Глава десятая

Расчет переходных процессов в цепях с сосредоточенными параметрами операторным методом

10.1. Операторное изображение функций, их производных и интегралов

В предыдущей главе был изложен классический метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях с постоянными параметрами. Такие процессы описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Эти уравнения могут быть проинтегрированы также операторным методом.

Хевисайд применил этот метод в конце 19-го столетия к расчету переходных процессов в электрических цепях. При этом Хевисайд, не ссылаясь на предыдущие математические работы в этой области, не приводит и математического обоснования метода.

При использовании операторного метода действительные функции времени, называемые оригиналами, заменяют их операторными изображениями. Соответствие между оригиналом и изображением устанавливается с помощью некоторого функционального преобразования. Это преобразование выбирается так, чтобы операции дифференцирования и интегрирования оригиналов заменялись алгебраическими операциями над их изображениями. В таком случае дифференциальные уравнения для оригиналов переходят в алгебраические уравнения для их изображений.

Связь между оригиналом $f(t)$ и его изображением устанавливается с помощью *интеграла Лапласа:*

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt,$$

где $p = \sigma + j\eta$ — комплексное число. Таким образом, операторное изображение действительной функции времени является функцией комплексного числа p.

Для того чтобы интеграл Лапласа имел конечное значение, функция $f(t)$ должна удовлетворять определенным условиям. Она должна удовлетворять условиям Дирихле, т. е. за любой конечный промежуток времени иметь конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов. Кроме того, будем считать, что при $t > 0$ удовлетворяется условие $|f(t)| < Ae^{\alpha t}$, где A и α — некоторые положительные числа. Иными словами, можно выбрать A и α так, чтобы модуль функции $f(t)$ возрастал медленнее, чем $Ae^{\alpha t}$. Все реальные токи и напряжения удовлетворяют этим условиям. Для того чтобы интеграл Лапласа имел конечное значение, необходимо полагать $\sigma > \alpha$.

Комплексное число p называют оператором.

Условимся записывать *преобразование Лапласа* также в виде

$$F(p) = \mathscr{L}[f(t)].$$

Соответствие между оригиналом и изображением записывается условно в виде

$$F(p) \Rightarrow f(t).$$

Заметим, что по определению преобразование Лапласа применимо начиная с момента $t = +0$. Далее, обозначая начальное значение функции и ее производных через $f(0), f'(0), f''(0), ..., f^{(n)}(0)$, будем понимать под ними их значения при $t = +0$.

Существует обратное функциональное преобразование, дающее возможность определить оригинал по его изображению. Такое преобразование, носящее название *обратного преобразования Лапласа,* имеет вид

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp = f(t), \text{ где } p = \sigma_0 + j\eta.$$

Обратное преобразование Лапласа кратко записывается в виде

$$\mathscr{L}^{-1}[F(p)] = f(t).$$

В электротехнической практике распространено также функциональное преобразование, называемое *преобразованием по Карсону,* имеющее вид

$$p\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt = pF(p) = \Phi(p).$$

Достоинством преобразования по Карсону является одинаковость размерностей оригинала и изображения. Это видно из того, что произведение pt должно быть безразмерным. В случае же преобразования по Лапласу размерность изображения равна размерности оригинала, умноженной на размерность времени.

Достоинством преобразования по Лапласу является его соответствие преобразованию Фурье, на котором основывается широко используемый в настоящее время частотный метод анализа цепей и который будет изложен в гл. 11. Исходя из последнего соображения, а также из того, что в значительной части современной литературы применяется преобразование по Лапласу, в дальнейшем будем также пользоваться этим преобразованием.

Получим изображение производной $\frac{d}{dt}[f(t)] = f'(t)$. Имеем

$$f'(t) \Rightarrow \int_0^\infty f'(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что, согласно наложенным на $f(t)$ условиям, $[e^{-pt}f(t)]_{t=\infty} = 0$, получаем

$$f'(t) \Rightarrow \left| e^{-pt} f(t) \right|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = pF(p) - f(0).$$

В частном случае, при нулевом начальном условии, когда $f(0) = 0$, для изображения производной имеем

$$f'(t) \Rightarrow pF(p).$$

Изображение второй производной

$$f''(t) \Rightarrow p[pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2\left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2}\right].$$

Соответственно, для производной порядка n получаем

$$f^{(n)}(t) \Rightarrow p^n\left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \frac{f''(0)}{p^3} - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n}\right].$$

В частности, при нулевых начальных условиях, если при $t = 0$ сама функция $f(t)$ и все ее производные до $(n - 1)$-й включительно равны нулю, имеем

$$f^{(n)}(t) \Rightarrow p^n F(p).$$

Найдем теперь изображение интеграла $\psi(t) = \int\limits_0^t f(t)\,dt.$

Используя определение изображения функции $\psi(t)$ с помощью интеграла Лапласа и интегрируя по частям, получаем

$$\Psi(p) = \int\limits_0^\infty \psi(t)e^{-pt}\,dt = \left|-\psi(t)\frac{1}{p}e^{-pt}\right|_0^\infty + \frac{1}{p}\int\limits_0^\infty \psi'(t)e^{-pt}\,dt.$$

Первое слагаемое равно нулю, так как функция $\psi(t)$ должна удовлетворять условию $|\,e^{-pt}\psi(t)|_{t=\infty} = 0$, а при $t = 0$ будет $\psi(t) = \int\limits_0^t f(t)\,dt = 0$. Второе слагаемое равно $\frac{1}{p}F(p)$, так как $\psi'(t) = f(t)$ и $f(t) \Rightarrow F(p)$. Таким образом, изображение интеграла, взятого в пределах от 0 до t, будет

$$\int\limits_0^t f(t)\,dt \Rightarrow \frac{F(p)}{p}.$$

Итак, мы убедились, что, изображая функции времени $f(t)$ с помощью интеграла Лапласа, операции дифференцирования и интегрирования этих функций заменяем алгебраическими операциями над изображениями этих функций.

В дифференциальных уравнениях электрической цепи с производной по времени чаще всего встречаемся в выражении для напряжения u_L на катушке: $u_L = L\frac{di}{dt}$. Обозначая операторное изображение тока $i(t)$ в виде $I(p)$, получаем согласно вышеизложенному операторное изображение для $u_L(t)$:

$$U_L(p) = pLI(p) - Li(0).$$

С интегралом чаще всего встречаемся в выражении напряжения u_C на конденсаторе: $u_C = \frac{1}{C}\int\limits_0^t i\,dt + u_C(0).$

Изображение первого слагаемого согласно изложенному будет $I(p)/(pC)$. Второе слагаемое $u_C(0)$ является постоянной величиной и имеет изображение

$$\int_0^\infty u_C(0)\,e^{-pt}\,dt = \left| -\frac{u_C(0)}{p}\,e^{-pt} \right|_0^\infty = \frac{u_C(0)}{p}.$$

Следовательно, в общем случае при ненулевом начальном условии изображение напряжения на конденсаторе $u_C(t)$ имеет вид

$$U_C(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}.$$

Таким образом, при составлении уравнений цепи в операторной форме автоматически будут учитываться все физические начальные условия — значения токов в катушках и напряжения на конденсаторах при $t = 0$.

10.2. Примеры изображений функций

Изображение постоянной величины A имеет вид

$$\int_0^\infty Ae^{-pt}\,dt = \left| -\frac{A}{p}\,e^{-pt} \right|_0^\infty = \frac{A}{p},$$

т. е. $\mathscr{L}[A] = A/p$ или $A \Rightarrow A/p$.

Пусть $f(t) = e^{\alpha t}$, тогда

$$F(p) = \int_0^\infty e^{\alpha t}\,e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t}\,dt = \left| -\frac{1}{p-\alpha}\,e^{-(p-\alpha)t} \right|_0^\infty = \frac{1}{p-\alpha}$$

и, следовательно,

$$e^{\alpha t} \Rightarrow \frac{1}{p-\alpha}.$$

Если $\alpha t = j(\omega t + \psi)$, то

$$e^{\alpha t} = e^{j\psi}e^{j\omega t} \Rightarrow \frac{e^{j\psi}}{p - j\omega}.$$

Следовательно,

$$\sin\omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \Rightarrow \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

На основе этих результатов можно составить следующую таблицу соответствия некоторых функций (оригиналов) и их изображений.

Оригинал	**Изображение**
A	$\dfrac{A}{p}$
$Ae^{\alpha t}$	$\dfrac{A}{p-\alpha}$

Оригинал	Изображение
$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\alpha}=\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$
$\operatorname{sh}\alpha t=\frac{1}{2}(e^{\alpha t}-e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha}-\frac{1}{p+\alpha}\right)=\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
$\operatorname{ch}\alpha t=\frac{1}{2}(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha}+\frac{1}{p+\alpha}\right)=\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
$\sin\omega t=\frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})$	$\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p-j\omega}-\frac{1}{p+j\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t=\frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-j\omega}+\frac{1}{p+j\omega}\right)=\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t+\psi)$	$\frac{p\sin\psi+\omega\cos\psi}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t+\psi)$	$\frac{p\cos\psi-\omega\sin\psi}{p^2+\omega^2}$
$e^{-\delta t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+\delta)^2+\omega^2}$
$e^{-\delta t}\cos\omega t$	$\frac{p+\delta}{(p+\delta)^2+\omega^2}$
$te^{-\delta t}$	$\frac{1}{(p+\delta)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$

В приведенной таблице даны соотношения между оригиналами и их изображениями при преобразовании Лапласа. При использовании преобразования Карсона следует умножить все изображения на p. В этом случае изображением постоянной величины будет сама постоянная величина. Обратим внимание на то, что кратные полюсы в выражении для $F(p)$ изображают функции, в которых время t входит множителем (последние два выражения в таблице).

Найдем изображение функции, смещенной во времени на величину x, при условии, что при $t < 0$ имеем $f(t) = 0$. Если $f(t) \Rightarrow F(p)$, то для изображения той же функции при $t' = t - x$ получим

$$f(t-x) \Rightarrow \int_0^\infty f(t-x)e^{-pt}\,dt = e^{-px}\int_0^\infty f(t-x)e^{-pt}e^{px}\,dt =$$

$$= e^{-px}\int_0^\infty f(t')e^{-pt'}\,dt' = e^{-px}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt = e^{-px}F(p),$$

то есть

$$f(t-x) \Rightarrow e^{-px}F(p).$$

Найдем оригинал, соответствующий смещению изображения в комплексной плоскости на комплексное число a.

Пусть

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt \Rightarrow f(t).$$

Тогда

$$F(p+a) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-(p+a)t}\,dt = \int_0^\infty [f(t)\,e^{-at}]e^{-pt}\,dt \Rightarrow f(t)\,e^{-at},$$

то есть

$$f(t)\,e^{-at} \Rightarrow F(p+a).$$

Подробные таблицы соответствия оригиналов и изображений приведены в специальных справочниках.

10.3. Законы Кирхгофа и Ома в операторной форме

Первый закон Кирхгофа в применении к узлу цепи для действительных токов имеет вид

$$\sum i_k = 0.$$

Так как ток i_k изображается с помощью интеграла Лапласа, а интеграл суммы равен сумме интегралов от слагаемых этой суммы, то первый закон Кирхгофа в операторной форме записывается в виде

$$\sum I_k(p) = 0.$$

Соответственно, второй закон Кирхгофа в применении к контуру цепи

$$\sum e_k = \sum u_k,$$

где e_k — сумма ЭДС источников энергии в k-й ветви и u_k — напряжение на k-й ветви, записывается в операторной форме:

$$\sum E_k(p) = \sum U_k(p).$$

Естественно, что при составлении уравнений Кирхгофа в операторной форме необходимо задаться положительными направлениями всех токов и соблюдать все правила знаков, установленные ранее при составлении уравнений на основе законов Кирхгофа для действительных функций времени. В общем случае для ветви, содержащей все три элемента (r, L, C), имеем

$$u_k = r_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k}\int_0^t i_k dt + u_{Ck}(0);$$

поэтому согласно § 10.1 с учетом ненулевых начальных условий получим

$$U_k(p) = r_k I_k(p) + pL_k I_k(p) - L_k i_k(0) + \frac{I_k(p)}{pC_k} + \frac{u_{Ck}(0)}{p}$$

или

$$U_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{p} = I_k(p)\left(r_k + pL_k + \frac{1}{pC_k}\right).$$

Величину

$$r_k + pL_k + \frac{1}{pC_k} = Z_k(p)$$

называют обобщенным сопротивлением ветви, или, иначе, операторным сопротивлением ветви.

Окончательно при этом операторная запись законов Кирхгофа примет вид

$$\sum I_k(p) = 0;$$

$$\sum E_k(p) = \sum\left[I_k(p)Z_k(p) - L_k i_k(0) + \frac{u_{Ck}(0)}{p}\right].$$

Ток в k-й ветви и падение напряжения в этой ветви в операторной форме связаны соотношением

$$I_k(p) = \frac{U_k(p) + L_k i_k(0) - u_{Ck}(0)/p}{Z_k(p)},$$

которое представляет собой закон Ома, обобщенный на случай переходного процесса. В частном случае при нулевых начальных условиях, т. е. при $i_{Lk}(0) = 0$ и $u_{Ck}(0) = 0$, имеем

$$I_k(p) = \frac{U_k(p)}{Z_k(p)} = \frac{U_k(p)}{r_k + pL_k + 1/(pC_k)}.$$

Заметим, что структуры записи операторного сопротивления ветви и комплексного сопротивления этой же ветви

$$Z_k = r_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k}$$

тождественны и выражение для комплексного сопротивления Z_k можно получить через операторное сопротивление $Z_k(p)$ путем замены p на $j\omega$, т. е. $Z_k = Z_k(j\omega)$. В частности, полагая $p = 0$, получим сопротивление ветви постоянному току.

Сопоставляя выражения законов Кирхгофа в операторной форме с их выражениями в комплексной форме

$$\sum \dot{I}_k = 0 \quad \text{и} \quad \sum \dot{E}_k = \sum \dot{I}_k Z_k,$$

где комплексные величины $\dot{I}_k$, Z_k содержат частоту ω только с множителем j, видим, что при нулевых начальных условиях законы Кирхгофа в операторной форме одинаковы по виду с этими законами в комплексной форме. Поэтому при нулевых начальных условиях способы расчета любых сложных цепей при переходных процессах операторным методом аналогичны способам расчета установившихся режимов комплексным методом. В частности, при нулевых начальных условиях входное операторное сопротивление сколь угодно сложного пассивного двухполюсника можно получить из комплексного сопротивления этого двухполюсника заменой $j\omega$ на p.

При ненулевых начальных условиях можем второй закон Кирхгофа для всех контуров записать в виде

$$\sum E_k(p) + \sum L_k i_k(0) - \sum \frac{u_{Ck}(0)}{p} = \sum I_k(p) Z_k(p).$$

Рассматривая члены $\Sigma\, L_k i_k(0)$ и $-\Sigma\, u_{Ck}(0)/p$ как ЭДС добавочных источников энергии в контурах (рис. 10.1), можем с их учетом сохранить все те же общие методы расчета сложных цепей. В частности, можно воспользоваться методом наложения и рассчитать процесс в цепи сначала при нулевых начальных условиях, а затем наложить на него процесс, возникающий только под действием одних добавочных ЭДС, определяемых начальными токами в катушках и начальными напряжениями на конденсаторах.

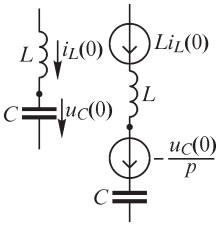

Рис. 10.1

Рассмотрим последовательное соединение нескольких участков цепи. Пусть цепь состоит из одного контура. В таком случае ток для всех участков этой цепи один и тот же. Применяя второй закон Кирхгофа в операторной форме, имеем

$$\sum E_k(p) = I_k(p) \sum Z_k(p) - \sum L_k i_k(0) + \sum \frac{u_{Ck}(0)}{p}.$$

Величина $Z(p) = \Sigma\, Z_k(p)$ является операторным сопротивлением всей цепи. Таким образом, *при последовательном соединении участков цепи их операторные сопротивления складываются*.

Рассмотрим параллельное соединение двух ветвей. В этом случае напряжение на них общее. Пусть в каждой ветви последовательно соединены r, L и C. Имеем для каждой ветви

$$U(p) = I_1(p) Z_1(p) - L_1 i_1(0) + \frac{u_{C1}(0)}{p}$$

и

$$U(p) = I_2(p) Z_2(p) - L_2 i_2(0) + \frac{u_{C2}(0)}{p},$$

где

$$Z_1(p) = r_1 + pL_1 + \frac{1}{pC_1} \quad \text{и} \quad Z_2(p) = r_2 + pL_2 + \frac{1}{pC_2}.$$

Суммарный ток в неразветвленной части цепи изображается как

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p) = \frac{U(p) + L_1 i_1(0) - u_{C1}(0)/p}{Z_1(p)} + \frac{U(p) + L_2 i_2(0) - u_{C2}(0)/p}{Z_2(p)}.$$

Отсюда видим, что *при ненулевых* начальных условиях *нельзя* представить $I(p)$ как произведение $U(p)$ на некоторый множитель $Y(p)$, имеющий смысл операторной проводимости. Однако *при нулевых* начальных условиях это *возможно*, так как при этом

$$I(p) = U(p)\left[\frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)}\right] = U(p)[Y_1(p) + Y_2(p)] = U(p)Y(p).$$

Величины $Y_1(p) = \dfrac{1}{Z_1(p)}$, $Y_2(p) = \dfrac{1}{Z_2(p)}$ и $Y(p) = \dfrac{1}{Z(p)}$ называют о п е р а т о р н ы м и п р о в о д и м о с т я м и.

Таким образом, *при нулевых начальных условиях в случае параллельного соединения участков цепи их операторные проводимости складываются.*

10.4. Расчет переходных процессов в электрических цепях операторным методом

Рассмотрим сначала несколько простых примеров, исследованных ранее классическим методом.

При включении цепи (r, L) под постоянное напряжение $u = U = \text{const}$ имеем $U(p) = U/p$ и $Z(p) = pL + r$, а следовательно, при нулевом начальном условии $i(0) = 0$ операторное изображение тока, согласно закону Ома в операторной форме, получает выражение

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U/p}{r + pL} = \frac{U}{r}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + r/L}\right).$$

Пользуясь изображением функции $e^{\alpha t}$ (см. § 10.2), для искомого тока можем написать

$$i(t) = \frac{U}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right).$$

В случае включения цепи (r, C) под действие постоянного напряжения при $u_C(0) = 0$ имеем

$$I(p) = \frac{U/p}{r + 1/(pC)} = \frac{U}{r}\frac{1}{p + 1/(rC)}$$

и, соответственно,

$$i(t) = \frac{U}{r}e^{-\frac{t}{rC}}.$$

При включении цепи (r, L, C) под действие постоянного напряжения при нулевых начальных условиях получаем

$$I(p) = \frac{U/p}{r + pL + 1/(pC)} = \frac{U}{L}\frac{1}{p^2 + \frac{r}{L}p + 1/(LC)} =$$

$$= \frac{U}{L}\frac{1}{\left(p + \frac{r}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2} = \frac{U}{\omega' L}\frac{\omega'}{(p+\delta)^2 + \omega'^2},$$

где

$$\delta = \frac{r}{2L};\ \omega'^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \text{ и } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Используя таблицу из § 10.2, находим оригинал искомого тока:

$$i(t) = \frac{U}{\omega' L} e^{-\delta t} \sin \omega' t.$$

Достоинство операторного метода для расчета переходных процессов, заключающееся в алгебраизации дифференциальных уравнений цепи, особенно проявляется при расчете сложных цепей.

В предыдущем параграфе было отмечено, что, учитывая члены вида $L_k i_k(0)$ и $-u_{Ck}(0)/p$ как добавочные ЭДС, можем для расчета переходных процессов воспользоваться всеми методами расчета сложных цепей, рассмотренными в гл. 5 применительно к установившимся режимам. Если в цепи имеются индуктивно-связанные ветви, то члены вида $M_{ks} i_s(0)$ также следует рассматривать как некоторые добавочные источники ЭДС, и уравнение второго закона Кирхгофа для контура, в котором действуют ЭДС взаимной индукции, следует писать в виде

$$\sum E_k(p) + \sum L_k i_k(0) + \sum M_{ks} i_s(0) - \sum \frac{1}{p} u_{Ck}(0) = \sum Z_k(p) I_k(p) + \sum p M_{ks} I_s(p).$$

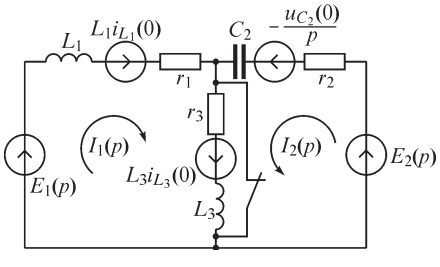

Рис. 10.2

В качестве примера расчета сложной цепи рассмотрим расчет переходного процесса в цепи, приведенной на рис. 10.2, при размыкании ключа. Составим уравнения по методу контурных токов:

$$Z_{11}(p) I_1(p) + Z_{12}(p) I_2(p) = E_{11}(p);$$
$$Z_{21}(p) I_1(p) + Z_{22}(p) I_2(p) = E_{22}(p),$$

где

$$Z_{11}(p) = r_1 + r_3 + p(L_1 + L_3);\quad Z_{22}(p) = r_2 + r_3 + \frac{1}{pC_2} + pL_3;$$

$$Z_{12}(p) = Z_{21}(p) = r_3 + pL_3;\quad E_{11}(p) = E_1(p) + L_1 i_{1L}(0) + L_3 i_{3L}(0);$$

$$E_{22}(p) = E_2(p) - \frac{u_{C2}(0)}{p} + L_3 i_{3L}(0).$$

Решив систему уравнений, получим

$$I_1(p) = \frac{Z_{22}(p)}{D(p)} E_{11}(p) + \frac{-Z_{12}(p)}{D(p)} E_{22}(p);$$

$$I_2(p) = \frac{-Z_{21}(p)}{D(p)} E_{11}(p) + \frac{Z_{11}(p)}{D(p)} E_{22}(p);$$

$$D(p) = Z_{11}(p)Z_{22}(p) - [Z_{12}(p)]^2.$$

Рассмотрим вид этих функций, когда $e_1 = E_0 = \text{const}$ и $e_2 = E_m \sin \omega t$. Соответственно,

$$E_1(p) = \frac{E_0}{p} \quad \text{и} \quad E_2(p) = \frac{E_m \omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Подставляя значения $Z_{11}(p)$, $Z_{22}(p)$, $Z_{12}(p)$, а также $E_{11}(p)$ и $E_{22}(p)$ для тока $I_1(p)$, например, получим

$$I_1(p) = \frac{E_0 G_1(p)}{pH_1(p)} - \frac{E_m \omega G_2(p)}{(p^2 + \omega^2)H_1(p)} + \frac{u_{C2}(0)G_3(p)}{pH_1(p)} +$$

$$+ \frac{L_1 i_{1L}(0)G_4(p)}{H_1(p)} + \frac{L_3 i_{3L}(0)G_5(p)}{H_1(p)} = \frac{G(p)}{p(p^2 + \omega^2)H_1(p)},$$

где

$$H_1(p) = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = L_1 L_3 p^3 + [L_3(r_1 + r_2) + L_1(r_2 + r_3)]p^2 +$$

$$+ \left[r_1(r_2 + r_3) + r_2 r_3 + \frac{L_1 + L_3}{C_2} \right] p + \frac{r_1 + r_3}{C_2};$$

$$G_1(p) = G_4(p) = pZ_{22}(p) = (r_2 + r_3)p + 1/C_2 + L_3 p^2;$$

$$G_2(p) = G_3(p) = pZ_{12}(p) = p(r_3 + pL_3);$$

$$G_5(p) = pZ_2(p) = r_2 p + 1/C_2.$$

В полученном выражении $I_1(p)$ первые два члена определяют ток в переходном процессе при включении цепи под действие ЭДС e_1 и e_2. Последние три члена определяют ток переходного процесса, возникающего в цепи за счет ненулевых начальных значений токов в катушках L_1 и L_3 и напряжения на конденсаторе C_2. Если до размыкания ключа ток в катушке L_3 отсутствовал, то $i_{3L}(0) = 0$ и член, содержащий этот ток, отсутствует. Из полученных выражений вытекает также возможность расчета переходного процесса наложением переходных процессов, рассчитанных отдельно от каждой ЭДС, начальных токов и напряжений.

Как видно из данного примера, операторное изображение тока представляет собой рациональную дробь, где и числитель, и знаменатель являются полиномами оператора p. В следующем параграфе будет рассмотрен способ перехода от изображения к оригиналу, в котором используются некоторые свойства рациональных дробей. В некоторых случаях эти дроби можно привести к виду, представленному в таблицах, в которых даны соответствующие им оригиналы. Однако в этих таблицах (например, *Диткин В. А., Кузнецов П. И.* Справочник по операционному исчислению) такие формулы приведены для полиномов $H_1(p)$ относительно низкого порядка.

10.5. Переход от изображений к оригиналу. Теорема разложения

Для нахождения оригинала представим изображение, полученное в виде рациональной дроби, простейшими слагаемыми, для которых известны оригиналы. С этой целью воспользуемся теоремой разложения. Пусть имеется изображение в виде

$$X(p) = \frac{G(p)}{H(p)},$$

где $G(p)$ и $H(p)$ — полиномы от p. Здесь будем предполагать, что степень m полинома в числителе меньше степени n полинома в знаменателе ($m < n$). В дальнейшем, в гл. 12, снимем это ограничение и увидим, что при $m \geq n$ появляются ЭДС, токи и напряжения, имеющие импульсный характер, т. е. принимающие бесконечно большие значения в течение бесконечно малых интервалов времени. Не рассматривая здесь таких импульсных функций, являющихся, по сути дела, результатом идеализации реальных ЭДС, токов и напряжений, будем полагать $m < n$.

Предположим, кроме того, что уравнение $H(p) = 0$ не имеет кратных корней, а также не имеет корней, равных корням уравнения $G(p) = 0$. При указанных условиях рациональную дробь можно разложить на простейшие дроби:

$$\frac{G(p)}{H(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \ldots + \frac{A_n}{p - p_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{p - p_k},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — корни $H(p)$. Для определения коэффициентов A_k можно воспользоваться одним из многих приемов, известных из алгебры. Умножив обе части равенства на $(p - p_k)$ и приняв $p = p_k$, получим справа A_k, а слева — неопределенность. Раскрывая эту неопределенность, находим

$$A_k = \left| \frac{G(p)(p - p_k)}{H(p)} \right|_{p=p_k} = G(p_k) \lim_{p \to p_k} \frac{p - p_k}{H(p)} = \frac{G(p_k)}{H'(p_k)}.$$

Таким образом,

$$X(p) = \frac{G(p)}{H(p)} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{A_k}{p - p_k} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} \frac{1}{p - p_k}.$$

Так как $\dfrac{A_k}{p - p_k} \Rightarrow A_k e^{p_k t}$, то для искомой величины $x(t)$ имеем

$$x(t) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Это равенство и называют т е о р е м о й р а з л о ж е н и я.

В частном случае, когда один из корней полинома $H(p)$, допустим p_1, равен нулю, то $e^{p_k t} = 1$ и соответствующий член в разложении обращается в постоянную величину. Выделяя этот член, напишем

$$X(p) \Rightarrow x(t) = \frac{G(0)}{H'(0)} + \sum_{k=2}^{k=n} \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Полином $H(p)$ может иметь корень, лежащий в начале координат ($p_1 = 0$), когда в данной цепи имеются источники постоянной ЭДС (или источники посто-

янного тока). Выделенный постоянный член представляет собой установившиеся ток или напряжение в цепи.

Если $H(p)$ имеет пару сопряженных чисто мнимых корней, лежащих на оси мнимых $p_1 = j\omega$, $p_2 = -j\omega$, то можно записать

$$X(p) \Rightarrow x(t) = \frac{G(j\omega)}{H'(j\omega)} e^{j\omega t} + \frac{G(-j\omega)}{H'(-j\omega)} e^{-j\omega t} + \sum_{k=3}^{k=n} \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Полином $H(p)$ может иметь пару чисто мнимых сопряженных корней в случае, если рассматривается переходный процесс при наличии в цепи источников синусоидальных ЭДС или источников синусоидальных токов. Два первых выделенных члена определяют синусоидальный ток или напряжение установившегося режима.

Для иллюстрации применения теоремы разложения рассмотрим некоторые примеры.

В качестве первого примера решим задачу о разряде конденсатора на цепь (r, L), рассмотренную ранее классическим методом (см. § 9.8). Пусть начальное напряжение конденсатора $u_C(0) = U_0$, а начальное значение тока в катушке $i(0) = 0$. Операторное выражение тока имеет вид

$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0) - \frac{1}{p} u_C(0)}{Z(p)} = \frac{-U_0/p}{r + pL + 1/(pC)} =$$

$$= \frac{-U_0/L}{p^2 + \frac{r}{L} p + 1/(LC)} = \frac{-U_0/L}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2},$$

так как $U(p) = 0$. Следовательно, в данном случае $G(p) = -U_0/L$ и $H(p) = p^2 + 2\delta p + \omega_0^2$. Корни уравнения $H(p) = 0$ будут $p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$. Так как

$$H'(p) = 2p + 2\delta, \text{ то } \frac{G(p)}{H'(p)} = \frac{-U_0/L}{2(p+\delta)}.$$

Пользуясь теоремой разложения, получаем

$$i(t) = \frac{-U_0}{2L(p_1+\delta)} e^{p_1 t} + \frac{-U_0}{2L(p_2+\delta)} e^{p_2 t} = \frac{-U_0}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Пусть корни p_1 и p_2 равны друг другу: $p_1 = p_2 = -\delta$ и $\delta = \omega_0$, т. е. полином $H(p)$ имеет кратные корни. Предположив сначала, что $p_1 \neq p_2$, получим только что найденное решение, обращающееся при $p_1 = p_2$ в неопределенность. Раскрывая эту неопределенность при $p_1 \to p_2$, получим, как это было сделано в § 9.8, искомое решение в виде

$$i = -\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t}.$$

В более общем случае, когда один из корней, допустим p_1, полинома $H(p)$ степени n имеет кратность q, рациональную дробь можно разложить на простейшие в виде

$$\frac{G(p)}{H(p)} = \frac{G(p)}{(p-p_1)^q H_1(p)} = \left[\frac{A_{11}}{(p-p_1)^q} + \frac{A_{12}}{(p-p_1)^{q-1}} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{A_{1s}}{(p-p_1)^{q-s+1}} + \ldots + \frac{A_{1q}}{p-p_1}\right] + \frac{A_2}{p-p_2} + \ldots + \frac{A_k}{p-p_k} + \ldots + \frac{A_n}{p-p_n},$$

где

$$A_{1s} = \frac{1}{(s-1)!}\left[\frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}}\frac{(p-p_1)^q G(p)}{H(p)}\right]_{p=p_1};$$

$$A_k = \frac{G(p_k)}{H(p_k)} = \frac{G(p_k)}{(p_k-p_1)^q H_1'(p_k)}.$$

Оригинал функции $\dfrac{A_{1s}}{(p-p_1)^{q-s+1}}$ имеет вид

$$\frac{A_{1s}}{(p-p_1)^{q-s+1}} \Rightarrow \frac{A_{1s}}{(q-s)!} t^{(q-s)} e^{p_1 t}.$$

Оригинал же функции $\dfrac{A_k}{p-p_k}$ равен $A_k\, e^{p_k t}$.

Решим с помощью теоремы разложения задачу о включении цепи (r, L) под синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ при условии $i(0) = 0$, рассмотренную ранее классическим методом (см. § 9.5). Изображение тока в цепи получим, принимая во внимание, что $Z(p) = r + pL$, а изображение синусоидальной функции имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{2j}(U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t} - U_m e^{-j\psi_u} e^{-j\omega t}) \Rightarrow \frac{1}{2j}\left(\frac{\dot{U}_m}{p-j\omega} - \frac{\overset{*}{U}_m}{p+j\omega}\right) = U(p).$$

Операторное изображение тока в цепи определится из выражения

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{1}{2jL}\left[\frac{\dot{U}_m}{(p-j\omega)(p+r/L)} - \frac{\overset{*}{U}_m}{(p+j\omega)(p+r/L)}\right].$$

Применив теорему разложения, получим

$$I(p) = \frac{1}{2jL}\left[\frac{\dot{U}_m}{j\omega + r/L}\,\frac{1}{p-j\omega} + \frac{\dot{U}_m}{-j\omega - r/L}\,\frac{1}{p+r/L} - \frac{\overset{*}{U}_m}{-j\omega + r/L}\,\frac{1}{p+j\omega} -\right.$$

$$\left.-\frac{\overset{*}{U}_m}{j\omega - r/L}\,\frac{1}{p+r/L}\right] \Rightarrow \frac{1}{2j}\left[\frac{\dot{U}_m}{r+j\omega L} e^{j\omega t} - \frac{\dot{U}_m}{r+j\omega L} e^{-\frac{r}{L}t} - \frac{\overset{*}{U}_m}{r-j\omega L} e^{-j\omega t} + \frac{\overset{*}{U}_m}{r-j\omega L} e^{-\frac{r}{L}t}\right].$$

Группируя первый член с третьим и второй с четвертым и имея в виду, что $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega L}{r}$, находим

$$i(t) = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}}\left[\sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - \sin(\psi_u - \varphi)e^{-\frac{r}{L}t}\right].$$

В качестве примера определения переходного тока в разветвленной цепи рассмотрим таковое при включении под постоянное напряжение U_0 цепи, приведенной на рис. 10.3, при нулевых начальных условиях. Операторное сопротивление такой цепи

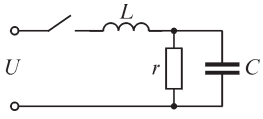

Рис. 10.3

$$Z(p) = pL + \frac{r\dfrac{1}{pC}}{r + 1/(pC)} = \frac{p^2 rLC + pL + r}{1 + prC}.$$

Изображение приложенного напряжения $U_0 \Rightarrow U_0/p$.

Изображение тока представится в виде

$$I(p) = \frac{U_0/p}{Z(p)} = \frac{U_0(1 + prC)}{p(p^2 rLC + pL + r)} = \frac{\dfrac{U_0}{rLC}(1 + prC)}{p\left(p^2 + \dfrac{1}{rC}p + \dfrac{1}{LC}\right)} = \frac{\dfrac{U_0}{rLC}(1 + prC)}{p(p^2 + 2\delta p + \omega_0^2)}.$$

Таким образом,

$$G(p) = \frac{U_0}{rLC}(1 + prC);$$

$$H(p) = p^3 + 2\delta p^2 + \omega_0^2 p; \quad H'(p) = 3p^2 + 4\delta p + \omega_0^2;$$

$$I(p) = \frac{G(p)}{H(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \frac{A_3}{p - p_3};$$

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}; \quad p_3 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2};$$

$$A_1 = \frac{G(0)}{H'(0)} = \frac{U_0}{r}; \quad A_2 = \frac{G(p_2)}{H'(p_2)} = \frac{\dfrac{U_0}{rLC}(1 + p_2 rC)}{p_2 \cdot 2(p_2 + \delta)};$$

$$A_3 = \frac{G(p_3)}{H'(p_3)} = \frac{\dfrac{U_0}{rLC}(1 + p_3 rC)}{p_3 \cdot 2(p_3 + \delta)}.$$

Тогда

$$i(t) = \frac{U_0}{r} + \frac{\dfrac{U_0}{rLC}(1 + p_2 rC)}{p_2 \cdot 2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}e^{p_2 t} - \frac{\dfrac{U_0}{rLC}(1 + p_3 rC)}{p_3 \cdot 2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}e^{p_3 t}.$$

Аналогично можно определить токи в остальных ветвях.

В заключение найдем оригинал изображения тока, полученного в предыдущем параграфе для цепи, приведенной на рис. 10.2, в виде

$$I(p) = \frac{G(p)}{p(p^2 + \omega_0^2)H_1(p)} = \frac{G(p)}{H(p)},$$

где $H_1(p) = Ap^3 + Bp^2 + Cp + D = A(p - p_4)(p - p_5)(p - p_6)$.

Для определения оригинала данной функции при помощи теоремы разложения необходимо прежде всего найти корни знаменателя рациональной дроби. В данном случае знаменатель $H(p)$ имеет шесть корней: $p_1 = 0$, $p_2 = j\omega$, $p_3 = -j\omega$, p_4, p_5, p_6. Корни p_4, p_5 и p_6 можно найти из уравнения третьей степени методами, известными из курса математики. Оригинал искомого тока запишется в виде

$$i(t) = \frac{G(0)}{H'(0)} + \frac{G(j\omega)}{H'(j\omega)}e^{j\omega t} + \frac{G(-j\omega)}{H'(-j\omega)}e^{-j\omega t} + \frac{G(p_4)}{H'(p_4)}e^{p_4 t} + \frac{G(p_5)}{H'(p_5)}e^{p_5 t} + \frac{G(p_6)}{H'(p_6)}e^{p_6 t}.$$

В этом выражении первый член определяет составляющую тока, постоянную во времени; второй и третий сопряженные члены — составляющую тока, изменяющуюся по синусоидальному закону. Эти три члена определяют установившийся режим в цепи. Последние три члена характеризуют затухающие составляющие тока. Они могут быть апериодическими, если корни p_4, p_5 и p_6 вещественны, или колебательными, если два корня — комплексные сопряженные. Эти три последние члена определяют свободный ток в цепи. Как видно из приведенных примеров, пользуясь операторным методом, получаем полное решение, содержащее как установившуюся, так и свободную составляющие переходного процесса с учетом всех начальных условий.

10.6. Свойства корней характеристического уравнения

Рассмотрим любую сколь угодно сложную пассивную цепь, т. е. цепь, в которой отсутствуют источники энергии. В такой цепи может происходить только затухающий во времени свободный процесс, определяемый запасами энергии в магнитных и электрических полях в начальный момент времени. При использовании классического метода ток в любой k-й ветви в этом случае находится в результате решения однородного дифференциального уравнения.

Свойства корней α_i характеристического уравнения, соответствующего этому однородному дифференциальному уравнению, и рассмотрим в настоящем параграфе.

При использовании операторного метода сказанное относится к тем корням p_i полинома $H(p)$, которые определяют свободный процесс. Полином $H(p)$ можно записать в виде произведения $H(p) = N(p)\ H_1(p)$, где корни уравнения $N(p) = 0$ определяются видом действующей в цепи ЭДС и характеризуют установившийся режим. Корни же уравнения $H_1(p) = 0$ определяют свободный процесс. Все это хорошо видно из примеров, приведенных в предыдущем параграфе.

Корни p_i уравнения $H_1(p) = 0$ совпадают с корнями α_i характеристического уравнения, которое используется в классическом методе ($p_i = \alpha_i$).

Первое свойство этих корней для пассивной электрической цепи заключается в том, что вещественные части всех корней должны быть отрицательными:

$$\mathrm{Re}(\alpha_j) < 0.$$

Это свойство является прямым следствием того, что процесс должен быть затухающим.

Вторым свойством является то обстоятельство, что все комплексные корни должны быть попарно сопряженными, так как решения уравнения, определяющие действительные функции времени [ток $i(t)$, напряжение $u(t)$], должны быть вещественными.

Третье свойство заключается в том, что чисто мнимые корни $\alpha_i = j\omega_i$ и $\overset{*}{a}_i = -j\omega_i$ должны быть простыми. Действительно, если бы такие корни имели каждый кратность $m > 1$, то соответствующее им решение имело бы вид

$$(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_{m-1} t^{m-1}) \sin \omega_i t.$$

При $m > 1$ мы получили бы колебания с нарастающей до бесконечности амплитудой, чего не может быть, так как на рассматриваемую цепь не воздействуют источники энергии и первоначальный запас энергии в магнитных и электрических полях цепи не может возрастать.

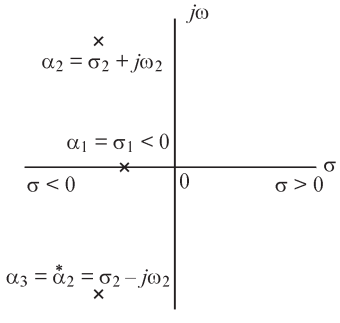

Рис. 10.4

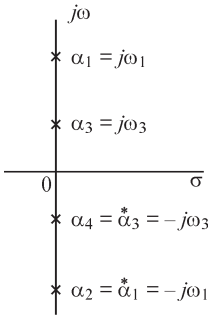

Рис. 10.5

На рис. 10.4 показано расположение вещественных и сопряженных комплексных корней для реальной цепи, содержащей катушки, конденсаторы и резисторы.

Чисто мнимые корни могут быть только для цепей без потерь. На рис. 10.5 показано расположение сопряженных корней на мнимой оси для этого идеализированного случая.