ПРЕДИСЛОВИЕ

До последнего времени риманова геометрия и основы топологии не входили в программы обязательного университетского математического образования даже для математических факультетов. Раньше существовали (и до сих пор существуют кое-где) курсы классической дифференциальной геометрии кривых и поверхностей, на которые все постепенно стали смотреть как на анахронизм. Однако до сих пор нет единой точки зрения на то, как именно эти курсы следует модернизировать, какую часть современной геометрии следует считать общеобязательным элементом современной математической культуры, сколь абстрактным должен быть язык ее изложения.

Модернизированный курс геометрии начал создаваться на отделении механики механико-математического факультета МГУ в 1971 г. Здесь точка зрения на содержание и уровень абстрактности изложения геометрического курса диктовалась соображениями необходимости: кроме геометрии кривых и поверхностей теория тензоров, их ковариантное дифференцирование, риманова кривизна, геодезические и вариационное исчисление, включая законы сохранения и гамильтонов формализм, особый случай кососимметрических тензоров («форм»), операций над ними, многомерные формулы типа Стокса и их инвариантная запись безусловно полезны в различных разделах механики, особенно в механике сплошных сред, теории относительности и др. Многие ведущие механики разделяли точку зрения математиков о полезности внедрения некоторых сведений из теории многообразий, групп преобразований, алгебр Ли, а также изложения простейших идей наглядной топологии. При этом язык изложения всех частей курса должен был быть предельно простым, не абстрактным, терминология — общей с той, которая используется физиками всюду, где это возможно. Этот материал и составил первоначальный курс, записанный и изданный в МГУ в виде пособий:

Новиков С. П. Дифференциальная геометрия, части I и II.— Ротапринт НИИ механики при МГУ, 1972.

В дальнейшем авторы видоизменяли разные части курса, добавляли новые. Эти дополнения были изданы в МГУ:

Новиков С. П., Фоменко А. Т. Дифференциальная геометрия, часть III.— Ротапринт НИИ механики при МГУ, 1974.

Эта книга написана авторами в результате обработки, упорядочения и дальнейшего развития ротапринтных пособий по геометрии, о которых мы упоминали выше. Она, как нам кажется, может служить учебным пособием, на базе которого без труда формируется обязательный геометрический курс.

Идея создания пособия такого типа и план книги принадлежат С. П. Новикову. Работа по согласованию материала упомянутых выше ротапринтных пособий с этим планом была проведена Б. А. Дубровиным. Это составило более половины первой части книги. Весь остальной материал пришлось писать целиком заново. Неоценимый вклад при завершении работы над книгой внес редактор Д. Б. Фукс.

Содержание написанной нами книги значительно выходит за рамки обязательного курса, который может быть прочитан студентам 2—3-го курсов университета. Это сделано авторами преднамеренно: мы хотели, чтобы уже в части I ряд разделов книги служил для дальнейшего самостоятельного ознакомления студентов и аспирантов с более сложными геометрическими по своей сути понятиями и методами теории групп преобразований и алгебр Ли, теории поля и вариационного исчисления, в частности с теми, которые играют фундаментальную роль в математическом формализме физики. При этом мы старались минимизировать уровень абстрактности языка изложения и системы обозначений, жертвуя часто так называемой «общностью» формулировок и доказательств: нередко важный факт в узловых, определяющих всю суть дела примерах может быть получен из элементарных соображений классического анализа и геометрии, не использующих никакие современные «сверхинвариантные» понятия и обозначения, но его формулировка и особенно доказательство «в общем виде» требуют резкого усложнения уровня формализации и абстрактности. В таких случаях мы излагали вывод именно для этих важнейших примеров на том простейшем языке, который для этого нужен, оставляя доказательство общего утверждения за рамками этой книги или помещая его уже потом. При изложении геометрических вопросов, связанных с современной физикой более тесно, мы анализировали физическую литературу: довольно большие начальные части книг по квантовой теории поля (например [36], [37]) содержат ряд полезных сведений о важных понятиях, связанных с многомерным вариационным исчислением и простейшими представлениями групп Ли в той форме, в какой они используются физиками; книги [38], [39] посвящены теории полей, геометрических по своему смыслу; например, существенная часть книги [38] является изложением римановой геометрии в физическом аспекте и содержит много полезного конкретного материала. Любопытно посмотреть также книги по механике сплошных сред и теории твердого тела ([40] — [42]), чтобы составить себе представление о некоторых применениях тензоров, теории групп и т. д.

При написании книги авторы не стремились к полному «самообслуживанию»: в математическом образовании изучение геометрии является лишь одной из компонент; ряд вопросов анализа, дифференциальных уравнений, алгебры, элементов общей топологии и теории меры излагается в других курсах. Мы в данной книге не занимались изложением этих вопросов, лишь в случае необходимости напоминая формулировки.

Вторая часть книги, посвященная геометрии и топологии многообразий, содержит гораздо больше материала, выходящего за рамки обязательного курса, чем первая. Книг по топологии и геометрии многообразий было написано немало; однако большинство их посвящено узким частям этой области и написано языком (как правило, весьма абстрактным), специально приспособленным только для изложения данного узкого раздела со всеми обоснованиями, являющимися зачастую основными источниками сложности. По мере возможности мы и в этой части соблюдали принципы минимальной абстрактности изложения, предпочтения важнейших примеров общим теоремам и возможной независимости изложения разных глав, чтобы каждую из них в отдельности было легче читать (если это вообще допускается сутью дела). Однако следует иметь в виду такое обстоятельство: хотя ряд понятий топологии (например, узлы и зацепления, фундаментальная группа, гомотопические группы, расслоенные пространства) вводится без особого труда, попытки серьезно использовать их в простейших примерах неизбежно требуют развития некоторого аппарата, не представленного никакими аналогиями в классической математике. Вследствие этого сложность второй части для читателя, даже хорошо владеющего аппаратом классической математики, но впервые изучающего элементы топологии, существенно выше, чем в первой части,— тут ничего не поделаешь. Внедрение этих методов в различные разделы самой математики, начиная с 50-х годов, было весьма интенсивным. В последние годы возник ряд «ростков» нетривиального применения методов топологии (иногда вместе с комплексной алгебраической геометрией) в ряде современных математико-физических задач: в квантовой теории конкретных полей, имеющих геометрическую природу, например полей Янга — Миллса, киральных полей, в теории жидких кристаллов и сверхтекучести, в общей теории относительности, в теории некоторых важных в физике нелинейных волновых уравнений, например, Кортевега — де Фриза, sin-gordon и др., в статистической механике некоторых веществ с «длинными молекулами» (попытки применения узлов и зацеплений). Мы не можем, к сожалению, изложить сами эти приложения в рамках данной книги, так как их изложение в каждом случае потребовало бы большого количества предварительных физических сведений, которые увели бы нас весьма далеко. Однако при подборе материала мы считались с информацией о том, какие топологические соображения и понятия имеются в этих приложениях, зная о необходимости иметь по топологии книгу, которую мог бы (при сильном желании) прочесть молодой физик-теоретик современной школы, и при этом с определенной пользой.

Развитие топологических и геометрических идей за последние 20 лет потребовало существенного усложнения алгебраического аппарата, переплетающегося с многомерной геометрической интуицией, глубокого использования функционального анализа и теории уравнений в частных производных, комплексного анализа; все это не вошло в данную книгу, претендующую на элементарность (многое из этого не изложено до сих пор ни в одной книге учебного типа и изучается лишь по журнальным статьям и монографиям).

Наглядным и общеполезным разделом классической геометрии поверхностей в трехмерном пространстве является также геометрия в целом, в особенности теория выпуклых фигур и ее приложения. Большой интерес также представляют глобальные проблемы теории поверхностей отрицательной кривизны. Не будучи специалистами в этих областях, авторы не смогли выделить из них достаточно простых и иллюстративных «выжимок», которые могли бы быть помещены в элементарную книгу. С этими разделами геометрии читатель может познакомиться по книгам [4]—[6].

По техническим соображениям третья часть книги, относящаяся к теории гомологий, будет издана авторами отдельно.

Из книг по топологии и геометрии многообразий по самому подходу к выбору материала авторам оказались наиболее близкими классические книги Зейферта и Трельфалля «Топология» и «Вариационное исчисление в целом», а также более современные прекрасные книги [11], [12], [17]. Материал этих книг и методика их авторов активно использовались и продумывались нами в процессе работы. Если говорить о второй части, мы хотели написать нечто вроде современного аналога книги типа «Топология» Зейферта и Трельфалля, однако гораздо более разносторонней по содержанию, перестроенной по мере возможности на технику современной теории гладких многообразий с упрощенным языком, обогащенную новым материалом, ориентированную на сегодняшнее представление о значении топологических методов, о возможном читателе, впервые изучающем топологическую книгу, но желающем узнать не слишком мало и при этом за минимально возможное время. Нам казалось разумным в той мере, в которой это вообще возможно в математической книге (особенно в первой части), пытаться использовать методический опыт, накопленный физиками: как сделать математически нетривиальные явления понятными с помощью минимальных общедоступных средств (не отказываясь, разумеется, от характерного для математической литературы выделения в тексте явных формулировок теорем и лемм). В любом случае, по нашему мнению, понимание должно предшествовать формализации и обоснованию. Существует немало фактов, использование которых в применениях никак не связано с тем, как именно этот факт был доказан (лишь бы он был верен). Иногда в процессе разбора примеров (особенно в более сложных разделах второй части) мы приводим такие факты без доказательства и затем их используем. Нам этот прием кажется оправданным. Читатель, наконец, сам сможет (если захочет) разобрать по другой литературе доказательство факта, приложения которого он уже хорошо знает. (Для этого мы рекомендуем книгу [26].) Впрочем, мы старались разбить доказательство таких фактов на вполне решаемые задачи, помещенные в соответствующих параграфах в число упражнений.

В двух последних главах книги помещен ряд извлечений из современной литературы по динамическим системам и слоениям, общей теории относительности, теории полей Янга — Миллса и киральных полей. Излагаемые здесь идеи принадлежат различным современным авторам. В данной книге, носящей чисто учебный характер, мы сочли возможным не приводить соответствующего длинного списка цитирований. Читатель, который будет изучать эти вопросы более глубоко по современной литературе, найдет в ней и соответствующие цитирования.

В заключение авторы хотели бы выразить свою глубокую благодарность коллегам по механико-математическому факультету МГУ, чья ценная поддержка сделала возможной работу над новыми геометрическими курсами и их внедрением. Из числа ведущих математиков факультета это относится в первую очередь к создателю школы советских топологов П. С. Александрову и известным геометрам П. К. Рашевскому и Н. В. Ефимову.

Авторы благодарны редактору книги Д. Б. Фуксу за большую работу по усовершенствованию рукописи, а также рецензентам А. Д. Александрову, А. В. Погорелову, Ю. Ф. Борисову, В. А. Топоногову, В. И. Кузьминову, сделавшим ряд полезных замечаний.

Авторы выражают также особую благодарность ученым, способствовавшим внесению в материал книги ряда нестандартных разделов. Например, доказательство теоремы Лиувилля о конформных отображениях отсутствует в общедоступной литературе и было сообщено авторам В. А. Зоричем. Редактор книги Д. Б. Фукс указал авторам простые доказательства ряда теорем. Авторы благодарят также О. И. Богоявленского, М. И. Монастырского, С. Г. Гиндикина, Э. Б. Винберга, Д. В. Алексеевского, И. В. Грибкова, П. Г. Гриневича.

При подготовке второго издания книги авторы учли многочисленные отзывы и пожелания читателей — от студентов и аспирантов до крупных ученых, математиков и физиков. Наиболее значительной методической перестройке подверглись разделы, посвященные геометрической теории фазового пространства и гамильтонова формализма. Дано также систематическое изложение бесконечномерного (теоретико-полевого) обобщения гамильтонова формализма. Далее, в качестве одного из приложений теории кососимметрических тензоров в § 18 включен формализм так называемого интегрирования по антикоммутирующим переменным. Методически улучшены главы, посвященные многомерному вариационному исчислению. Серьезно расширен текст начала второй части с тем, чтобы более элементарно подвести читателя к понятию многообразия. Ликвидированы некоторые ошибки в доказательстве теоремы Лиувилля о вполне интегрируемых системах. Были устранены некоторые другие недочеты и замеченные опечатки и расширен список литературы.

Авторы благодарят Я. Б. Зельдовича, замечания которого позволили улучшить изложение в ряде мест при подготовке английского и французского изданий книги (разумеется, эти улучшения сделаны и в настоящем издании). Авторы благодарны также рецензентам переработанного варианта книги А. В. Погорелову и Ю. Г. Решетняку за ряд полезных замечаний.