

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                       |    |
|-----------------------|----|
| Предисловие . . . . . | 10 |
|-----------------------|----|

### ЧАСТЬ I

### ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ПОЛЕЙ

|  |    |
|--|----|
| Глава 1. Геометрия в области пространства. Основные понятия . . .  | 17 |
| § 1. Системы координат . . . . .   | 17 |
| 1. Декартовы координаты в пространстве (17). 2. Замена координат (19).   |    |
| § 2. Евклидово пространство . . . . .  | 23 |
| 1. Кривая в евклидовом пространстве (24). 2. Квадратичные формы и векторы (29).  |    |
| § 3. Римановы и псевдоримановы пространства . . . . .  | 32 |
| 1. Риманова метрика (32). 2. Метрика Минковского (35).   |    |
| § 4. Простейшие группы преобразований евклидова пространства . . . . .   | 37 |
| 1. Группы преобразований области (37). 2. Преобразования плоскости (38). 3. Движения трехмерного евклидова пространства (44). 4. Другие примеры групп преобразований (47). |    |
| § 5. Формулы Френе . . . . .   | 50 |
| 1. Кривизна плоских кривых (50). 2. Пространственные кривые. Кривизна и кручение (55). 3. Ортогональные преобразования, зависящие от параметра (58).                       |    |
| § 6. Псевдоевклидовы пространства . . . . .  | 61 |
| 1. Простейшие понятия специальной теории относительно (61). 2. Преобразования Лоренца (63).  |    |
| Глава 2. Теория поверхностей . . . . .   | 70 |
| § 7. Геометрия на поверхности в пространстве . . . . .   | 70 |
| 1. Координаты на поверхности (70). 2. Касательная плоскость (73). 3. Метрика на поверхности (74). 4. Площадь поверхности (78).   |    |
| § 8. Вторая квадратичная форма . . . . .   | 82 |
| 1. Кривизна кривых на поверхности в евклидовом пространстве (82). 2. Инварианты пары квадратичных форм (84). 3. Свойства второй квадратичной формы (86).                   |    |
| § 9. Метрика сферы . . . . .   | 91 |
| § 10. Пространственноподобные поверхности в псевдоевклидовом пространстве . . . . .  | 93 |
| 1. Псевдосфера (93). 2. Кривизна пространственноподобных поверхностей в $\mathbb{R}_1^3$ (96).   |    |
| § 11. Комплексный язык в геометрии . . . . .   | 97 |
| 1. Комплексные и вещественные координаты (97). 2. Эрмитово скалярное произведение (99). 3. Примеры групп комплексных преобразований (100).                                 |    |

|  |            |
|--|------------|
| § 12. Аналитические функции . . . . .  | 102        |
| 1. Комплексная запись элемента длины и дифференциала функции (102). 2. Комплексные замены координат (104). 3. Поверхности в комплексном пространстве (107).  |            |
| § 13. Конформный вид метрик поверхностей . . . . .   | 109        |
| 1. Изотермические координаты. Гауссова кривизна в конформных координатах (109). 2. Метрики сферы и плоскости Лобачевского в конформном виде (112). 3. Поверхности постоянной кривизны (114).   |            |
| § 14. Группы преобразований как поверхности в $N$ -мерном пространстве . . . . .   | 116        |
| 1. Координаты в окрестности единицы (116). 2. Экспонента от матрицы (122). 3. Кватернионы (124).   |            |
| § 15. Конформные преобразования многомерных евклидовых и псевдоевклидовых пространств . . . . .  | 129        |
| <b>Глава 3. Тензоры. Алгебраическая теория . . . . .</b>   | <b>136</b> |
| § 16. Примеры тензоров . . . . .   | 136        |
| § 17. Общее определение тензора . . . . .  | 142        |
| 1. Закон преобразования компонент тензоров произвольного ранга (142). 2. Алгебраические операции над тензорами (148).  |            |
| § 18. Тензоры типа $(0, k)$ . . . . .  | 151        |
| 1. Дифференциальная форма записи тензоров с нижними индексами (151). 2. Кососимметрические тензоры типа $(0, k)$ (153). 3. Внешнее произведение дифференциальных форм. Внешняя алгебра (156). 4. Кососимметрические тензоры типа $(k, 0)$ (поливекторы). Интеграл от антикоммутирующих переменных (157). |            |
| § 19. Тензоры в римановом и псевдоримановом пространстве . . . . .   | 159        |
| 1. Поднятие и опускание индексов (159). 2. Собственные значения квадратичной формы (161). 3. Оператор $*$ (162). 4. Тензоры в евклидовом пространстве (162).   |            |
| § 20. Кристаллографические группы и конечные подгруппы групп вращений плоскости и пространства. Примеры инвариантных тензоров . . . . .  | 164        |
| § 21. Тензоры ранга 2 в псевдоевклидовом пространстве и их собственные значения . . . . .  | 184        |
| 1. Кососимметрические тензоры. Инварианты электромагнитного поля (184). 2. Симметрические тензоры и собственные значения. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля (187).  |            |
| § 22. Поведение тензоров при отображениях . . . . .  | 190        |
| 1. Общая операция ограничения тензоров с нижними индексами (190). 2. Отображение касательных пространств (191).  |            |
| § 23. Векторные поля . . . . .   | 192        |
| 1. Однопараметрические группы диффеоморфизмов (192). 2. Экспонента от векторного поля (194). 3. Производная Ли. Примеры (195).   |            |
| § 24. Алгебры Ли . . . . .   | 199        |
| 1. Алгебры Ли и векторные поля (199). 2. Основные матричные алгебры Ли (201). 3. Линейные векторные поля (206). 4. Левоинвариантные поля на группах преобразований (208). 5. Метрика Киллинга (209). 6. Классификация трехмерных алгебр Ли (210). 7. Алгебра Ли конформной группы (211).                 |            |

|   |     |
|---|-----|
| Глава 4. Дифференциальное исчисление тензоров . . . . .   | 217 |
| § 25. Дифференциальное исчисление кососимметрических тензоров . . . . .   | 217 |
| 1. Градиент кососимметрического тензора (217). 2. Внешний дифференциал формы (220).   |     |
| § 26. Кососимметрические тензоры и теория интегрирования . . . . .  | 225 |
| 1. Интегрирование дифференциальных форм (225). 2. Примеры дифференциальных форм (230). 3. Общая формула Стокса. Примеры (235). 4. Доказательство общей формулы Стокса для куба (242).   |     |
| § 27. Дифференциальные формы в комплексных пространствах . . . . .  | 244 |
| 1. Операторы $d'$ и $d''$ (244). 2. Кэлера метрика. Форма кривизны (247).   |     |
| § 28. Ковариантное дифференцирование . . . . .  | 249 |
| 1. Евклидова связность (249). 2. Ковариантное дифференцирование тензоров произвольного ранга (257).   |     |
| § 29. Ковариантное дифференцирование и метрика . . . . .  | 261 |
| 1. Параллельный перенос векторных полей (261). 2. Геодезические (263). 3. Связности, согласованные с метрикой (264). 4. Связности, согласованные с комплексной структурой (267).  |     |
| § 30. Тензор кривизны . . . . .   | 271 |
| 1. Общий тензор кривизны (271). 2. Симметрии тензора кривизны. Тензор кривизны, порожденный метрикой (275). 3. Примеры: тензор кривизны двух- и трехмерных пространств, метрики Киллинга (276). 4. Уравнения Петерсона — Кодацци. Поверхности постоянной отрицательной кривизны и уравнение «sin-gordon» (281). |     |
| Глава 5. Элементы вариационного исчисления . . . . .  | 286 |
| § 31. Одномерные вариационные задачи . . . . .  | 286 |
| 1. Уравнения Эйлера — Лагранжа (286). 2. Основные примеры функционалов (289).   |     |
| § 32. Законы сохранения . . . . .   | 293 |
| 1. Группы преобразований, сохраняющих вариационную задачу (293). 2. Некоторые примеры. Применение законов сохранения (294).   |     |
| § 33. Гамильтонов формализм . . . . .   | 304 |
| 1. Преобразование Лежандра (304). 2. Движущиеся системы координат (306). 3. Принципы Мопертюи и Ферма. Приложения (310).  |     |
| § 34. Геометрическая теория фазового пространства . . . . .   | 312 |
| 1. Градиентные системы (312). 2. Скобка Пуассона (314). 3. Канонические преобразования (319).   |     |
| § 35. Лагранжевы поверхности . . . . .  | 323 |
| 1. Пучки траекторий и уравнение Гамильтона — Якоби (323). 2. Случай гамильтонианов, являющихся однородными функциями первого порядка от импульсов (326).  |     |
| § 36. Вторая вариация для уравнения геодезических . . . . .   | 329 |
| 1. Формула второй вариации (329). 2. Сопряженные точки и условие минимальности (332).   |     |
| Глава 6. Многомерные вариационные задачи. Поля и их геометрические инварианты . . . . .   | 335 |
| § 37. Простейшие многомерные вариационные задачи . . . . .  | 335 |
| 1. Уравнения Эйлера — Лагранжа (335). 2. Тензор энергии-импульса (338). 3. Уравнения электромагнитного поля (342).  |     |

|   |     |
|---|-----|
| 4. Уравнения гравитационного поля (348). 5. Мыльные пленки (355). 6. Уравнение равновесия тонкой пластинки (360).   |     |
| § 38. Примеры лагранжианов . . . . .  | 365 |
| § 39. Простейшие понятия общей теории относительности . . . . .   | 368 |
| § 40. Спинорное представление групп $SO(3)$ и $O(3, 1)$ . Уравнение Дирака и его свойства . . . . .   | 382 |
| 1. Автоморфизмы алгебры матриц (382). 2. Спинорное представление группы $SO(3)$ (383). 3. Спинорное представление группы Лоренца (385). 4. Уравнение Дирака (388). 5. Уравнение Дирака в электромагнитном поле. Оператор зарядового сопряжения (390). |     |
| § 41. Ковариантное дифференцирование полей с произвольной симметрией . . . . .  | 391 |
| 1. Калибровочные преобразования. Калибровочно инвариантные лагранжианы (391). 2. Форма кривизны (394). 3. Основные примеры (395).   |     |
| § 42. Примеры калибровочно инвариантных функционалов. Уравнения Максвелла и Янга — Миллса. Функционалы с тождественно нулевой вариационной производной (характеристические классы) . . . . .  | 399 |

## ЧАСТЬ II

### ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ МНОГООБРАЗИЙ

|  |     |
|--|-----|
| Глава 1. Примеры многообразий . . . . .  | 407 |
| § 1. Понятие многообразия . . . . .  | 407 |
| 1. Определение многообразия (407). 2. Образования многообразий; тензоры на многообразии (411). 3. Вложения и погружения многообразий. Многообразия с краем (414).  |     |
| § 2. Простейшие примеры многообразий . . . . .   | 416 |
| 1. Поверхности в евклидовом пространстве. Группы преобразований как многообразия (416). 2. Проективные пространства (421).   |     |
| § 3. Необходимые сведения из теории групп Ли . . . . .   | 424 |
| 1. Структура окрестности единицы группы Ли. Алгебра Ли группы. Полупростота (424). 2. Понятие (линейного) представления. Пример нематричной группы Ли (430).   |     |
| § 4. Комплексные многообразия . . . . .  | 433 |
| 1. Определения и примеры (433). 2. Римановы поверхности как многообразия (439).  |     |
| § 5. Простейшие однородные пространства . . . . .  | 442 |
| 1. Действие группы на многообразии (442). 2. Примеры однородных пространств (443).   |     |
| § 6. Пространства постоянной кривизны (симметрические пространства) . . . . .  | 447 |
| 1. Понятие симметрического пространства (447). 2. Группа изометрий. Свойства ее алгебры Ли (449). 3. Симметрические пространства 1-го и 2-го типов (451). 4. Группы Ли как симметрические пространства (452). 5. Построение симметрических пространств. Примеры (454). |     |
| § 7. Линейные элементы и связанные с ними многообразия . . . . .   | 458 |
| 1. Конструкции, связанные с касательными векторами (458). 2. Нормальное расслоение к подмногообразию (461).  |     |

|  |            |
|--|------------|
| <b>Глава 2. Вопросы обоснования. Необходимые сведения из теории функций. Типичные гладкие отображения . . . . .</b>  | <b>464</b> |
| § 8. Разбиение единицы и его применения . . . . .  | 464        |
| 1. Разбиение единицы (464). 2. Простейшие применения разбиения единицы. Интеграл по многообразию и формула Стокса (468). 3. Инвариантные метрики (473).  |            |
| § 9. Реализация компактных многообразий как поверхностей в $\mathbb{R}^N$ . . . . .  | 475        |
| § 10. Некоторые свойства гладких отображений многообразий . . . . .  | 475        |
| 1. Аппроксимация непрерывных отображений гладкими (475). 2. Теорема Сарда (477). 3. Трансверсальная регулярность (481). 4. Функции Морса (484).  |            |
| § 11. Применения теоремы Сарда . . . . .   | 488        |
| 1. Существование вложений и погружений (488). 2. Построение функций Морса как функций высоты (491). 3. Фокальные точки (493).  |            |
| <br>   |            |
| <b>Глава 3. Степень отображения. Индекс пересечения. Их приложения . . . . .</b>   | <b>496</b> |
| § 12. Понятие гомотопии . . . . .  | 496        |
| 1. Определение гомотопии. Аппроксимация отображений и гомотопий гладкими (496). 2. Относительные гомотопии (498).  |            |
| § 13. Степень отображения . . . . .  | 499        |
| 1. Определение степени (499). 2. Обобщения основного определения (500). 3. Гомотопическая классификация отображений многообразия в сферу (502). 4. Простейшие примеры (503).   |            |
| § 14. Некоторые применения степени . . . . .   | 506        |
| 1. Степень и интеграл (506). 2. Степень векторного поля на гиперповерхности (507). 3. Число Уитни. Формула Гаусса — Бонне (509). 4. Индекс особой точки векторного поля (513). 5. Трансверсальная поверхность векторного поля. Теорема Пуанкаре — Бендиксона (516).  |            |
| § 15. Индекс пересечения и его применения . . . . .  | 519        |
| 1. Определение индекса пересечения (519). 2. Суммарная особенность векторного поля (521). 3. Алгебраическое число неподвижных точек. Теорема Брауэра (523). 4. Коэффициент зацепления (525).   |            |
| <br>   |            |
| <b>Глава 4. Ориентируемость многообразий. Фундаментальная группа. Накрытия (расслоенные пространства с дискретным слоем) . . . . .</b>   | <b>527</b> |
| § 16. Ориентируемость и гомотопия замкнутых путей . . . . .  | 527        |
| 1. Перенос ориентации вдоль пути (527). 2. Примеры неориентируемых многообразий (529).   |            |
| § 17. Фундаментальная группа . . . . .   | 530        |
| 1. Определение фундаментальной группы (530). 2. Зависимость от начальной точки (532). 3. Свободные гомотопические классы отображений окружности (532). 4. Гомотопическая эквивалентность (533). 5. Примеры (534). 6. Фундаментальная группа и ориентируемость (536). |            |
| § 18. Накрытие и накрывающая гомотопия . . . . .   | 537        |
| 1. Определение и фундаментальные свойства накрытий (537). 2. Простейшие примеры. Универсальное накрытие (539). 3. Разветвленные накрытия. Римановы поверхности (541). 4. Накрытия и дискретные группы преобразований (543).  |            |

|   |            |
|---|------------|
| § 19. Накрытия и фундаментальная группа. Вычисление фундаментальной группы некоторых многообразий . . . . .   | 544        |
| 1. Монодромия (544). 2. Вычисление фундаментальной группы с помощью накрытий (547). 3. Простейшая гомологическая группа (550).  |            |
| § 20. Дискретные группы движений плоскости Лобачевского . . . . .   | 552        |
| <b>Глава 5. Гомотопические группы . . . . .</b>   | <b>567</b> |
| § 21. Определение абсолютных и относительных гомотопических групп. Примеры . . . . .  | 567        |
| 1. Основные определения (567). 2. Относительные гомотопические группы. Точная последовательность пары (570).  |            |
| § 22. Накрывающая гомотопия. Гомотопические группы накрытий и пространств петель . . . . .  | 573        |
| 1. Понятие расслоения (573). 2. Точная последовательность расслоения (575). 3. Зависимость гомотопических групп от начальной точки (577). 4. Случай групп Ли (580). 5. Умножение Уайтхеда (582).  |            |
| § 23. Сведения о гомотопических группах сфер. Оснащенные многообразия. Инвариант Хопфа . . . . .  | 585        |
| 1. Оснащенные многообразия и гомотопические группы сфер (585). 2. Надстройка (589). 3. Вычисление групп $\pi_{n+1}(S^n)$ (591). 4. Группы $\pi_{n+2}(S^n)$ (592).   |            |
| <b>Глава 6. Гладкие расслоения (косые произведения) . . . . .</b>   | <b>596</b> |
| § 24. Гомотопическая теория косых произведений . . . . .  | 596        |
| 1. Понятие гладкого расслоения (596). 2. Связность (601). 3. Вычисление гомотопических групп с помощью расслоений (603). 4. Классификация расслоений (609). 5. Векторные расслоения и операции над ними (614). 6. Мероморфные функции (616). 7. Формула Пикара — Лефшеца (620). |            |
| § 25. Дифференциальная геометрия расслоений . . . . .   | 622        |
| 1. $G$ -связности в главных расслоениях (622). 2. $G$ -связности в ассоциированных расслоениях. Примеры (627). 3. Кривизна (630). 4. Характеристические классы. Конструкции (635). 5. Характеристические классы. Перечисление (641).  |            |
| § 26. Узлы и зацепления. Косы . . . . .   | 649        |
| 1. Группа узла (649). 2. Полином Александра (651). 3. Расслоение, связанное с узлом (652). 4. Зацепления (654). 5. Косы (655).  |            |
| <b>Глава 7: Некоторые примеры динамических систем и слоений на многообразиях . . . . .</b>  | <b>658</b> |
| § 27. Простейшие понятия качественной теории динамических систем. Двумерные многообразия . . . . .  | 658        |
| 1. Основные определения (658). 2. Динамические системы на торе (662).   |            |
| § 28. Гамильтоновы системы на многообразиях. Теорема Лиувилля. Примеры . . . . .  | 667        |
| 1. Гамильтоновы системы в касательном расслоении (667). 2. Гамильтоновы системы на многообразиях. Примеры (668). 3. Геодезические потоки (671). 4. Теорема Лиувилля (673). 5. Примеры (675).  |            |
| § 29. Слоения . . . . .   | 679        |
| 1. Основные определения (679). 2. Примеры слоений коразмерности 1 (682).  |            |

|  |            |
|--|------------|
| § 30. Вариационные задачи с высшими производными. Гамильтоновы полевые системы . . . . .   | 688        |
| 1. Гамильтонов формализм задач с высшими производными (688). 2. Примеры (691). 3. Гамильтонов формализм полевых систем (694).  |            |
| <b>Глава 8. Глобальная структура решений многомерных вариационных задач . . . . .</b>  | <b>703</b> |
| § 31. Некоторые многообразия общей теории относительности (ОТО) . . . . .  | 703        |
| 1. Постановка задачи (703). 2. Сферически симметричные решения (704). 3. Аксиально симметричные решения (712). 4. Космологические модели (716). 5. Модели Фридмана (718). 6. Анизотропные вакуумные модели (722). 7. Более общие модели (726). |            |
| § 32. Некоторые примеры глобальных решений уравнений Янга — Миллса. Киральные поля . . . . .   | 731        |
| 1. Общие замечания. Решения типа монополей (731). 2. Уравнение дуальности (736). 3. Киральные поля. Интеграл Дирихле (739).  |            |
| § 33. Минимальность комплексных подмногообразий . . . . .  | 748        |
| Список литературы . . . . .  | 753        |
| Предметный указатель . . . . .   | 755        |