рассматривать однородные модели в синхронной системе отсчета. Наиболее общие однородные модели имеют трехмерную группу движений G (классификация их алгебр Ли приведена в § 24 части I).

Совокупность орбит образует одномерное многообразие («временная ось»), и имеется естественное отображение

$$p: M^4 \rightarrow N^1,$$

слои $p^{-1}(t_0)$ которого — орбиты группы G . Выбор временной оси, например синхронной системы отсчета, вводит связность в это расслоение, причем кривизны нет ввиду одномерности базы. Пусть группа G трехмерна. В этом случае удобно выбрать представление метрики многообразия M^4 : рассмотрим левоинвариантные векторные поля (не путать их с генераторами группы G) X_0, X_1, X_2, X_3 , где X_0 трансверсально, а X_1, X_2, X_3 касательны к орбитам группы G . Наложим требования, чтобы коммутаторы векторных полей X_α имели вид $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$:

$$[X_0, X_\alpha] = 0, \quad [X_\alpha, X_\beta] = c_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma; \quad (41)$$

здесь $c_{\alpha\beta}^\gamma$ — структурные константы алгебры Ли группы G , не зависящие от времени. При этом (в синхронной системе отсчета) мы требуем, чтобы X_0 было ортогонально орбитам группы и $g_{00} = 1$. Метрика описывается скалярными произведениями

$$g_{\alpha\beta} = \langle X_\alpha, X_\beta \rangle, \quad (42)$$

$$g_{00} = 1, \quad g_{0\alpha} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Ввиду однородности модели метрика $g_{\alpha\beta}(t)$ зависит лишь от времени t , где линии времени идут вдоль поля X_0 .

Уравнения Эйнштейна с гидродинамическим тензором энергии-импульса $T_{ab} = (p + \varepsilon)u_a u_b - p g_{ab}$ приобретут вид системы уравнений второго порядка на симметрическую матрицу $g_{\alpha\beta}(t)$, если в них исключить u, ε, p посредством законов сохранения и связей

$$\nabla_a T_b^a = 0, \quad \langle u, u \rangle = 1, \quad p = p(\varepsilon). \quad (43)$$

Как и ранее, считаем, что $p = k\varepsilon$, где $0 \leq k \leq 1$ (особенно интересны случаи $p = 0$ и $p = \varepsilon/3$, где $T_a^a = 0$). После этого исключения получим динамическую систему в фазовом пространстве $(g_{\alpha\beta}(t), \dot{g}_{\alpha\beta}(t))$ размерности 12, точнее, в области этого пространства, выделяемой условиями:

- 1) $g_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta < 0$ (пространственноподобность орбит);
- 2) $\varepsilon(g_{\alpha\beta}, \dot{g}_{\alpha\beta}) \geq 0$ (положительность энергии).

Эту область мы назовем «физической областью» в фазовом пространстве $(g_{\alpha\beta}, \dot{g}_{\alpha\beta}) = \mathbb{R}^{12}$ и будем обозначать ее буквой S . Уравнение Эйнштейна будет рассматриваться как динамическая система в физической области S фазового пространства. Каждая ее интегральная траектория представляет метрику $g_{\alpha\beta}(t)$ и тем самым однородную космологическую модель с данной (трехмерной) группой движений G , т. е. многообразием M^4 .

Среди общих однородных моделей выделяются такие метрики $g_{\alpha\beta}(t)$, для которых истинная группа движений \hat{G} , т. е. полная группа движений многообразия M^4 , является более широкой: $\hat{G} \supset G$. Рассмотрим максимальную группу движений $\hat{G} \supset G$, имеющую те же самые орбиты, что и G . Таким образом, группа \hat{G} является группой движений на каждой орбите $M^3(t)$ группы G :

$$M^3(t) = \hat{G}/H,$$

где H — стационарная подгруппа точки. Очевидно, что пересечение $G \cap H$ трехмерной группы G с H дискретно. Для размерностей имеем

$$\dim \hat{G} = 3 + \dim H.$$

З а м е ч а н и е. В принципе возможен случай, когда однородная модель M^4 с группой \hat{G} размерности > 3 имеет трехмерные пространственноподобные орбиты $M^3(t)$, но \hat{G} не имеет ни одной трехмерной подгруппы G , транзитивно действующей на $M^3(t)$. Мы этот случай рассматривать не будем.

З а д а ч а. Найдите все группы движений трехмерных многообразий, не содержащие транзитивных трехмерных подгрупп.

В общем случае, зависящем от максимального количества параметров и покрывающем все наиболее интересные примеры, имеется трехмерная транзитивная подгруппа $G \subset \hat{G}$.

Если размерность $\dim G > 3$, то метрика $g_{\alpha\beta}(t)$ однородного пространства $M^3(t)$, определяемая в силу однородности матрицей скалярных произведений в одной точке (при данном t), не может быть произвольной. Действие группы $H \subset \hat{G}$, сохраняющее эту точку, накладывает ограничения на матрицу $g_{\alpha\beta}(t)$, а также на матрицу $\dot{g}_{\alpha\beta}(t)$. Так как $g_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta < 0$, группа H является подгруппой группы $SO(3) \supset H$. Поэтому возможны два случая:

- а) $H = SO(3)$ (полная изотропия);
- б) $H = SO(2)$ (аксиальная изотропия в одной плоскости).

Следовательно, размерность группы \hat{G} может быть равна либо 6 (случай а), либо 4 (случай б)).

5. Модели Фридмана. Однородными и изотропными моделями (или моделями Фридмана) называются модели с группой \hat{G} размерности 6 (случай полной изотропии). Эти модели легко изучаются и имеют фундаментальное значение в релятивистской кос-

мологий. Астрономические наблюдения показывают, что на современной стадии Вселенная «в среднем» имеет однородное и изотропное распределение материи, если провести усреднение по достаточно большим масштабам, которые тем не менее пренебрежимо малы по сравнению с Метагалактикой, т. е. наблюдаемой сегодня частью Вселенной (размер Метагалактики $\sim 10^{28}$ см; говоря об изотопии в распределении материи, следует провести усреднение по масштабам «скоплений Галактик», т. е. 10^{25} — 10^{26} см. Однако анизотропия в реликтовом излучении пока не найдена; напомним, что на более ранних стадиях эволюции Вселенной плотность энергии реликтового излучения превосходила плотность материи).

Имеется всего три однородных и изотропных односвязных трехмерных многообразия M^3 с группой \hat{G} размерности 6. Это — сфера S^3 , евклидово пространство \mathbb{R}^3 и пространство Лобачевского L^3 (ср. §§ 9, 10 части I, где рассмотрен двумерный случай). Метрика этих пространств может быть записана в виде (t — параметр):

$$dl^2(t) = a^2(t) dl_0^2 = \begin{cases} a^2(d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2(S^3)), \\ a^2(d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2(\mathbb{R}^3)), \\ a^2(d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi d\Omega^2(L^3)), \end{cases} \quad (44)$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

где a^2 — масштабный множитель, $d\Omega^2$ — обычная метрика единичной сферы S^2 . В соответствии с этим метрика многообразия M^4 в синхронной системе отсчета может быть записана в виде

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2(t) = (dx^0)^2 - a^2(t) dl_0^2. \quad (45)$$

Далее, скорость материи u обязана в полностью изотропном случае быть тривиальной,

$$u = (1, 0, 0, 0),$$

так как ненулевая пространственная скорость нарушала бы полную изотропию. Введем новую временную координату η , полагая

$$c dt = a d\eta. \quad (46)$$

После этого имеем

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 + dl_0^2). \quad (47)$$

Вычисляя R_0^0 и R в случае сферы S^3 по общим формулам (см. § 30 части I), имеем

$$a' = \frac{da}{a\eta}, \quad R = -\frac{6}{a^3}(a + a''), \quad R_0^0 = \frac{3}{a^4}(a'^2 - aa'').$$

Так как $u = (1, 0, 0, 0)$, имеем

$$T_0^0 = \varepsilon.$$

Уравнения Эйнштейна сведутся к одному уравнению

$$R_0^0 - \frac{1}{2} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_0^0.$$

В случае сферы S^3 это дает уравнение

$$\frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon = \frac{3}{a^4} (a'^2 + a^2). \quad (48)$$

Из соотношения

$$\nabla_a T_b^a = 0$$

для всех трех случаев S^3 , \mathbb{R}^3 , L^3 имеем

$$-\frac{d\varepsilon}{p + \varepsilon} = 3d \ln a, \quad (49)$$

или

$$3 \ln a = - \int \frac{d\varepsilon}{p + \varepsilon} + \text{const.}$$

Зная уравнение состояния $p(\varepsilon)$, из (48) и (49) получаем полное решение задачи об определении метрики ds^2 , т. е. функции $a(t)$.

Для случая $p = 0$ имеем $\varepsilon = \mu c^2$, где μ — плотность массы. Величина $M = \mu a^3$ является интегралом уравнений (48).

1) В случае сферы S^3 получаем

$$a = a_0 (1 - \cos \eta),$$

$$t = \frac{c_0}{c} (\eta - \sin \eta).$$

При малых временах, т. е. при $\eta \rightarrow 0$,

$$\mu \sim \frac{1}{6\pi G} t^{-2} \quad (50)$$

(проверьте!). При $a \rightarrow 0$ метрика имеет особенность.

2) В случае L^3 аналогично получаем

$$3 \ln a = - \int \frac{d\varepsilon}{p + \varepsilon} + \text{const.}$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon = \frac{3}{a^4} (a'^2 - a^2), \quad (51)$$

$$a = a_0 (\text{ch } \eta - 1), \quad t = \frac{a_0}{c} (\text{sh } \eta - \eta).$$

Заметим, что при $\eta \rightarrow 0$ мы имеем для плотности массы прежнюю асимптотику (50):

$$\mu \sim \frac{1}{6\pi G} t^{-2}.$$

3) В случае \mathbb{R}^3 имеем ($p = 0$)

$$\begin{aligned} 3 \ln a &= - \int \frac{d\varepsilon}{p + \varepsilon} + \text{const}, \\ \frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon &= \frac{3}{a^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2, \quad \mu a^3 = \text{const}, \\ a &= \text{const} \cdot t^{2/3}. \end{aligned} \tag{52}$$

При $\eta \rightarrow 0$ имеем опять

$$\mu \sim \frac{1}{6\pi G} t^{-2}.$$

Для уравнения состояния $p = \varepsilon/3$ легко получить аналогичные формулы, но интеграл здесь имеет вид $\varepsilon a^4 = \text{const}$. Считается, что при $\varepsilon \rightarrow \infty$ надо пользоваться именно этим уравнением состояния вместо $p = 0$. Отметим в виде задачи интересное свойство.

Задача. Докажите, что метрика изотропной модели «конформно плоская» (т. е. конформно эквивалентна метрике Минковского).

Световые лучи во всех трех случаях, как легко видеть, распространяются по линиям ($\varphi = \theta = \text{const}$)

$$\chi = \pm \eta + \text{const}. \tag{53}$$

В силу нестационарности метрики частота света ω не является интегралом движения; вместо этого вдоль луча верно равенство $\omega a = \text{const}$.

Задача. Рассмотрите уравнение Максвелла в изотропной метрике вида $ds^2 = a(\eta) (d\eta^2 - dl_1^2)$, где $a(\eta)$ — произвольная функция. Найдите решения (приближенные) вида

$$A(x, t) = e^{i\omega t} \tilde{A}(x), \quad c dt = a d\eta, \quad \omega \gg a^{-1}.$$

Докажите, что $\omega a = \text{const}$.

Если ω_0 — частота в момент испускания $\eta_0 = \eta - \chi$ света, то в момент наблюдения η имеем

$$\omega = \omega_0 \frac{a(\eta - \chi)}{a(\eta)}. \tag{54}$$

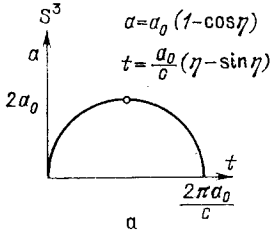
Графики величины $a(\eta)$ в трех рассматриваемых случаях (можно также заменять $t \rightarrow -t$, $\eta \rightarrow -\eta$) имеют вид, показанный на рис. 163. Астрономические наблюдения показывают, что Вселенная расширяется: непосредственно наблюдается величина

$$H = c \frac{a'(\eta)}{a^2} = \frac{d \ln a}{dt}, \tag{55}$$

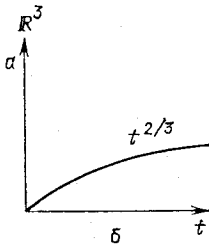
именуемая «константой Хаббла». Величина H^{-1} имеет размерность времени и сегодняшние ее оценки таковы:

$$H^{-1} \sim 13 \cdot 10^9 \text{ лет} \pm 25\%. \quad (56)$$

Отсюда следует, в частности, конечность времени от момента $a = 0$ до момента t_0 , где $1/H$ имеет сегодняшнее значение (56). Мы можем получить соотношения



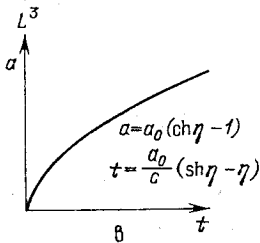
$$\begin{aligned} S^3: t &= \frac{a_0}{c} (\eta - \sin \eta) = \frac{1}{H} g(\eta) = \\ &= \frac{1}{H} \frac{\sin \eta (\eta - \sin \eta)}{(1 - \cos \eta)^2}, \end{aligned}$$



$$R^3: t = \frac{2}{3} H^{-1}, \quad (57)$$

$$\begin{aligned} L^3: t &= \frac{a_0}{c} (\text{sh } \eta - \eta) = \frac{1}{H} f(\eta) = \\ &= \frac{1}{H} \frac{\text{sh } \eta (\text{sh } \eta - \eta)}{(\text{ch } \eta - 1)^2}. \end{aligned}$$

Так как $\frac{2}{3} < f(\eta) < 1$, $0 < g(\eta) < \frac{2}{3}$, во всех случаях приходим к общему выводу: *время t_0 от момента $a = 0$ до сегодняшнего значения H не превосходит H^{-1} (в изотропной модели Фридмана с $p = 0$). Рассмотрение уравнения состояния $p = \epsilon/3$ не меняет существенным образом этих оценок (проверьте!).*



Задача. Покажите, что для $\mu > \frac{3H^2}{8\pi G}$

имеем случай S^3 , для $\mu = \frac{3H^2}{8\pi G}$ имеем слу-

чай R^3 , для $\mu < \frac{3H^2}{8\pi G}$ имеем случай L^3 ($p = 0$).

6. Анизотропные вакуумные модели. Возникает естественный вопрос: в какой мере важнейшие выводы, сделанные при рассмотрении однородных и изотропных моделей, сохраняются в более общих решениях. С этой целью рассматриваются различные классы возмущений изотропных моделей. Общие однородные (но анизотропные) модели — это единственный класс «больших» возмущений изотропной модели, который является к настоящему времени достаточно хорошо изученным. Наиболее важными вопросами являются следующие:

1. Имеется ли особенность в общем решении или это специфика изотропной модели?

2. Можно ли утверждать в каком-либо смысле, что достаточно общие начальные состояния для метрики в процессе эволюции приведут к «изотропизации», которая наблюдается на современной стадии?

По поводу существования особенности легко доказать следующее: пусть $g = \det(g_{ab}(t))$ и $d\sigma = \sqrt{-g} d^4x$ — элемент объема на M^4 . Из уравнений Эйнштейна вместе с положительностью плотности энергии $T_{00} \geq 0$ легко выводится, что существует точка t_0 , в которой $g(t_0) = 0$. Для некоторых однородных моделей вывод этого утверждения будет дан ниже. Однако это еще не означает наличие особенности для многообразий M^4 с метрикой g_{ab} сигнатуры $(+, -, -, -)$. Мы работали в синхронной системе отсчета, где «пространственная» часть — это орбиты группы и время t ортогонально к орбитам.

Рассмотрим новую временную координату \tilde{x}_0 , не ортогональную (но трансверсальную) к орбитам, при переходе к которой метрика \tilde{g}_{ab} приобретет, например, вид

$$\tilde{g}_{ab} = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{00} & \tilde{g}_{01} & 0 & 0 \\ \tilde{g}_{10} & \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{13} \\ 0 & \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} & \tilde{g}_{23} \\ 0 & \tilde{g}_{31} & \tilde{g}_{32} & \tilde{g}_{33} \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}_{ab} = \tilde{g}_{ba}. \quad (58)$$

Пусть $\tilde{g}_{01} \neq 0$. Можно выбрать, например, «световую» координату \tilde{x}^0 , для которой $\tilde{g}_{00} = 0$. Имеем, строго говоря, новые левинвариантные поля \tilde{X}_a , тоже удовлетворяющие соотношениям (41). Если \tilde{X}_0 — световая геодезическая, то $\tilde{g}_{00} = 0$, $\tilde{g}_{01} = \gamma = \text{const}$. Если при $t = t_0$

$$\tilde{g}_{11} = \tilde{g}_{12} = \tilde{g}_{13} = 0,$$

то ограничение метрики g_{ab} на орбиту $M^3(t_0)$ будет вырождено. В этом случае, если перейти к синхронной системе отсчета, будем иметь $g = 0$. Такая ситуация называется «фиктивной особенностью» и может возникать уже в аксиально симметричных возмущениях изотропной модели.

В отличие от изотропного случая для однородных анизотропных моделей имеется ряд нетривиальных «вакуумных» решений, т. е. решений, в которых $\epsilon = 0$. Приведем простейшие из них.

1) Решение Казнера. Здесь $G = \mathbb{R}^3$ (тип I по классификации п. 5 § 24 части I); метрика имеет вид ($c = 1$)

$$ds^2 = dt - \sum_{\alpha=1}^3 t^{2p_\alpha} (dx^\alpha)^2. \quad (59)$$

Выполнение следующих двух условий равносильно уравнению Эйнштейна в пустом пространстве:

$$R_{ab} = 0 \leftrightarrow \sum_{\alpha=1}^3 p_{\alpha} = 1, \quad \sum_{\alpha=1}^3 p_{\alpha}^2 = 1.$$

Задача. Покажите, что метрика Казнера (59) для $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 1$ заменой координат приводится к метрике Минковского. Таким образом, в этом случае особенность $t = 0$ «фиктивна». Здесь поля X_a коммутируют и дают координатные оси (x^a). Как выглядит в пространстве Минковского действие группы $G = \mathbb{R}^3$?

2) **Решение Тауба — Мизнера.** Здесь $G = SU(2)$ (тип IX). В синхронной системе отсчета мы будем считать матрицу $g_{\alpha\beta}(t)$ диагональной: $g_{\alpha\beta} = q_{\alpha}^2 \delta_{\alpha\beta}$. Пусть $q_1^2 = a$, $q_2^2 = b$, $q_3^2 = c$. Случай Тауба — Мизнера выделяется условиями:

а) аксиальная изотропия, $a = b$ (здесь полная группа \hat{G} четырехмерна и изоморфна $SU(2) \times SO(2)$);

б) $\varepsilon = 0$.

Уравнения Эйнштейна $R_{ab} = 0$ для такого случая интегрируются точно. Решение имеет вид (в синхронной системе отсчета)

$$a^2 = b^2 = \frac{p}{2} \frac{\operatorname{ch}(2p\tau + \delta_1)}{\operatorname{ch}^2(p\tau + \delta_2)}, \quad (60)$$

$$c^2 = \frac{2p}{\operatorname{ch}(2p\tau + \delta_1)}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{abc}.$$

Пространственные орбиты — это $M^3(t) = SU(2) = S^3$. При $t \rightarrow 0$ линейные размеры на орбите по одному направлению стягиваются к нулю, как это видно из формул (60). Это означает, что в синхронной системе отсчета получаем отображение стягивания

$$t \rightarrow 0, \quad p: S^3 \rightarrow S^2 = M^3(0) = S^3/S^1 = SU(2)/SO(2)$$

со слоем S^1 . Это — расслоение Хопфа над S^2 . Казалось бы, возникает особая сфера S^2 при $t = 0$. Однако можно ввести новые поля \tilde{X}_a^{\pm} , удовлетворяющие требованиям (41) со световой координатой X_0^{\pm} , в которых метрика неособа при $t = 0$ и имеет вид

$$\tilde{g}_{ab}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & \tilde{g}_{11}^{(\pm)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{g}_{22}^{(\pm)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{g}_{33}^{(\pm)} \end{pmatrix} = \langle \tilde{X}_a^{\pm}, \tilde{X}_b^{\pm} \rangle, \quad (61)$$

$$\tilde{g}_{11}^{(\pm)} = \tilde{q}_1^2 = \frac{At + 1 - 4B^2 t^2}{B(4B^2 t^2 + 1)}, \quad \tilde{g}_{22}^{(\pm)} = \tilde{g}_{33}^{(\pm)} = Bt^2 + \frac{1}{4B}.$$

Это — метрики Тауба — Мизнера.

Задача. Докажите, что метрики (61) и (60) определяют одно и то же многообразие M^4 в области $t > 0$. Выразите поля \tilde{X}_a^+ через \tilde{X}_a^- в виде матрицы $A(t)$, $\tilde{g}_{11}^{(\pm)} > 0$.

На орбите $t = 0$ интегральные линии поля \tilde{X}_1^\pm в $SU(2) = M^3(0)$ являются замкнутыми световыми линиями.

Задача. Покажите, что линии старой (синхронной) координаты x^0 из области $t > 0$, $t = x^0/c$ наматываются на эти окружности как на предельные циклы. Это — топологически бесконечные линии конечной длины («неполнота» индефинитной метрики).

Замечание. Интересно обратить внимание на такое свойство метрик Тауба — Мизнера $\tilde{g}_{ab}^{(\pm)}$, являющихся аналитическим продолжением одной и той же метрики Тауба в синхронном времени (t) из области $t > 0$: замена переменных в этой области, переводящая $\tilde{g}_{ab}^{(+)}$ в $\tilde{g}_{ab}^{(-)}$, аналитически не продолжима на все многообразие. Более того, метрики $\tilde{g}_{ab}^{(+)}$ и $\tilde{g}_{ab}^{(-)}$ вообще не изоморфны на всем многообразии M^4 , так как изометрия между этими метриками в области $t > 0$ единственна, и матрица $A(t)$ перехода от полей \tilde{X}_a^+ к полям \tilde{X}_a^- неаналитична при $t = 0$ (t — синхронное время). Таким образом, аналитическое продолжение за фиктивную особенность не единственно.

Удивляться свойствам метрики Тауба — Мизнера не приходится; рассмотрим простой пример двумерной метрики на двумерном многообразии с координатами x, τ в области $\tau > 0$:

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{\tau^2}{4} dx^2.$$

Эта метрика допускает группу $G: x \rightarrow x + x_0$. Будем считать координату x циклической: $x \sim x + 2\pi$. Таким образом, здесь $G = SO(2)$. Эта метрика синхронна и имеет смысл только при $\tau > 0$. Зададим два продолжения, сделав замены:

$$\tau = 2\sqrt{u_+}, \quad x = \ln u_+ - v_+;$$

$$\tau = 2\sqrt{u_-}, \quad x = \ln u_- + v_-.$$

В координатах (u_\pm, v_\pm) имеем

$$ds_\pm^2 = \pm 2du_\pm dv_\pm - u_\pm (dv_\pm)^2.$$

Матрица $\tilde{g}_{ab}^{(\pm)}$ имеет вид

$$\tilde{g}_{ab}^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -u_+ \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}_{ab}^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -u_- \end{pmatrix}.$$

Координата v_\pm циклическая, $-\infty < u_\pm < \infty$. Замена переменных от $\tilde{g}_{ab}^{(\pm)}$ к $\tilde{g}_{ab}^{(-)}$ в двумерном случае существует и имеет вид

$$u_+ = u_-, \quad v_+ = -v_-.$$

Эта замена не обобщается на решение Тауба — Мизнера.

В двумерном примере метрик $(ds_{\pm})^2$ линия $u_{\pm} = 0$ есть предельный цикл для линий $x = \text{const}$ синхронного времени, ортогональных орбитам группы $G = SO(2)$ (рис. 164).

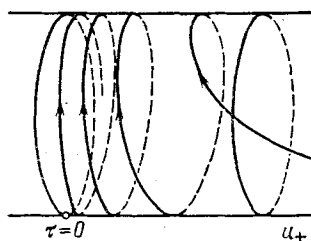


Рис. 164

7. Более общие модели. Известен ряд других, более сложных однородных моделей с ненулевой материей $\varepsilon \neq 0$, которые также обладают «фиктивной особенностью» и продолжаются в область, где орбиты группы не пространственноподобны (там эти решения могут иметь весьма сложное поведение). Наибольший интерес представляют однородные модели с группа-

ми типов I, V, VII и IX (см. § 24 части I), алгебры Ли которых описываются следующими формулами:

$$\mathbb{R}^3 \text{ (тип I), } [X_{\alpha}, X_{\beta}] = 0;$$

$$\mathfrak{g}_5 \text{ (тип V), } [X_1, X_2] = X_2, [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = -X_3;$$

$$\mathfrak{g}_7 \text{ (тип VII), } [X_1, X_2] = aX_2 + X_3, [X_2, X_3] = 0,$$

$$[X_3, X_1] = X_2 - aX_3;$$

$$\mathfrak{g}_9 \text{ (тип IX), } [X_1, X_2] = X_3, [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$$

Эти модели интересны в первую очередь, поскольку в них содержатся как частный случай изотропные модели Фридмана и имеем смысл говорить об «изотропизации» метрики при расширении Вселенной. Простейшим решением такого рода, дающем «наивное» решение проблемы изотропизации в частном случае, является метрика Гекмана — Шюкинга (тип I)

$$ds^2 = dt^2 - \sum_{i=1}^3 c_i t^{2p_i} (t + t_0)^{4/3-2p_i} dx_i^2, \quad (62)$$

$$c_i > 0, \quad p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1.$$

При $t \rightarrow 0$ имеем асимптотику решения Казнера (выше), а при $t \rightarrow \infty$ асимптотику решения Фридмана.

Для изотропных моделей алгебры Ли их групп движений имеют вид

$$G = G_+^6: [X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k, [Y_i, Y_j] = \varepsilon_{ijk} Y_k,$$

$$[X_i, Y_j] = 0 \text{ (случай } S^3);$$

$$G = G_0^6: [X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k, [X_i, Y_j] = \varepsilon_{ijk} Y_k,$$

$$[Y_i, Y_j] = 0 \text{ (случай } \mathbb{R}^3);$$

$$G = G_-^6 = sl(2, \mathbb{C}) \text{ (случай } L_3).$$

Укажем в этих алгебрах Ли подалгебры G размерности три типов I, V, VII, IX, которые транзитивно действуют на многообразиях S^3 , \mathbb{R}^3 , L^3 :

$$\begin{aligned} \text{I: } & [Y_i, Y_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3; \\ \text{V: } & [X_1, X_2] = X_2, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_3; \\ \text{VII: } & [X_1, X_2] = aX_2 + X_3, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad [X_3, X_1] = X_2 - aX_3; \\ \text{IX: } & [X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk}X_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (63)$$

Итак, решения Фридмана для изотропного случая являются частным случаем однородных моделей типов I, V, VII и IX, которые благодаря этому пригодны для исследования их однородных возмущений. (В множестве возможных структурных констант типы I и V «предельны» для типов VII и IX.)

Оказывается, что решения с фиктивной особенностью не являются общими в моделях типов I, VII и IX (и, вероятно, V) и исчезают при малых возмущениях (они «нетипичны»). Имеется целый ряд нетривиальных асимптотик при $t \rightarrow 0$, из которых наиболее сложной является так называемый «осцилляционный режим», открытый сравнительно недавно. Эта тема интенсивно развивалась с конца 60-х годов, и мы не будем здесь входить в современные вопросы, связанные с «осцилляционными режимами», с проблемой возникающей здесь теории уравнений Эйнштейна как качественной теории динамических систем.

В течение 70-х годов было проведено глубокое исследование эволюции Вселенной в однородных моделях на ранних стадиях эволюции методами современной многомерной качественной теории динамических систем. Эти исследования завершили предшествующие работы физиков, открывших первоначально более элементарными методами сложный осцилляционный режим эволюции метрики при сжатии Вселенной к сингулярности, дали классификацию всех других режимов на ранних стадиях и позволили четко поставить и решить (в рамках теории однородных космологических моделей) следующий вопрос: как точно определяются «типичные начальные состояния» метрики на ранних стадиях эволюции (по отношению к процессу расширения) и какими они фактически являются.

В случае модели типа IX (группа $G = SU(2)$), если материя «в среднем» не движется, $u = (1, 0, 0, 0)$, то метрику пространства можно во все моменты времени считать диагональной в синхронном времени:

$$g_{\alpha\beta}(t) = q_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta}.$$

Если $p = k\varepsilon$, $0 \leq k \leq 1$, то уравнения Эйнштейна после замены времени $t \rightarrow \tau$, $q^h d\tau = dt$, где $q = q_1 q_2 q_3$, приобретут вид гамиль-

тоновой системы с гамильтонианом H (проверьте!),

$$H = \frac{1}{4(q_1 q_2 q_3)^{1-k}} (P_2(p_\alpha q_\alpha) + P_2(q_\alpha^2)), \quad p_i = \frac{d}{dt}(q_j q_l), \quad i \neq j \neq l \neq i, \quad (64)$$

$$P_2(x_1, x_2, x_3) = 2 \sum_{\alpha < \beta}^3 x_\alpha x_\beta - \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha^2.$$

З а м е ч а н и е. В случае I типа система также диагоналізується и гамильтониан имеет вид $H = H^1(p, q) = \frac{1}{4(q_1 q_2 q_3)^{1-k}} P_2(p_\alpha q_\alpha)$.

Имеется связь между H и ε :

$$\varepsilon(q_1 q_2 q_3)^{1+k} = A = H(p, q) \geq 0. \quad (65)$$

Поэтому «физическая область» $S \subset \mathbb{R}^6(p, q)$ выделяется условиями

$$q_\alpha > 0, \quad H(p, q) \geq 0. \quad (66)$$

Имеется масштабная группа преобразований:

$$q_\alpha \rightarrow \lambda q_\alpha, \quad p_\alpha \rightarrow \lambda p_\alpha, \quad H \rightarrow \lambda^{3k-1} H. \quad (67)$$

Для элемента объема $q = \sqrt{-g} = q_1 q_2 q_3$ имеем

$$\dot{q} = \frac{1}{2}(p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3). \quad (68)$$

Отсюда следует, что если $\dot{q}(t_0) < 0$, то $\dot{q}(t) < 0$ для всех $t > t_0$, причем $\frac{d^2}{dt^2}(q^{1/3}) = -R_0^0 q^{1/3} / 3 < 0$. Поэтому, направляя время в сторону сжатия, неизбежно получим точку t_1 , в которой $q(t_1) = 0$ (особенность или «фиктивная особенность»). Направляя время обратно, в сторону расширения, будем изучать стадию $q > 0$ и $\dot{q} > 0$. Аксиально изотропный случай получим на фазовой поверхности $q_2 = q_3$ (или $q_2 = q_3, p_2 = p_3$). Используя масштабную группу (67), в этом случае можно свести уравнение Эйнштейна к трехмерной динамической системе. Выбирая координаты

$$u = \frac{p_1 q_1}{p_2 q_2 + p_3 q_3} = \frac{p_1 q_1}{2p_2 q_2}, \quad w = \frac{q_1^2}{2p_2 q_2}, \quad v = \frac{q_2 w}{q_1}, \quad (69)$$

мы получим систему

$$\frac{du}{d\tau} = \dot{u} = -w^2 + 2v^2 - 2uv^2 + (2u - 1)H_2,$$

$$\dot{w} = w(u - 1 + 2H_2 - 2v^2),$$

$$\dot{v} = \frac{1}{2}v(-k - (1-k)(u-1)^2 - (1-k)w^2 - 4kv^2), \quad (70)$$

$$H_2 = \frac{1-k}{4}(1 - (u-1)^2 - w^2 + 4v^2), \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{w}{q_1 v^2}$$

при условии положительности метрики и энергии:

$$H_2 \geq 0, \quad w < 0, \quad v < 0. \tag{71}$$

На «границе», где $v = 0$, получаем в координатах u, w, v инвариантное многообразие размерности 2 с координатами u, w , в которых система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -w^2 + (2u - 1)\bar{H}_2, \quad \dot{w} = w(u - 1 + 2\bar{H}_2), \\ \bar{H}_2 &= \frac{1-k}{4}(1 - (u - 1)^2 - w^2). \end{aligned} \tag{72}$$

Особые точки имеют координаты:

Φ (седло) $u = 1/2, w = 0, v = 0;$

C (седло) $u = 2, w = 0, v = 0;$

N (фокус) $u = \frac{3+k}{5-k}, w = -\frac{1}{5-k} \sqrt{(1+3k)(1-k)}, v = 0;$

T (узел) $u = w = v = 0.$

Картина поведения траекторий (72) имеет вид, показанный на рис. 165. Общая траектория (при сжатии) в силу свойства $\dot{v}/v < 0$ стремится к поверхности $v = 0$. Вся физическая область в координатах u, w, v имеет вид $H_2 \geq 0, w \leq 0, v \leq 0$. Приближаясь к границе $v = 0$, траектория примерно повторяет картину траекторий на границе $v = 0$ (см. рис. 165). Сепаратрисы («усы»), входящие изнутри физической области в особые точки типов Φ, N, T , дают решения уравнений Эйнштейна, где при $t \rightarrow 0$ метрика имеет асимптотику

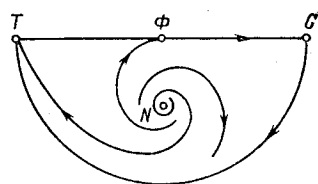


Рис. 165

$$(\Phi) \quad q_i \cong c_i t^{\frac{4}{3(1-k)}}$$

(в частном случае здесь имеем решения Фридмана $q_1 = q_2 = q_3$);

$$(T) \quad q_1 \cong c_1 t^2, \quad q_2 \cong q_3 \cong c_2$$

(в частном случае при $q_2 = q_3$ здесь имеем решение Тауба);

$$(N) \quad q_1 \cong c_1 t^{\frac{1-k}{1+k}}, \quad q_2 \cong c_2 t^{\frac{3+k}{2(1+k)}}, \quad q_3 \cong c_3 t^{\frac{3+k}{2(1+k)}}.$$

Таким образом, имеется достаточно много асимптотик типа T , дающих фиктивную особенность в том более слабом смысле, что метрика $g_{\alpha\beta}$ может быть лишь непрерывно продолжена (без вторых производных). Плотность энергии имеет «слабую» особенность (тип T) $\epsilon \sim t^{-(1+k)}$ ($\epsilon(q_1 q_2 q_3)^{1+k} = \text{const}$).

Без гипотезы аксиальной изотропии тип T уже не будет «общим» в модели типа IX.

Для более простых I и V типов, если материя не движется ($u^0 = 1$ и $u^\alpha = 0$ при $\alpha = 1, 2, 3$), исследование уравнений Эйнштейна без гипотезы аксиальной изотропии сводится к динамической системе на фазовой плоскости.

Подробное описание этих и других результатов теории однородных космологических моделей читатель найдет в книге [49], см. также [50]. Обсуждение ряда важных физических аспектов релятивистской космологии содержится в книгах [38], [39], [47].

Проведенное выше качественное исследование динамики однородной аксиально изотропной модели типа IX на ранней стадии эволюции методологически весьма интересно. Оно показывает, что «типичные» состояния, отвечающие процессу сжатия (окрестность типа T), не совпадают с «типичными» состояниями, отвечающими процессу расширения (окрестность типа N). Это сразу же видно из рис. 121, где стрелки отвечают процессу сжатия. Строго говоря, термин «типичные состояния» здесь означает следующее. Если взять случайное начальное условие и решать уравнения Эйнштейна в сторону сжатия, то достаточно близко к особенности с вероятностью 1 мы окажемся в фазовой окрестности типа T этой модели. Для процесса расширения точное определение типичного состояния более сложно. Здесь уместно воспользоваться построенным выше трехмерным фазовым многообразием в координатах u, v, w , где возникают «бесконечно ранние» состояния; им отвечает кусок плоскости $v = 0, H_2 \geq 0$, так как $v \rightarrow 0$ при сжатии пространственного объема к нулю. Учитывая этот ансамбль бесконечно ранних состояний (которых, строго говоря, нет в физической области фазового пространства $v > 0, H_2 > 0$), получаем естественный подход к определению понятия типичного состояния метрики на ранней стадии эволюции Вселенной по отношению к процессу расширения (а не сжатия!). Следует задать случайное начальное условие на некотором малом расстоянии $\epsilon > 0$ от границы, например, где $|v| = \epsilon$. Затем, решая уравнения Эйнштейна в сторону расширения, нужно посмотреть развитие компонент метрики; не исключено, что за малое время $t_0(\epsilon)$ компоненты метрики успевают сосредоточиться в некоторой более узкой части фазового пространства, в окрестности определенных режимов, где $t_0(\epsilon) \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Выделенные таким образом режимы (при естественных гипотезах на распределение начальных данных при $|v| = \epsilon$) назовем «типичными ранними состояниями», отвечающими процессу расширения Вселенной в данной космологической модели. Как видно из рис. 121, после поворота стрелок в аксиально изотропной модели типа IX процессу расширения будут отвечать типичные состояния в окрестности типа N в отличие от сжатия, которому соответствует класс типичных состояний в окрестности типа T .

Анализ полностью анизотропных космологических моделей приводит к более сложным динамическим системам. Итоги этого анализа (и он сам) обсуждаются в книге [49]. Во всех достаточно сложных однородных космологических моделях процессу сжатия с вероятностью 1 отвечает осцилляционный режим Белинского — Лифшица — Халатникова (БЛХ) (см. также конец книги [38]), которому соответствует в качественной теории весьма интересный в некотором смысле «странный» аттрактор динамической системы Эйнштейна, лежащий на границе (после построения правильных координат) физически допустимой области фазового пространства, куда скатываются все траектории при уменьшении объема (стремлении к особенности).

Заметим, в частности, что в ОТО без космологической постоянной процесс сжатия не может быть устойчиво изотропным и флуктуации неизбежно выведут на сложные режимы типа БЛХ, которые упираются в аналитически сложную, никуда не продолжаемую особенность. Из этого вытекает, в частности, неправомочность рассмотрения какой-либо «предшествующей» стадии жизни Вселенной, где сжатие предшествовало расширению.

Процессу расширения, как оказывается, отвечают совсем другие, более регулярные типичные ранние состояния эволюции; их определение аналогично аксиально изотропной модели типа IX (см. выше), но более сложно. Среди этих состояний имеются только степенные асимптотики — квазиизотропные типа Φ , типов N , T и некоторые другие. В некоторых случаях эти степенные асимптотики носят промежуточный характер и до двух-трех раз успевают сменить друг друга на ранней стадии. Они довольно слабо зависят от типа однородной модели. Можно утверждать, что в итоге с большой вероятностью уже весьма рано (в точном смысле, указанном выше) успевает установиться квазиизотропный режим типа Φ , где темп расширения «почти», т. е. в главном члене асимптотики, изотропен, хотя сами компоненты метрики могут не быть изотропными. Настоящей, точной изотропизации Вселенной — стремления уже на ранней стадии именно к модели Фридмана с подавляющей вероятностью — из классической ОТО не следует. Таковы современные итоги теории однородных космологических моделей.

Общее исследование моделей IX и VII типов приводит к асимптотическим режимам, которые уже на ранней стадии расширения «изотропизуются» в некотором слабом смысле [49].

§ 32. Некоторые примеры глобальных решений уравнений Янга — Миллса. Киральные поля

1. Общие замечания. Решения типа монополей. Напомним, что поле Янга — Миллса $A_\mu(x)$ со значением в алгебре Ли группы G — это просто локальная форма записи связности в расслое-