при условии $\langle n, n\rangle = 1$. Отсюда

$$n^{\alpha}_{\xi\eta} = \mu n^{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{61}$$

или ввиду $\langle n, n\rangle = 1$

$$n_{\xi\eta} = \langle n_{\xi\eta}, n\rangle n, \quad \mu = \langle n, n_{\xi\eta}\rangle. \tag{62}$$

Покажем, что величины $|n_\xi|$, $|n_\eta|$ являются «интегралами», т. е.

$$\frac{\partial |n_\xi|}{\partial\eta} = 0, \quad \frac{\partial |n_\eta|}{\partial\xi} = 0. \tag{63}$$

Действительно,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \langle n_\xi, n_\xi\rangle}{\partial\eta} = \langle n_{\xi\eta}, n_\xi\rangle = \langle n_{\xi\eta}, n\rangle\langle n_\xi, n\rangle = 0$$

в силу (62), так как n_ξ ортогонально n. Таким образом, $|n_\xi| = f(\xi)$, $|n_\eta| = g(\eta)$. Произведя подстановку

$$\cos\omega = \frac{\langle n_\xi, n_\eta\rangle}{f(\xi)\, g(\eta)}, \tag{64}$$

для величины ω получим из (62) уравнение

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\,\partial\eta} = fg\sin\omega. \tag{65}$$

Локальной заменой $\xi \to \xi'(\xi)$, $\eta \to \eta'(\eta)$ сведем уравнение (65) к виду «sin — gordon»

$$\varphi_{\xi\eta} = \sin\varphi. \tag{66}$$

Исследование этого уравнения значительно труднее, чем приведенное выше исследование минимумов S при заданной степени.

§ 33. Минимальность комплексных подмногообразий

Напомним, что комплексное многообразие M называется кэлеровым, если его метрика $g_{ij}dz^i d\bar{z}^j$ определяет замкнутую форму $\omega = \frac{i}{2} g_{ij}dz^i \wedge d\bar{z}^j$.

Теорема 1. *Пусть M — кэлерово многообразие комплексной размерности n, $X \subset M$ — его комплексное k-мерное подмногообразие. Рассмотрим следующий класс вещественных вариаций Y подмногообразия X в M. Вариация Y — вещественное $2k$-мерное подмногообразие в M, совпадающее с X вне компактной области (на X). При этом требуется, чтобы была задана «деформация» в виде вещественного ориентированного $(2k+1)$-мерного многообразия z с краем $\partial Z = X \cup (-Y)$, где $(-Y)$ есть Y с противоположной ориентацией* (рис. 167).

Тогда объем $v(X)$ многообразия X не более объема $v(Y)$ (если X и Y не компактны, то имеются в виду объемы тех областей, где X и Y различны). Если объем Y совпадает с объемом X, то Y тоже комплексно.

Таким образом, в кэлеровых многообразиях компактные комплексные подмногообразия являются глобально минимальными подмногообразиями (т. е. экстремалями многомерной вариационной задачи на минимум объема). Так, например, в $\mathbb{C}P^n$ глобально

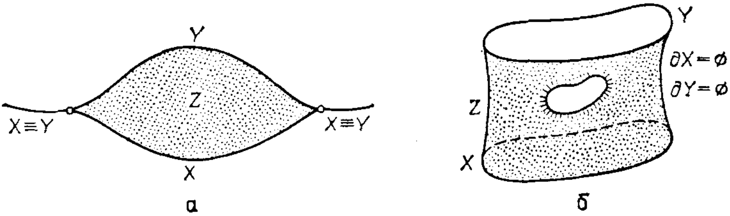

Рис. 167

минимальными подмногообразиями являются комплексные подмногообразия. Кэлеровым многообразием является также комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, а потому любое комплексное подмногообразие X в $\mathbb{C}^n$ минимально относительно возмущений, неподвижных вне некоторой ограниченной области в X. Напомним, что все комплексные подмногообразия в $\mathbb{C}^n$ некомпактны.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.

Лемма 1. *Для произвольной внешней 2-формы* ω *на* $\mathbb{R}^2$ *можно выбрать такой ортонормированный базис* $e_1, \ldots, e_{2n}$, *в котором форма* ω *имеет вид* $\lambda_1\omega_1 \wedge \omega_2 + \ldots + \lambda_n\omega_{2n+1} \wedge \omega_{2n}$, *где* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — *неотрицательные числа, а* $\omega_1, \ldots, \omega_{2n}$ — *базис, сопряженный базису* $e_1, \ldots, e_{2n}$ *в* $\mathbb{R}^{2n}$.

Доказательство. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{2n}$ произвольный ортонормированный базис $e_1', \ldots, e_{2n}'$. Для заданной 2-формы ω построим матрицу $A=(a_{ij})$, где $a_{ij}=\omega(e_i', e_j')$. Назовем матрицу A матрицей, ассоциированной с формой ω. Поскольку форма ω полностью определяется своими значениями на базисных векторах, то она полностью определяется своей матрицей A (с указанием соответствующего ортонормированного базиса $e_1', \ldots, e_{2n}'$). Ясно, что A — кососимметрическая матрица. Следовательно, для A существует такой ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_{2n}$, в котором матрица A принимает вид

$$A=\left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & 0 & \\ \hline & & & & \\ & & & & \\ \hline & 0 & & 0 & \lambda_n \\ & & & -\lambda_n & 0 \end{array}\right)$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — неотрицательные числа. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_{2n}$ — сопряженный базис к базису $e_1, \ldots, e_{2n}$. Тогда очевидно, что

$$\omega = \sum_{\alpha=1,3,\ldots,2n-1} \lambda_\alpha \omega_\alpha \wedge \omega_{\alpha+1}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ задана эрмитова метрика (g_{ij}). Пусть, далее ω — внешняя 2-форма, соответствующая метрике g_{ij}, т. е. определяемая формулой $\omega(v_1, v_2) = \langle iv_1, v_2\rangle$. Положим $\sigma_k = \frac{1}{k!}\omega^k = \frac{1}{k!}\underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{k}$. Тогда выполнено неравенство $|\sigma_k(v_1, \ldots, v_{2k})| \leqslant 1$, где $v_1, \ldots, v_{2k}$ — произвольная ортонормированная система векторов в $\mathbb{R}^{2n}$. Кроме того, равенство $|\sigma_k(v_1, \ldots, v_{2k})| = 1$ достигается тогда и только тогда, когда $v_1, \ldots, v_{2k}$ порождают комплексное подпространство в $\mathbb{R}^{2n}$ (т. е. когда вещественная линейная оболочка векторов $v_1, \ldots, v_{2k}$ инвариантна относительно умножения на i).*

Доказательство. 1. Случай $k = 1$. Пусть $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{2n}$ — ортогональные векторы длины 1. Ясно, что $|\omega(v_1, v_2)| = |\langle iv_1, v_2\rangle| \leqslant |iv_1| \cdot |v_2| = 1$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\pm v_2 = iv_1$, т. е. векторы v_1, v_2 порождают комплексное одномерное подпространство (вещественной размерности 2).

2. Общий случай. Пусть $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ — подпространство, порожденное $v_1, \ldots, v_{2k}$. Обозначим сужение $\omega|_V$ через $\tilde{\omega}$. Согласно лемме 1 можно выбрать ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_{2k}$ подпространства V и сопряженный ему базис $\omega_1, \ldots, \omega_{2k}$ такие, что $\tilde{\omega} = \lambda_1\omega_1 \wedge \omega_2 + \ldots + \lambda_k\omega_{2k-1} \wedge \omega_{2k}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — неотрицательные вещественные числа. Ясно, что $\tilde{\omega}(e_{2p-1}, e_{2p}) = \lambda_p$ $(1 \leqslant p \leqslant k)$. Отсюда согласно случаю $k = 1$ получаем, что $\lambda_p \leqslant 1$, причем $\lambda_p = 1$ тогда и только тогда, когда $ie_{2p-1} = \pm e_{2p}$. Обозначим ограничение формы $\sigma_k = \frac{1}{k!}\omega^k$ на подпространство V через $\tilde{\sigma}_k$. Тогда $|\tilde{\sigma}_k(e_1, \ldots, e_{2k})| = \left|\frac{1}{k!}\tilde{\omega}^k(e_1, \ldots, e_{2k})\right| = \lambda_1 \ldots \lambda_k \leqslant 1$; равенство достигается тогда и только тогда, когда $\lambda_p = 1$ $(1 \leqslant p \leqslant k)$, т. е. тогда и только тогда, когда $ie_{2p-1} = \pm e_{2p}$ $(1 \leqslant p \leqslant k)$. Последнее равенство в точности означает, что V — комплексное подпространство пространства $\mathbb{R}^{2n}$. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть φ — внешняя форма степени l на $\mathbb{R}^{2n}$, а V — линейное l-мерное подпространство пространства $\mathbb{R}^{2n}$; пусть $v_1, \ldots, v_l$ и $v'_1, \ldots, v'_l$ — произвольные ортонормированные базисы пространства V одного класса ориентации. Из закона преобразования l-мерной внешней формы в l-мерном пространстве (а именно: умножение на определитель линейного преобразования) сразу следует, что $\varphi(v_1, \ldots, v_l) = \varphi(v'_1, \ldots, v'_l)$.

Поэтому форму φ можно корректно определить как функцию на множестве классов ориентированных ортонормированных базисов одного и того же подпространства (при изменении подпространства будет меняться и функция φ). Другими словами, l-форма φ на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ определяет функцию (обозначаемую той же буквой φ) на многообразии Грассмана $\widehat{G}_{2n,l}$ ориентированных l-мерных подпространств в $\mathbb{R}^{2n}$ (см. § 5). Класс ориентированных ортонормированных базисов подпространства V, т. е. точку из $\widehat{G}_{2n,l}$, обозначим через $\widehat{V}$.

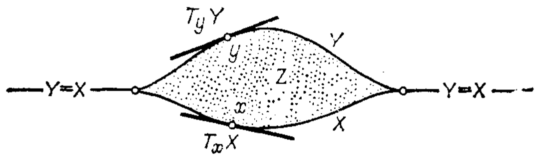

Рис. 168

Пусть теперь X — комплексное подмногообразие в M и пусть Y — допустимая вариация. Обозначим, как и прежде, через T_xX (соответственно T_yY) касательное пространство к подмногообразию X (соответственно Y) в точке x (соответственно y). Пусть Z — подмногообразие в M такое, что $\partial Z = X \cup (-Y)$ (рис. 168). Пусть $\omega = \frac{i}{2} g_{ij}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j$ — определенная выше замкнутая 2-форма на M, и пусть $\sigma_k = \frac{1}{k!}\omega^k$. Тогда очевидно и $d\sigma_k = 0$. По формуле Стокса

$$0 = \int_Z d\sigma_k = \int_{\partial Z} \sigma^k = \int_{X\cup(-Y)} \sigma_k = \int_X \sigma_k - \int_Y \sigma_k, \text{ т. е. } \int_X \sigma_k = \int_Y \sigma_k.$$

Обозначим $2k$-мерные внешние формы объема подмногообразий X и Y через dx и dy соответственно. Тогда

$$\int_X \sigma_k = \int_X \sigma_k(\widehat{T}_xX)\,dx; \quad \int_Y \sigma_k = \int_Y \sigma_k(\widehat{T}_yY)\,dy$$

Так как X — комплексное подмногообразие в M, т. е. T_xX — комплексное подпространство в $T_xM = \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, то согласно лемме 2 $\sigma_k(\widehat{T}_xX) \equiv 1$, $\sigma_k(\widehat{T}_yY) \leqslant 1$ (напомним, что Y — не обязательно комплексное подмногообразие). Отсюда

$$v(X) = \int_X dx = \int_X \sigma_k(\widehat{T}_xX)\,dx = \int_Y \sigma_k(\widehat{T}_yY)\,dy \leqslant \int_Y dy = v(Y).$$

Таким образом, первая часть утверждения теоремы доказана. Далее, очевидно, что равенство $v(X) = v(Y)$ достигается тогда и только тогда, когда на множестве полной $2k$-мерной меры выполнено тождество $\sigma_k(\hat{T}_yY)\equiv 1$. Согласно лемме 2 это последнее тождество равносильно тому, что T_yY — комплексное подпространство для $y\in Y$ (для почти всех точек $y\in Y$), т. е. Y — комплексное многообразие в M. Теорема доказана полностью.

Из доказательства теоремы видно, что предположение о неособости подмногообразия $X\subset M$ не является существенным ограничением. Доказательство (в терминах подмножеств полной меры) проходит и для алгебраических комплексных поверхностей $X\subset M$ (т. е. задаваемых системой полиномиальных уравнений на M) несмотря на то, что такие поверхности могут иметь особые точки (например, типа конусов над гладкими многообразиями). В этом случае условие бордантности X и Y следует заменить более общим соотношением: X гомологично Y в группе $H_{2k}(M, \partial X)$, т. е. X и Y определяют один и тот же элемент в группе $H_{2k}(M, \partial X)$.

В $\mathbb{C}P^n$ подмногообразие $\mathbb{C}P^k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ реализует образующую в группе $H_{2k}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ и является глобально минимальным в этом гомологическом классе. Можно доказать (это уже менее тривиальный факт), что если $Y\subset\mathbb{C}P^n$ — какое-нибудь $2k$-мерное подмногообразие, реализующее образующую $1\in\mathbb{Z}=$ $=H_{2k}(\mathbb{C}P^n;\ \mathbb{Z})$ и такое, что $v\ V)=v(\mathbb{C}P^k)$, то существует преобразование $\mathbb{C}P^n\to\mathbb{C}P^n$ из группы $SU(n+1)$, переводящее Y в $\mathbb{C}P^k$. Другими словами, подмногообразие $\mathbb{C}P^k\subset\mathbb{C}P^n$ является единственным (с точностью до изометрий) решением многомерной вариационной задачи (на абсолютный минимум) в классе гомологий $1\in\mathbb{Z}=H_{2k}(\mathbb{C}P^n;\ \mathbb{Z})$. Более того, оказывается, что если Y реализует элемент $m\in\mathbb{Z}=H_{2k}(\mathbb{C}P^n;\ \mathbb{Z})$, $m\neq\pm 1$, то $v(Y)>v(\mathbb{C}P^k)$. Мы не будем здесь доказывать все эти утверждения.