Анализ полностью анизотропных космологических моделей приводит к более сложным динамическим системам. Итоги этого анализа (и он сам) обсуждаются в книге [49]. Во всех достаточно сложных однородных космологических моделях процессу сжатия с вероятностью 1 отвечает осцилляционный режим Белинского — Лифшица — Халатникова (БЛХ) (см. также конец книги [38]), которому соответствует в качественной теории весьма интересный в некотором смысле «странный» аттрактор динамической системы Эйнштейна, лежащий на границе (после построения правильных координат) физически допустимой области фазового пространства, куда скатываются все траектории при уменьшении объема (стремлении к особенности).

Заметим, в частности, что в ОТО без космологической постоянной процесс сжатия не может быть устойчиво изотропным и флуктуации неизбежно выведут на сложные режимы типа БЛХ, которые упираются в аналитически сложную, никуда не продолжаемую особенность. Из этого вытекает, в частности, неправомочность рассмотрения какой-либо «предшествующей» стадии жизни Вселенной, где сжатие предшествовало расширению.

Процессу расширения, как оказывается, отвечают совсем другие, более регулярные типичные ранние состояния эволюции; их определение аналогично аксиально изотропной модели типа IX (см. выше), но более сложно. Среди этих состояний имеются только степенные асимптотики — квазиизотропные типа Ф, типов N, T и некоторые другие. В некоторых случаях эти степенные асимптотики носят промежуточный характер и до двух-трех раз успевают сменить друг друга на ранней стадии. Они довольно слабо зависят от типа однородной модели. Можно утверждать, что в итоге с большой вероятностью уже весьма рано (в точном смысле, указанном выше) успевает установиться квазиизотропный режим типа Ф, где темп расширения «почти», т. е. в главном члене асимптотики, изотропен, хотя сами компоненты метрики могут не быть изотропными. Настоящей, точной изотропизации Вселенной — стремления уже на ранней стадии именно к модели Фридмана с подавляющей вероятностью — из классической ОТО не следует. Таковы современные итоги теории однородных космологических моделей.

Общее исследование моделей IX и VII типов приводит к асимптотическим режимам, которые уже на ранней стадии расширения «изотропизуются» в некотором слабом смысле [49].

§ 32. Некоторые примеры глобальных решений уравнений Янга — Миллса. Киральные поля

1. Общие замечания. Решения типа монополей. Напомним, что поле Янга — Миллса $A_q(x)$ со значением в алгебре Ли группы G — это просто локальная форма записи связности в расслоении со структурной группой G. Здесь x — локальные координаты в области U базы главного расслоения $p\colon E \to M$, над которой задано разложение в прямое произведение (см. § 24)

$$p^{-1}(U) = U \times G.$$

Мы будем рассматривать далее группу $G = SU(2)$ и базу $U = \mathbb{R}^n = M$, где $n = 3$, 4, причем связность «тривиализуется» при $|x| \to \infty$. Это значит, что при $|x| \to \infty$

$$A_a(x) \approx \frac{\partial g(x)}{\partial x^a} g^{-1}(x), \tag{1}$$

где $g(x)$ — функция со значениями в G. Кроме поля $A_a(x)$, будем рассматривать также поле $\psi(x)$ со значениями в векторном пространстве V, на котором задано линейное представление группы G. Для простоты будем считать, что V — это также алгебра Ли группы G, на котором алгебра Ли действует по формуле

$$A \leftrightarrow \operatorname{ad} A\colon\ \psi \to [A, \psi]$$

(присоединенное представление). Лагранжиан поля ψ в отсутствие связности должен иметь вид

$$L(\psi) = \frac{1}{2}\langle \partial\psi, \partial\psi\rangle - u(|\psi|^2), \tag{2}$$

где скалярное произведение в пространстве V определяется формой Киллинга (см. § 3), скалярное произведение $\langle \partial\psi, \partial\psi\rangle$ определяется формой Киллинга на V и метрикой базы $g_{ab}(x)$. В присутствии связности $A_a(x)$ следует сделать замену

$$\partial_a \to \partial_a - \operatorname{ad} A_a(x) = \nabla_a, \tag{3}$$

и ввести полный лагранжиан полей ψ и A (см. § 42 части I)

$$L(\psi, A) = \frac{1}{2}\langle \nabla\psi, \nabla\psi\rangle - u(|\psi|^2) + \frac{1}{4}\operatorname{Sp}\left(F_{ab}F^{ab}\right), \tag{4}$$

где

$$F_{ab} = \frac{\partial A_b}{\partial x^a} - \frac{\partial A_a}{\partial x^b} + [A_a, A_b].$$

Переходя к постановкам глобальных задач, следует считать поле $\psi(x)$ сечением некоторого векторного расслоения со слоем V и структурной группой G. О базе этого расслоения, если это не область в $\mathbb{R}^n$, мы отдельно скажем потом.

О функции u мы предположим, что $u \geqslant 0$ и ее график имеет вид, показанный на рис. 166.

Нас будут интересовать случаи $n = 3$ и $n = 4$.

Рассмотрим сначала случай $n = 3$. Пусть $G = SU(2)$, $\psi(x)$ — трехкомпонентное вещественное поле, операция в алгебре Ли — векторное произведение, база — евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Рассматриваем стационарную задачу для величины

$$S\{\psi, A\} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x \left\{\frac{1}{2}\langle\nabla\psi, \ \nabla\psi\rangle - u(|\psi|^2) + \frac{1}{4}\operatorname{Sp}\left(F_{ab}F^{ab}\right)\right\}. \quad (5)$$

Определение. *Вакуумным решением* уравнения $\delta S = 0$ называется поле (ψ, A) такое, что:

а) $F_{ab} = 0$;
б) $u(|\psi|^2) = \min$, $\psi = \text{const} = \psi_0$;
в) $\langle\nabla\psi, \ \nabla\psi\rangle = 0$.

Поскольку метрики базы $\mathbb{R}^3$ и слоя $V = \mathbb{R}^3$ евклидовы, из этого определения следует, что для всех x

$$A_\alpha = \frac{\partial g(x)}{\partial x^\alpha} g^{-1}(x), \quad \alpha = 1, 2, 3,$$
$$[A_\alpha(x), \ \psi] = 0. \quad (6)$$

Поэтому поле $A_\alpha(x)$ направлено по оси $\psi = \psi_0$ в алгебре Ли и является градиентом числовой функции $A_\alpha(x) = a_\alpha(x)\psi_0$, $a_\alpha(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}$. Добавляя к A_α градиентное слагаемое, мы сделаем поле A_α нулевым.

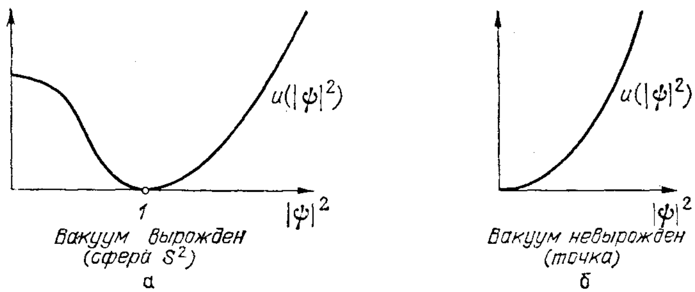

Рис. 166

Множество вакуумных решений образует сферу S^2 векторов $\psi_0 \in V = \mathbb{R}^3$, задаваемых условием

$$|\psi_0|^2 = 1 \quad (7)$$

в силу свойств функции u. В этом случае говорят, что вакуум «вырожден».

Класс допустимых полей (A, ψ) в постановке вариационной задачи $\delta S = 0$ для функционала (5) определяется требованием: при $|x| \to \infty$ поля (A, ψ) должны стремиться к «вакуумным» решениям, у которых $A \equiv 0$ и $\psi = \psi_0$. При этом вектор ψ_0 не обязан быть одним и тем же для всех направлений ухода $x \to \infty$, Если ψ_0 зависит только от направления $x = |x| \cdot n$, $|n| = 1$, $\psi_0 = \psi_0(n)$, то имеем отображение

$$\psi_0 \colon S^2 \to S^2, \tag{8}$$

которое направлению $n \in S^2$ сопоставляет точку $\psi_0(n)$ из «вакуумного» многообразия $u(|\psi_0|^2) = \min$. Отображение ψ_0 определяет «граничные условия» на бесконечности для полей (ψ, A). Степень отображения $\psi_0\colon S^2 \to S^2$ дает нам целочисленный топологический инвариант вариационной задачи в $\mathbb{R}^3$.

Лагранжиан (5) инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\begin{gathered} A_a(x) \to g(x)\, A_a(x)\, g^{-1}(x) - \frac{\partial g}{\partial x^a} g^{-1}(x), \\ \psi \to g\psi g^{-1} = T_g(\psi), \end{gathered} \tag{9}$$

где функция $g(x)$ со значениями в G определена на всем $\mathbb{R}^3$ и при $|x| \to \infty$, $x = |x| \cdot n$, имеет предел:

$$g(x) \to g_\infty(n)\colon S^2 \to G. \tag{10}$$

Используя этот произвол, можно менять отображение $\psi_0\colon S^2 \to S^2$, определяющее граничные условия на бесконечности.

Лемма. *Если отображения $\psi_0^{(1)}\colon S^2 \to S^2$ и $\psi_0^{(2)}\colon S^2 \to S^2$ гомотопны (и только в этом случае), можно найти такое отображение $g_\infty\colon S^2 \to G$, гомотопное нулю (или продолжаемое на все $\mathbb{R}^3$), что*

$$\psi_0^{(2)}(n) = T_{g_\infty(n)}\, \psi_0^{(1)}(n) = g_\infty(n)\, \psi_0^{(1)}(n)\, g_\infty^{-1}(n), \tag{11}$$

где n — единичный вектор из S^2.

Доказательство. Группа $G = SU(2)$ транзитивно действует на сфере S^2. Рассмотрим расслоение $\pi\colon G \times S^2 \to S^2 \times S^2$, где отображение π задано формулой $\pi(g, n) = (gn, n)$. Определим отображения Ψ_0, $\Psi_1\colon S^2 \to S^2 \times S^2$ следующим образом:

$$\Psi_0(n) = \left(\psi_0^{(1)}(n), \psi_0^{(1)}(n)\right), \quad \Psi_1(n) = \left(\psi_0^{(2)}(n), \psi_0^{(1)}(n)\right).$$

Из гомотопности $\psi_0^{(1)} \sim \psi_0^{(2)}$ вытекает гомотопность отображений Ψ_0 и Ψ_1. Гомотопию Ψ_t, связывающую эти два отображения, можно накрыть гомотопией $\widehat{\Psi}_t$ в пространстве расслоения $G \times S^2$, причем полагаем (по определению), отображение $\widehat{\Psi}_0\colon S^2 \to G \times S^2$ имеет вид

$$\widehat{\Psi}_0(n) = \left(1, \psi_0^{(1)}(n)\right), \quad \pi\widehat{\Psi}_0 = \Psi_0.$$

Тогда отображение $\widehat{\Psi}_1\colon S^2 \to G \times S^2$ имеет следующий вид: $\widehat{\Psi}_1(n) = (g_\infty(n), n)$, где $g_\infty(u)$ и есть искомое отображение g_∞:

$S^2 \to G$. Из построения очевидно, что g_∞ гомотопно отображению в единицу группы. Лемма доказана.

Вследствие леммы 1 отображение ψ_0: $S^2 \to S^2$ можно заменять на любое гомотопное ему. Таким образом, граничное условие определяется гомотопическим классом

$$k = [\psi_0] \in \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}.$$

Примеры. 1) При $k=0$ калибровочным преобразованием можно сделать $\psi_0 = \mathrm{const}$ $(|x| \to \infty)$. Можно считать, что $\psi_0 = (0, 0, 1)$.

В этом случае говорят о «потере симметрии» теории (остается только группа $SO(2) \subset G$ вращений в плоскости векторов (1, 0, 0) и (0, 1, 0) — «малая группа вакуума»). С целью дальнейшего построения теории возмущений около вакуумного состояния, делают замену $\psi = \psi_0 + \tilde{\psi}$, $f_\alpha(x) = (A_\alpha(x))^3$, $(B^1)_\alpha = (A_\alpha)^1$, $(B^2)_\alpha = (A_\alpha)^2$. Получим новый лагранжиан

$$\tilde{L}(f_\alpha, B^1, B^2, \tilde{\psi}) = L(\psi, A).$$

Если потенциал $u(\xi) = u(|\psi|)^2$ имел вид, показанный на рис. 166, *а*, и $u_{\xi\xi}(1) = m^2 > 0$, то получаем (положив $\tilde{\psi}^1 = \tilde{\psi}^2 = 0$ и разлагая u в ряд по ξ в точке $\psi_0 = (0, 0, 1)$ — см. задачу ниже)

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}\sum_a (\partial_a \tilde{\psi})^2 - 2m^2\tilde{\psi}^2 + \frac{1}{2}(|B^1|^2 + |B^2|^2) - \\ - \frac{1}{2}(|\operatorname{rot} B^1|^2 + |\operatorname{rot} B^2|^2 + |\operatorname{rot} f|^2) + \ldots$$

где остаток состоит из членов 3-го порядка и выше по полям f, B, $\tilde{\psi} = \psi^3$.

Задача. Покажите, что калибровочным преобразованием можно добиться $\tilde{\psi}^1 = \tilde{\psi}^2 = 0$.

2) При $k=1$ можно считать, что $\psi_0(n) = n$ для отображения ψ_0: $S^2 \to S^2$. Это отображение «сферически симметрично». Физиками найдено интересное сферически симметричное решение уравнений Янга — Миллса $\delta S = 0$ для функционала (5):

$$A_a^i = a(r)\,\varepsilon_{aij}x_j, \\ \psi^i = x^i \frac{u(r)}{r}, \quad r = |x|, \tag{12}$$

при $r \to \infty$ $\quad u(r) \to u_\infty, \quad a(r) \to -\frac{1}{gr^2}$,

при $r \to 0$ $\quad u(r) \to \mathrm{const}\cdot r, \quad a(r) \to \mathrm{const}$.

Так как граничное отображение на бесконечности

$$\psi_0\colon S^2 \to S^2, \quad \psi_0(n) = n \in \mathbb{R}^3 = (\psi^1, \psi^2, \psi^3),$$

имеет степень 1, то его продолжение до гладкого поля $\psi(x)$ в $\mathbb{R}^3=(x^1, x^2, x^3)$ должно иметь точки, где $\psi=0$. Итак, существует гладкое решение $\{A_\alpha(x), \psi(x)\}$, где $\psi(x)$ неизбежно обращается в нуль в $\mathbb{R}^3$ в некоторой точке x_0 (пусть эта точка одна).

Имеется интересное отображение, сопоставляющее паре (A_α, ψ) скалярное поле $f_\alpha(x)$, которое удовлетворяет уравнениям Максвелла в пустом пространстве всюду, где $\psi\neq 0$ (т. е. вне точки x_0):

$$\begin{gathered}H_{\alpha\beta}=\frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\beta}-\frac{\partial f_\beta}{\partial x^\alpha},\\ H_{\alpha\beta}=\frac{1}{|\psi|}\psi^i F^i_{\alpha\beta}-\frac{1}{|\psi|^3}\varepsilon_{ijk}\psi_i(\nabla_\alpha\psi_j)(\nabla_\beta\psi_k).\end{gathered}\tag{13}$$

Из вида этого отображения и из (12) следует, что интеграл от поля $H_{\alpha\beta}=\frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\beta}-\frac{\partial f_\beta}{\partial x^\alpha}$ по сфере большого радиуса равен 4π. Поэтому из несингулярного решения уравнений Янга — Миллса получается так называемый «магнитный монополь». Отображение (13) сопоставляет паре (A_α, ψ) расслоение в области $\mathbb{R}^3\setminus x_0$, где $\psi(x_0)=0$, с абелевой структурной группой $SO(2)=S^1$, причем решение уравнений Янга — Миллса переходит в решение уравнений Максвелла для стационарного магнитного поля $H=(H_{\alpha\beta})=$ $=\frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\beta}-\frac{\partial f_\beta}{\partial x^\alpha}$.

2. Уравнение дуальности. Перейдем теперь к случаю $n=4$. Вообще говоря, рассмотрение возникающих в физике лагранжианов требует решения уравнений Янга — Миллса типа $\delta S=0$ в пространстве Минковского $\mathbb{R}^4_1$ для полей $A_\alpha(x)$ и некоторых полей ψ (возможно, тензорных или спинорных). Уже само «чистое» уравнение Янга — Миллса при отсутствии других полей ψ является нелинейным и довольно сложным в отличие от обычных уравнений Максвелла. Для пространства $\mathbb{R}^4_1$ нетривиальные вещественные решения этих уравнений не известны. В физической литературе найдены серии решений для евклидова пространства $\mathbb{R}^4$, некоторые из них мы далее опишем. Считается, что они также могут оказаться физически полезными. Кроме того, эти решения весьма интересны с чисто математической точки зрения и имеют глубокий геометрический смысл. Будем рассматривать далее функционал Янга — Миллса $S=\int\limits_{\mathbb{R}^4}\operatorname{Sp}\left(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)d^4x$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ с евклидовыми координатами x^1, x^2, x^3, x^4. При $|x|\to\infty$ мы будем требовать, чтобы

$$F_{ab}\to 0,\quad A_a(x)\approx\frac{\partial g(x)}{\partial x^\alpha}g^{-1}(x).\tag{14}$$

Фактически мы будем требовать, чтобы при вложении $\mathbb{R}^4$ в S^4 в качестве дополнения к верхнему полюсу в S^4 связность $A_a(x)$ гладко продолжалась в этот верхний полюс; расслоение со связностью в $\mathbb{R}^4$ является частью расслоения с базой S^4, рассмотренного на области $\mathbb{R}^4 \subset S^4$. Топологический инвариант расслоения с группой $G = SU(2)$ задается степенью отображения

$$g_\infty \colon S^3 \to SU(2) = G, \quad \deg g_\infty = m, \tag{15}$$

где при $|x| \to \infty$ и $x = |x| \cdot n$ имеем

$$A_a(x) \approx \frac{\partial g(x)}{\partial x^a} g^{-1}(x), \quad g(x) \to g_\infty(n).$$

Другая запись этого числа в виде «характеристического класса» обсуждалась также в § 25:

$$m\{F\} = \mathrm{Sp} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{8\pi^2} F_{ab} F_{cd} \varepsilon^{abcd} d^4x = \mathrm{Sp} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{4\pi^2} F_{ab} (*F)^{ab} d^4x, \tag{16}$$

или

$$m\{F\} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{Sp}(F \wedge *F) \tag{17}$$

на языке форм $\left(*F\right.$ — это «дуальная» форма к $F = F_{ab} dx^a \wedge \wedge dx^b$, $\left.*F = \frac{1}{2} \varepsilon^{abcd} F_{ab} dx^c \wedge dx^d\right)$. В евклидовой метрике величина

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{Sp}\,[F_{ab} - (*F)_{ab}] \left[F^{ab} - (*F)^{ab}\right] d^4x \tag{18}$$

является неотрицательной, $T \geqslant 0$.

Пусть выполнено уравнение

$$F_{ab} = (*F)_{ab}; \tag{19}$$

это равенство равносильно равенству $T = 0$. Далее,

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{Sp}\left(F_{ab} F^{ab}\right) d^4x + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Sp}\,(*F_{ab})\left(*F^{ab}\right) d^4x - \\ - \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{Sp}\left(F_{ab} * F^{ab}\right) d^4x = S\{F\} - 4\pi^2 m\{F\} \geqslant 0.$$

Так как $m\{F\}$ — характеристический класс, получаем:

1) уравнения $\delta T = 0$ и $\delta S = 0$ эквивалентны;

2) более того, так как $T \geqslant 0$, то выполнение уравнения $F_{ab} = *F_{ab}$ для поля Янга — Миллса равносильно тому, что мы имеем абсолютный минимум функционала $S\{F\}$ при заданном числе $m\{F\} = m$ и этот минимум равен m.

Итак, если мы найдем для каждого числа m хотя бы одно решение уравнения $F_{ab} = *F_{ab}$, то тем самым мы строго докажем, что минимумы функционала $S\{F\} = \mathrm{Sp}\int\limits_{\mathbb{R}^4} F_{ab}F^{ab}d^4x$ при указанных граничных условиях описываются уравнением (19).

Задача. Докажите, что решения уравнения (19) удовлетворяют также уравнениям Янга — Миллса.

Для $m = 0$ имеем «тривиальное» решение $F_{ab} = 0$.

Для $m = 1$ будем искать «сферически симметричные» решения в виде $(G = SU(2))$

$$\pm A_a^i = \frac{1}{2}\left(\widetilde{A}_a^{0i} \pm \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\widetilde{A}_a^{kl}\right), \quad \widetilde{A}_a^{ij} \in SO(4). \tag{20}$$

Ответ мы окончательно получим такой («инстантон»):

$$\widetilde{A}_a^{ij} = f(r)\left(x^i\delta_a^j - x^j\delta_a^i\right), \quad r = |x|,$$
$$f(r) = \frac{1}{r^2+\lambda^2}. \tag{21}$$

Для любого $m > 1$ известны решения вида

$$A_\mu = -\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i^2}{(x-x_i)^2}(\partial_\mu\omega_i)\,\omega_i^{-1}, \tag{22}$$

где $\rho = \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i^2}{(x-x_i)^2}$, $\omega_i = \frac{(x-x_i)_0 + i(x-x_i)_a\sigma_a}{\left[(x-x_i)^2\right]^{1/2}}$, σ_a — матрицы Паули (см. § 14 части I). Общее решение (зависящее от $8m-3$ параметров) пока в хорошем виде не получено, хотя здесь имеется ряд глубоких результатов. Заметим, что лагранжиан Янга — Миллса (точно так же, как и для обычных уравнений Максвелла; см. § 42 части I) конформно инвариантен. Поэтому можно перейти от $\mathbb{R}^4$ к сфере S^4, на которой метрика является конформно евклидовой (группа конформных преобразований сферы S^4 изоморфна $O(5, 1)$; см. § 15 части I).

Имеется естественное расслоение

$$p\colon \mathbb{C}P^3 \to S^4$$

со слоем S^2 (см. § 24). Напомним его построение. Группа $SU(2)$ действует на $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$ обычным образом на каждом слагаемом $\mathbb{C}^2$:

$$(z^1, z^2, w^1, w^2) \xrightarrow{g} (g(z^1, z^2), \quad g(w^1, w^2)), \quad g \in SU(2).$$

По определению

$$\mathbb{C}P^3 = (\mathbb{C}^4\setminus\{0\})/(SO(2)\times R^+),$$
$$S^4 = (\mathbb{C}^4\setminus\{0\})/(SU(2)\times R^+).$$

Поскольку $SO(2) \subset SU(2)$, возникает расслоение $p: \mathbb{C}P^3 \to S^4$. Слои $p^{-1}(x) = \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^3$ лежат в $\mathbb{C}P^3$ как проективные прямые. Решением «уравнений дуальности» (19) является связность в некотором расслоении η над S^4 со слоем $\mathbb{C}^2$ и структурной группой $G = SU(2)$. Рассмотрим расслоение $p^*(\eta)$ над $\mathbb{C}P^3$ с поднятой связностью (тривиальной над слоями $p^{-1}(x)$). Во всяком комплексном (не обязательно голоморфном) расслоении со связностью над комплексным многообразием (здесь над $\mathbb{C}P^3$) имеется «квазикомплексная» структура. Это означает, что в пространстве E расслоения $p^*(\eta)$ связность естественным образом порождает «горизонтальные» направления и тем самым операторы «ковариантной» производной, действующие в функциях на E. Пусть U — область в базе $U \subset \mathbb{C}P^3$ с комплексными координатами z^1, z^2, z^3, $z^\alpha = x^\alpha + ix^{\alpha+3}$, и операторами дифференцирования $\frac{\partial}{\partial z^1}, \frac{\partial}{\partial z^2}, \frac{\partial}{\partial z^3}$.

Локально имеем $p^{-1}(U) \subset E, p^{-1}(U) = \mathbb{C}^2 \times U$. Координаты в $\mathbb{C}^2$ обозначим через w^1, w^2. Имеем набор операторов, задающих «квазикомплексную структуру»,

$$\frac{\partial}{\partial w^1}, \quad \frac{\partial}{\partial w^2}, \quad \frac{D}{Dz^1}, \quad \frac{D}{Dz^2}, \quad \frac{D}{Dz^3}, \tag{23}$$

где $\frac{D}{Dz^\alpha} = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + A_\alpha^{\mathbb{C}} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - i\frac{\partial}{\partial x^{\alpha+3}} + A_\alpha - iA_{\alpha+3}$. Условие интегрируемости означает, что все операторы (23) коммутируют. В этом случае в пространстве расслоения E возникает структура комплексного многообразия с локальными комплексными координатами z, w. Само расслоение $p: E \to \mathbb{C}P^3$ окажется тогда голоморфным (т. е. отображение p голоморфно).

Задача. Покажите, что уравнение дуальности для расслоения η над S^4 эквивалентно коммутированию операторов (23) в E над $\mathbb{C}P^3$.

Таким образом, задача нахождения решений уравнения дуальности сводится к теории голоморфных расслоений над $\mathbb{C}P^3$, где с успехом применяются методы алгебраической геометрии.

3. Киральные поля. Интеграл Дирихле. К числу нелинейных полей, интересных физически и таких, в которых возникают топологические явления, относятся так называемые *киральные* поля. Наиболее общим (локально) киральным полем является функция $\psi(x)$ на пространстве $\mathbb{R}^k$ со значениями в некотором нелинейном многообразии M. Глобально такое поле может быть сечением некоторого расслоения со слоем M.

Фактически, интересные киральные поля являются в ситуации, когда M — однородное пространство группы Ли,

$$M = G/H.$$

Главными киральными полями называются такие, у которых $M=G$ (группа Ли). Будем считать эту группу компактной и фиксируем на ней двусторонне инвариантную метрику. Другой важный тип киральных полей — это случай, когда $M=G/H$ является симметрическим пространством компактной группы G со стационарной подгруппой $H\subset G$ (см. § 6). Простейший пример такого рода:

$$M=S^q=SO(q+1)/SO(q).$$

Будем представлять сферу как множество единичных векторов $n\in\mathbb{R}^{q+1}$. В этом случае имеем, как говорят, «n-поле» $n(x)$.

Киральным полям отвечают лагранжианы, имеющие в важнейших случаях следующий вид:

а) Случай главного кирального поля $g(x)\in G$. Положим $A_a(x)=\frac{\partial g(x)}{\partial x^a}g^{-1}(x)$ (это — элемент алгебры Ли),

$$S=\int\limits_{\mathbb{R}^k}\frac{1}{2}\langle A_a(x),\ A_a(x)\rangle\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3\wedge\ldots\wedge dx^k. \qquad (24)$$

Для $G=SO(2)$ поле A_a имеет вид градиента скалярной функции $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} g(x)&=\exp\{i\varphi(x)\},\\ A_a(x)&=i\frac{\partial\varphi}{\partial x^a}. \end{aligned} \qquad (25)$$

Уравнение $\delta S=0$ сводится к уравнению Лапласа.

Для $G=SU(2)$ это уравнение не столь тривиально. Пусть $A_a(x)=X_iA_a^i(x)$, где A_a^i — скалярные функции и $X_1,\ X_2,\ X_3$ — базис алгебры Ли, в котором $[X_1,\ X_2]=X_3$, $[X_2,\ X_3]=X_1$, $[X_3,\ X_1]=X_2$. Можно считать, что поля $A_a(x)$ составляют связность нулевой кривизны:

$$F_{ab}=\frac{\partial A_a}{\partial x^b}-\frac{\partial A_b}{\partial x^a}+[A_a,\ A_b]=0. \qquad (26)$$

Уравнения $\delta S=0$ сведутся, кроме (26), к такому соотношению:

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^a}=0 \qquad (27)$$

(докажите это). На компактной некоммутативной группе G любой размерности имеется стандартная двусторонне инвариантная 3-форма Ω, определявшаяся в точке $g=1$ на алгебре Ли с помощью коммутатора $[\ ,\ ]$ и формы Киллинга $\langle\ ,\ \rangle$:

$$\Omega(X,\ Y,\ Z)=\langle[X,\ Y],\ Z\rangle \qquad (28)$$

(смешанное произведение). Здесь $X,\ Y,\ Z$ — элементы алгебры

Ли, рассматриваемой как касательное пространство к группе G в точке $g=1$ (см. § 3). Форма Ω замкнута (это легко проверить непосредственно; впрочем, это вытекает из ее двусторонней инвариантности) и никогда не эквивалентна нулю в когомологиях, т. е. $\Omega \neq d\Omega'$. Для случая $G=SU(2)$ форма Ω есть элемент объема на $SU(2)=S^3$, где $\int_{S^3} \Omega = 1$.

Для главного кирального поля $g(x)$ на $\mathbb{R}^3$, у которого $g(x) \to g_0$ при $g \to \infty$, имеем топологический инвариант

$$[g] \in \pi_3(G).$$

(Для $G=SU(2)$ этот инвариант совпадает со степенью отображения $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = S^3 \xrightarrow{g} S^3$ и вычисляется по формуле $[g] = \int_{\mathbb{R}^3} g^* (\Omega)$.)

Напомним, что функционал Дирихле имеет вид

$$S\{g\} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \langle A, A\rangle \, d^3x, \tag{29}$$

где

$$A_a(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x^a} g^{-1}(x),$$

и уравнение $\delta S = 0$ таково:

$$\frac{\partial}{\partial x^a}\left(\frac{\partial g}{\partial x^a} g^{-1}(x)\right) = 0 \tag{30}$$

или

$$\frac{\partial A_a}{\partial x^a} = 0, \quad \frac{\partial A_a}{\partial x^b} - \frac{\partial A_b}{\partial x^a} + [A_a, A_b] = 0.$$

Для функционала Дирихле (29) нет, однако, никаких «топологических» оценок на абсолютный минимум при заданном $[g]$, аналогичных случаю $\mathbb{R}^2$ (см. ниже). Рассмотрим «подправленный» киральный лагранжиан («модель Скирма»)

$$S_\delta\{g(x)\} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \langle A, A\rangle + \delta^2 \langle [A, A], [A, A]\rangle, \tag{31}$$

где $[A, A]_{ab} = [A_a, A_b]$ — форма степени 2 (кососимметрический тензор) со значением в алгебре Ли. Как найти минимум при заданном топологическом инварианте $d = \deg[g(x)\colon (\mathbb{R}^3 \cup \infty) \to G]$ для случая $G=SU(2)$ и функционала S_δ? Рассмотрим новый функционал

$$S_\delta + T = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \langle A_a + \delta\varepsilon^{abc} [A_a, A_c], A_a + \delta\varepsilon^{abc} [A_b, A_c]\rangle \, d^3x$$

или

$$S_\delta + \int\limits_{\mathbb{R}^3} 2\delta \langle A_a, \varepsilon^{abc} [A_b, A_c]\rangle \, d^3x = S_\delta + \mathrm{const}\, d \geqslant 0. \qquad (32)$$

Для минимума мы должны иметь (если этот минимум достигается при нулевом значении (32)):

$$A_a + \alpha\varepsilon^{abc}[A_b, A_c] = 0.$$

Получаем систему уравнений на функцию $g(x)$:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\alpha[A_2, A_3], \\ A_2 &= +\alpha[A_1, A_3], \\ A_3 &= -\alpha[A_1, A_2], \end{aligned} \qquad (33)$$

где

$$A_a = \frac{\partial g(x)}{\partial x^a} g^{-1}(x),$$

$$\frac{\partial A_a}{\partial x^b} - \frac{\partial A_b}{\partial x^a} = -[A_a, A_b].$$

Отсюда следует, что $A_a(x) \equiv 0$, так как $A = \delta \operatorname{rot} A$.

Вывод. Для подправленного кирального лагранжиана минимум (если он достигается при заданном d) больше, чем он был бы, исходя из «тривиальной» оценки (32). При отыскании минимумов нельзя заменять оценку на точное равенство в отличие от поля Янга — Миллса в $\mathbb{R}^4$ и n-поля в $\mathbb{R}^3$ (см. ниже). Подправленный киральный лагранжиан (31) не является конформно инвариантным, а поэтому его рассмотрения для S^3 и $\mathbb{R}^3$ дают различные результаты. Для S^3, например, тождественное отображение $S^3 \to S^3$ дает минимум, удовлетворяющий равенству (33). Проверьте это.

б) В случае n-поля $n(x) \in S^q \subset \mathbb{R}^{q+1}$ имеем простейший лагранжиан («интеграл Дирихле»)

$$S\{n(x)\} = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \left\langle \frac{\partial n^\alpha}{\partial x^a}, \frac{\partial n^\alpha}{\partial x^a} \right\rangle d^k x. \qquad (34)$$

Для случая $k = q$, вводя граничные условия $n(x) \to n_0$ при $|x| \to \infty$, мы получим топологический инвариант поля — степень отображения $S^q \to S^q$:

$$d = \deg n = \int\limits_{\mathbb{R}^q} n^*(\Omega)$$

(см. § 13), где $\int\limits_{S^q} \Omega = 1$ — элемент объема на S^q.

Рассмотрим случай $q=k=2$ и решим задачу на нахождение абсолютных минимумов действия S при заданной степени d. Если $u^\alpha(\alpha=1, 2)$ — локальные координаты на сфере S^2 и $x^a(a=1, 2)$ — координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$, то

$$S\{n(x)\}=\int\limits_{\mathbb{R}^2} g^{ab}\tilde{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^a}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^b}dx^1\wedge dx^2, \tag{35}$$

где $g^{ab}=\delta^{ab}$ — метрика на $\mathbb{R}^2$ и $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ — метрика сферы S^2 в координатах u^1, u^2, а отображение $n(x)$ задается формулой

$$n(x)=\{u^\alpha(x^1, x^2),\ \ \alpha=1, 2\}.$$

Замечание. Формула (35) определяет «интеграл Дирихле» $S\{n\}$ для любого отображения $n\colon M\to N$, где (x^a) — локальные координаты M, g_{ab} — метрика в M, (u^α) — локальные координаты в N, $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ — метрика в N.

Задача. Если $N=G$ — группа Ли с двусторонне инвариантной метрикой, то интеграл Дирихле приобретает вид (29) для действия главного кирального поля.

Вернемся к случаю $M=\mathbb{R}^2$, $N=S^2$, где x^1, x^2 — евклидовы координаты в $\mathbb{R}^2$. Пусть u^1, u^2 — конформно евклидовы координаты в $S^2\backslash\infty$, в которых метрика имеет вид (см. § 13, часть I)

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta=\frac{4(du^1)^2+4(du^2)^2}{(1+(u^1)^2+(u^2)^2)^2}=\frac{4dzd\bar{z}}{(1+|z|^2)^2},$$

где $z=u^1+iu^2$, $w=x^1+ix^2$. Отсюда

$$S\{n\}=2i\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|^2+\left|\frac{\partial z}{\partial \bar{w}}\right|^2}{(1+|z|^2)^2}dwd\bar{w}. \tag{36}$$

Степень отображения $n\colon S^2\to S^2$ вычисляется по формуле

$$\deg n=\int\limits_{\mathbb{R}^2} n^*(\Omega)=\frac{i}{2\pi}\int n^*\left(\frac{dz\wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{u_xv_y-u_yv_x}{(1+|z|^2)^2}dx\,dy, \tag{37}$$

где $u=u^1$, $v=u^2$, $x=x^1$, $y=x^2$. Разность

$$S\{n\}-2\pi\deg n$$

имеет вид

$$S-2\pi\deg n=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{(u_x-v_y)^2+(u_y+v_x)^2}{(1+|z|^2)^2}dx\,dy\geqslant 0. \tag{38}$$

Отсюда имеем вывод:

1) Для отображений $n(x)$ степени d имеется неравенство

$$S-2\pi \deg n = S-2\pi d \geqslant 0.$$

2) Для абсолютных минимумов функционала S в гомотопическом классе $d\geqslant 0$ это неравенство является равенством $S_{\min} = 2\pi d$, которое равносильно равенствам

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \tag{39}$$

(т. е. уравнениям Коши — Римана). Наоборот, если (39) верно и $\deg n = d$, то имеем минимумы функционала S в этом гомотопическом классе. Итак, минимумы функционала S — это голоморфные отображения n: $S^2 \to S^2$ и только они: $z=P(w)/Q(w)$, где P, Q — многочлены. Этот важный результат, полученный сначала в геометрии, а затем в физике, применялся в теории ферромагнетизма.

Разберем тот же самый пример с другой точки зрения. Сфера S^2 есть однородное пространство

$$S^2 = SO(3)/SO(2) = SU(2)/U(1) = G/H,$$

и, более того, симметрическое пространство (см. § 6). Точно это означает, что алгебра Ли группы G разлагается в сумму $L = L_0 + L_1$, причем $[L_0, L_0] = L_0$, $[L_0, L_1] \subset L_1$ и $[L_1, L_1] \subset L_0$; здесь L_0 — алгебра Ли стационарной подгруппы $H \subset G$. Подпространства L_0 и L_1 ортогональны относительно формы Киллинга. Другое изложение теории n-поля таково: рассмотрим поле $g(x) \subset G$ и будем считать эквивалентными поля $g(x)$ и $e^{i\varphi(x)}g(x)$ для любой функции $e^{i\varphi(x)} \in H$. Переход $g(x) \to e^{i\varphi(x)}g(x)$ является «калибровочным» преобразованием. Фактически классы эквивалентности — это поля $n(x) \in G/H$. Рассмотрим «киральный лагранжиан»

$$S\{g(x)\} = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle A, A\rangle_{L_1} d^n x, \tag{40}$$

где $A_a(x) = \dfrac{\partial g(x)}{\partial x^a} g^{-1}(x)$, $\langle A, A\rangle_{L_1}$ означает скалярное произведение, совпадающее на подпространстве L_1 алгебры Ли L с формой Киллинга и нулевое на L_0. При калибровочном преобразовании

$$g(x) \to e^{i\varphi(x)}g(x) = \tilde{g}(x)$$

имеем

$$\tilde{A} = e^{i\varphi(x)}Ae^{-i\varphi(x)} + i\nabla\varphi, \tag{41}$$

где компонента $i\nabla\varphi$ лежит в L_0. Следовательно,

$$S\{g(x)\} = S\{\tilde{g}(x)\}$$

и лагранжиан (40) корректно определен на классах эквивалентности G/H. В нашем случае $G=SO(3)$, $H=SO(2)$, и поле A_a

трехкомпонентно, $A_a = A_a^0 e_0 + A_a^1 e_1 + A_a^2 e_2$, где

$$
\begin{gathered}
[e_0, e_1] = e_1, \qquad [e_1, e_2] = e_0, \quad [e_2, e_0] = e_1, \\
\langle e_0, e_0\rangle_{L_1} = 0, \quad \langle e_1, e_1\rangle_{L_1} = 1, \quad \langle e_2, e_2\rangle_{L_1} = 1, \\
\langle e_i, e_j\rangle_{L_1} = 0, \qquad i \neq j.
\end{gathered} \tag{42}
$$

Вектор e_0 порождает L_0, векторы e_1, e_2 порождают L_1. Уравнения $F_{ab} = 0$ имеют вид

$$\frac{\partial A_a^\beta}{\partial x^b} - \frac{\partial A_b^\beta}{\partial x^a} + [A_a, A_b]^\beta = 0, \tag{43}$$

где $\alpha = 1, 2$, $\beta = 0, 1, 2$. Положим

$$
\begin{aligned}
B_a &= A_a^1 + iA_a^2, & B_a^* &= A_a^1 - iA_a^2, \\
A_a^0 &= if_a, & f_{ab} &= \frac{\partial A_a^0}{\partial x^b} - \frac{\partial A_b^0}{\partial x^a}.
\end{aligned} \tag{44}
$$

Из соотношений (43) при $\beta = 0$ имеем

$$f_{ab} = \mathrm{const} \cdot (B_1 B_2^* - B_2 B_1^*) \tag{45}$$

(напомним, что мы работаем в двумерном пространстве, $a = 1, 2$). Из (43) при $\beta = 1, 2$ получаем

$$\frac{\partial B_1}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^1} = B_2 f_1 - B_1 f_2. \tag{46}$$

Введем «ковариантные» производные

$$D_a = \frac{\partial}{\partial x^a} - f_a.$$

Очевидно, что

$$D_1 B_2 - D_2 B_1 = 0, \tag{47}$$

и, варьируя функционал (34), получаем

$$\frac{\partial B_a}{\partial x^a} = 2 f_a B_a. \tag{48}$$

Поле $if_a = A_a^0$ является калибровочным, так как согласно (41) имеется градиентное преобразование

$$
\begin{gathered}
f_a \to f_a + \frac{\partial \varphi}{\partial x^a}, \\
B_a \to e^{i\varphi} B_a.
\end{gathered}
$$

Итак, мы свели теорию n-поля к уравнениям комплексного векторного поля (B_a), взаимодействующего с калибровочным полем f_a, где на тензор напряженности f_{ab} наложена дополнительная связь:

$$f_{ab}=\frac{\partial f^a}{\partial x^b}-\frac{\partial f_b}{\partial x^a}=\mathrm{const}\cdot\left(B_1B_2^*-B_2B_1^*\right). \tag{49}$$

Топологический инвариант n-поля определяется в этих переменных интегралом от напряженности

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}f_{12}dx^1\wedge dx^2=\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma\cup\Gamma_\infty}(f_1dx^1+f_2dx^2)=$$

$$=\mathrm{const}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left(B_1B_2^*-B_2B_1^*\right)dx^1\wedge dx^2;$$

здесь контур Γ_∞ есть окружность большого радиуса $R\to\infty$, а $\Gamma=\bigcup\limits_i\Gamma_i$, где Γ_i — мелкие контуры размера $\varepsilon\to 0$, охватывающие особые точки x_i и имеющие правильную ориентацию. Допущение особенностей в конечных точках необходимо для соответствия с теорией n-поля $n(x)$: точки $x_i=n^{-1}(\infty)$ будут выглядеть как особые в нашей записи. В этих точках поля (B_a,f_a) могут быть не определены, так как отображение n: $S^2\to S^2$ не накрывается глобально отображением g: $S^2\to SO(3)$ (или $SU(2)$) — в одной точке $\infty\in S^2$ сечение расслоения $S^3\to S^2$ становится многозначным и вместе с ним становятся многозначными функции $g(x)$ для $x\in n^{-1}(\infty)$.

Если z — комплексная координата на $S^2\backslash\infty$, то $SO(3)$-инвариантная 2-форма имеет вид (см. § 13 части I)

$$\Omega=\frac{dz\wedge d\bar z}{(1+|z|^2)^2}. \tag{50}$$

Форма $n^*(\Omega)$ имеет вид

$$n^*(\bar\Omega)=\mathrm{const}\,(B_1\overline{B_2}-B_2\overline{B}_1)\,dx^1\wedge dx^2=\omega\wedge\bar\omega, \tag{51}$$
$$\omega=B_1dx^1+B_2dx^2.$$

Если $w=x^1+ix^2$ — комплексная координата в $\mathbb{R}^2$ и отображение $n=z(w)$ голоморфно, то

$$n^*(\Omega)=\left|\frac{dz}{dw}\right|^2\frac{dw\wedge d\bar w}{(1+|z(w)|^2)^2}=\omega\wedge\bar\omega. \tag{52}$$

Можно проверить, что форма $\omega=B_adx^a$ имеет вид

$$\omega=\frac{dz}{dw}\frac{dw}{1+|z|^2}=B_adx^a,\quad w=x^1+ix^2.$$

Действительно, голоморфные n-поля $z(w)$ дают абсолютные минимумы функционала

$$S=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\langle A,A\rangle_{L_1}d^2x=\int\limits_{\mathbb{R}^2}B_a\overline{B}_a dw\wedge d\bar w=\int\limits_{\mathbb{R}^2}(B_1\overline{B}_1+B_2\overline{B}_2)\,dw\wedge d\bar w \tag{53}$$

при условии

$$\int_{\mathbb{R}^2} n^*(\Omega) = \lambda \int_{\mathbb{R}^2} (B_1\overline{B}_2 - B_2\overline{B}_1)\, dw \wedge d\overline{w} = d.$$

Рассмотрим величины

$$S + \frac{i}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^2} n^*(\Omega) = \int_{\mathbb{R}^2} (B_1\overline{B}_1 + B_2\overline{B}_2 + i(B_1\overline{B}_2 - B_2\overline{B}_1))\, dw \wedge d\overline{w} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} (B_1 + iB_2)(\overline{B}_1 - i\overline{B}_2)\, dw \wedge d\overline{w} \geqslant 0. \tag{54}$$

Для минимумов имеем $S + \frac{i}{\lambda}\int n^*\Omega = 0$ или

$$B_1 + iB_2 = 0. \tag{55}$$

Отсюда следует, что

$$B_a dx^a = (B_1 - iB_2)\frac{dz}{2} = B_1 dz. \tag{56}$$

Легко проверить равенство

$$B_1 = \frac{\mathrm{const}}{1 + |z|^2}\frac{dz}{dw}. \tag{57}$$

Форма $f_1dx^1 + f_2dx^2$ является связностью в расслоении $n^*(\eta)$, где η — стандартное хопфовское расслоение $S^3 \to S^2$ с группой $G = S^1$.

Рассмотрим теперь уравнение $\delta S = 0$ для всех экстремумов действия S вида (35). Извлечение из современной литературы: эта задача сводится к теории уравнения «sin — gordon», уже возникавшего (см. § 30 части I) как уравнение вложения поверхности постоянной отрицательной кривизны в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Пусть метрика плоскости $\mathbb{R}^2$ является метрикой Минковского $\mathbb{R}^2_1$. В переменных ξ, η, где $ds^2 = d\xi d\eta$, функционал S имеет вид

$$S\{n\} = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{\alpha=1}^{3} n_\xi^\alpha n_\eta^\alpha\right) d\xi\, d\eta \tag{58}$$

при условии $n^2 = 1$. Выведем уравнение Эйлера — Лагранжа. Пусть μ — произвольная неизвестная пока функция (множитель Лагранжа). Рассмотрим функционал

$$S_\mu\{n\} = \int_{\mathbb{R}^2} (\langle n_\xi, n_\eta\rangle - \mu\langle n, n\rangle)\, d\eta\, d\xi = \int \Lambda_\mu(n, n_\xi, n_\eta)\, d\eta\, d\xi. \tag{59}$$

Уравнение $\delta S = 0$ имеет вид (см. § 37 части I)

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Lambda_\mu}{\partial n_\xi^\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\Lambda_\mu}{\partial n_\eta^\alpha}\right) = \frac{\partial\Lambda}{\partial n^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{60}$$

при условии $\langle n, n\rangle = 1$. Отсюда

$$n^{\alpha}_{\xi\eta} = \mu n^{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{61}$$

или ввиду $\langle n, n\rangle = 1$

$$n_{\xi\eta} = \langle n_{\xi\eta}, n\rangle n, \quad \mu = \langle n, n_{\xi\eta}\rangle. \tag{62}$$

Покажем, что величины $|n_\xi|$, $|n_\eta|$ являются «интегралами», т. е.

$$\frac{\partial |n_\xi|}{\partial\eta} = 0, \quad \frac{\partial |n_\eta|}{\partial\xi} = 0. \tag{63}$$

Действительно,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\langle n_\xi, n_\xi\rangle}{\partial\eta} = \langle n_{\xi\eta}, n_\xi\rangle = \langle n_{\xi\eta}, n\rangle\langle n_\xi, n\rangle = 0$$

в силу (62), так как n_ξ ортогонально n. Таким образом, $|n_\xi| = f(\xi)$, $|n_\eta| = g(\eta)$. Произведя подстановку

$$\cos\omega = \frac{\langle n_\xi, n_\eta\rangle}{f(\xi)\,g(\eta)}, \tag{64}$$

для величины ω получим из (62) уравнение

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\,\partial\eta} = fg\sin\omega. \tag{65}$$

Локальной заменой $\xi \to \xi'(\xi)$, $\eta \to \eta'(\eta)$ сведем уравнение (65) к виду «sin — gordon»

$$\varphi_{\xi\eta} = \sin\varphi. \tag{66}$$

Исследование этого уравнения значительно труднее, чем приведенное выше исследование минимумов S при заданной степени.

§ 33. Минимальность комплексных подмногообразий

Напомним, что комплексное многообразие M называется кэлеровым, если его метрика $g_{ij}dz^i d\bar{z}^j$ определяет замкнутую форму $\omega = \frac{i}{2} g_{ij}dz^i \wedge d\bar{z}^j$.

Теорема 1. *Пусть M — кэлерово многообразие комплексной размерности n, $X \subset M$ — его комплексное k-мерное подмногообразие. Рассмотрим следующий класс вещественных вариаций Y подмногообразия X в M. Вариация Y — вещественное $2k$-мерное подмногообразие в M, совпадающее с X вне компактной области (на X). При этом требуется, чтобы была задана «деформация» в виде вещественного ориентированного $(2k+1)$-мерного многообразия z с краем $\partial Z = X \cup (-Y)$, где $(-Y)$ есть Y с противоположной ориентацией* (рис. 167).

Тогда объем $v(X)$ многообразия X не более объема $v(Y)$ (если X и Y не компактны, то имеются в виду объемы тех областей, где X и Y различны). Если объем Y совпадает с объемом X, то Y тоже комплексно.