

Ответы на вопросы, решения упражнений и задач

23.1. Уравнения электромагнитного поля в дифференциальной форме

ВОПРОСЫ

1. Способ получения напряженности электрического поля с помощью интегрального соотношения $\oint_s \mathbf{E} d\mathbf{s} = \frac{q}{\varepsilon}$ заключается в нахождении такой поверхности s ,

в любой точке которой вектор $\mathbf{E}$ сохраняет постоянное по модулю значение и направлен к ней под одним и тем же углом α . Если такая поверхность существует и она найдена, то величины $\mathbf{E}$ и $\cos \alpha$ можно вынести из-под знака интеграла и найти искомую напряженность поля как $E = \frac{q}{\varepsilon s \cos \alpha}$.

Такую поверхность можем определить, если поле обладает одним из типов симметрии: сферической, цилиндрической либо плоской. При сферической симметрии поля поверхность s суть сфера, и в этом случае имеем $s = 4\pi r^2$, $\cos \alpha = 1$.

Электрическое поле весьма длинного провода круглого сечения характеризуется цилиндрической симметрией, так что поверхностью s является такая замкнутая цилиндрическая поверхность, на части которой (боковой) имеем $E = \text{const} \neq 0$, а на другой ее части (торцевой) — $\cos \alpha = 0$.

Способ расчета напряженности $\mathbf{H}$ магнитного поля на основе выражения $\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = i$ аналогичен рассмотренному выше: при наличии круговой симметрии

поля выбираем такой круговой контур интегрирования, на котором имеем $H = \text{const}$ и в точках которого угол между векторами $\mathbf{H}$ и $d\mathbf{l}$ имеет постоянное значение.

4. Входящий в правую часть уравнения закона электромагнитной индукции магнитный поток следует понимать как результирующий, определяемый как сумма внешнего (стороннего) потока и магнитного потока, создаваемого индуцируемым электрическим током.

5. При движении проводящего тела в магнитном поле в нем возникает ЭДС индукции. Если, например, в неизменяющемся магнитном поле постоянных магнитов вращать рамку из провода, то в ней возникает ЭДС.

9. Под индукцией $\mathbf{B}$, входящей в правую часть второго уравнения Максвелла, следует понимать результирующую индукцию, обусловленную действием стороннего и индуцированного полей: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{стор}} + \mathbf{B}_{\text{инд}}$. Именно изменяющееся во времени результирующее поле с индукцией $\mathbf{B}$ приводит в соответствии со вторым уравнением Максвелла к появлению электрического поля и электрического тока. Составляющая $\mathbf{B}_{\text{инд}}$ поля возникает вследствие протекания индуцированного тока. Индуцированное электрическое поле приводит к появлению электрических токов. В идеальном диэлектрике протекают токи электрического смещения

и переноса, магнитное поле которых совместно со сторонним полем образуют результирующее поле, индукция которого входит в правую часть второго уравнения Максвелла. В проводниках источниками индуцированного поля являются токи смещения и проводимости.

В ряде случаев индуцированным полем можно пренебречь и не принимать во внимание составляющую $-\frac{\partial \mathbf{B}_{\text{инд}}}{\partial t}$, входящую в правую часть второго уравнения

Максвелла. Такое допущение существенно упрощает решение задачи анализа электромагнитного поля. Оно оправдано, если $\mathbf{B}_{\text{инд}} \ll \mathbf{B}_{\text{стор}}$.

10. В силу соотношений $\partial E_x / \partial y = \partial E_x / \partial z = 0$ имеем $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ и, следовательно, такое поле — безвихревое.

16. Поле вектора $\mathbf{D}$ соленоидальное при $\text{div } \mathbf{D} = 0$, т. е. при отсутствии в области свободных зарядов. Если среда однородна, то $\epsilon \text{div } \mathbf{E} = 0$ и, следовательно, поле вектора $\mathbf{E}$ также соленоидальное. В неоднородной среде имеем $\text{div } \mathbf{D} = \text{div } \epsilon \mathbf{E} = \epsilon \text{div } \mathbf{E} + \mathbf{E} \text{grad } \epsilon = 0$ и $\text{div } \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon} \mathbf{E} \text{grad } \epsilon$, откуда следует, что в общем случае $\text{div } \mathbf{E} \neq 0$, т. е. поле вектора $\mathbf{E}$ не является соленоидальным.

18. Выражая величину $\text{div } \mathbf{H}$ из соотношения $\text{div } \mathbf{B} = \text{div } \mu \mathbf{H} = \mu \text{div } \mathbf{H} + (\text{grad } \mu) \mathbf{H} = 0$: $\text{div } \mathbf{H} = -(1/\mu) (\text{grad } \mu) \mathbf{H}$, приходим к заключению, что в однородной в магнитном отношении среде выражение $\text{div } \mathbf{H} = 0$ справедливо, тогда как в неоднородной среде, когда $\text{grad } \mu \neq 0$, оно неверно.

19. Напряженность магнитного поля не является функцией координат, так как при заданных условиях ($J = 0$, $H = H_x$) из уравнения $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ получаем: $\partial H_x / \partial y = 0$, $\partial H_x / \partial z = 0$. Учитывая условие $\text{div } \mathbf{H} = \partial H_x / \partial x = 0$, приходим к заключению, что поле является однородным и $H = \text{const}$.

При $J \neq 0$ имеем: $\partial H_x / \partial y = -J_z$, $\partial H_x / \partial z = J_y$ и так как $\text{div } \mathbf{H} = \partial H_x / \partial x = 0$, то имеем $H = H(y, z)$.

20. Выражения $\text{div div } \mathbf{A}$, $\text{grad rot } \mathbf{A}$, $\text{grad grad } V$, $\text{rot div } \mathbf{A}$ смысла не имеют, так как функция $\text{div } \mathbf{A}$ скалярная, операции div и rot над которой выполнены быть не могут, а функции $\text{rot } \mathbf{A}$, $\text{grad } V$ — векторные, над которыми нельзя выполнить операцию градиента.

Тождественно равны нулю выражения $\text{rot grad } V$ и $\text{div rot } \mathbf{A}$.

21. Эти понятия теряют смысл в точках, где объемная плотность тока либо заряда обращается в бесконечность. Иногда принимают допущение о том, что ток течет по проводу бесконечно малого сечения либо по бесконечно тонкому листу. В ряде случаев целесообразно рассматривать электрические заряды как сосредоточенные в бесконечно малых объемах, распределенные вдоль бесконечно тонких проводов либо распределенные на бесконечно тонких листах. Во всех этих случаях источник размещен в бесконечно малом объеме, поэтому его объемная плотность становится бесконечной и понятия rot и div в таких точках не определены.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Искомая плотность тока определяется выражением $\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{H}$, в котором для вычисления величины $\text{rot } \mathbf{H}$ следует использовать подходящую систему координат: в варианте *г* имеем в прямоугольной системе координат $\mathbf{J} = \mathbf{k} (-aH_0 e^{-ax})$; в варианте *ж* имеем в цилиндрической системе координат $\mathbf{J} = \mathbf{k} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\alpha) = 0$.

2. Интегрируя уравнение $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\alpha) = J_z$, находим $H_\alpha = \frac{1}{r} \int_0^r r J_z dr$. Например, при

$J_z = J_0 e^{ar}$ (вариант *е*) имеем $H_\alpha = \frac{J_0}{a} e^{ar} + \frac{J_0}{a^2 r} (1 - e^{ar})$.

3. Записывая выражение $\text{rot } \mu \mathbf{H}$ в прямоугольной системе координат:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mu \mathbf{H} &= \mathbf{i} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\mu H)_z - \frac{\partial}{\partial z} (\mu H)_y \right] + \mathbf{j} \left[\frac{\partial}{\partial z} (\mu H)_x - \frac{\partial}{\partial x} (\mu H)_z \right] + \\ &+ \mathbf{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\mu H)_y - \frac{\partial}{\partial y} (\mu H)_x \right] = \mu \text{rot } \mathbf{H} + \mathbf{i} \left[\frac{\partial \mu}{\partial y} H_z - \frac{\partial \mu}{\partial z} H_y \right] + \\ &+ \mathbf{j} \left[\frac{\partial \mu}{\partial z} H_x - \frac{\partial \mu}{\partial x} H_z \right] + \mathbf{k} \left[\frac{\partial \mu}{\partial x} H_y - \frac{\partial \mu}{\partial y} H_x \right] = \mu \text{rot } \mathbf{H} + (\text{grad } \mu) \mathbf{H}, \end{aligned}$$

получаем: $\mathbf{f}_1 = \mu(x, y, z)$, $\mathbf{f}_2 = (\text{grad } \mu) \mathbf{H}$.

5. Принимая во внимание тождество $\text{rot grad } V \equiv 0$, можем записать соотношение $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 + \text{grad } V$, где $V = V(x, y, z)$ — некоторая скалярная функция.

7. Вычислив функцию $\text{rot } \mathbf{E}$, определяем условия, при которых $\text{rot } \mathbf{E} \neq 0$ и, следовательно, электрическое поле является вихревым. Для варианта *ж*, в частности, имеем $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{i} (-\partial E_y / \partial z) = -i E_m c \cos cz \neq 0$, и, следовательно, поле вектора $\mathbf{E}$ — вихревое.

8. Поместим начало прямоугольной системы координат в середине пластины. При допущении $\mathbf{B}_{\text{инд}} \ll \mathbf{B}_m$ второе уравнение Максвелла принимает вид $\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -B_m \omega \cos \omega t$. С учетом условий задачи имеем $\frac{\partial E_x}{\partial z} = 0$ (пластина бесконечно длинная, поле не зависит от координаты z и $J_y \ll J_z$ ($t < d$), так что плотность тока $J_z = B_m \omega \gamma x \cos \omega t$ изменяется в направлении поперек пластины по линейному закону. Амплитудное значение тока $i = h \int_0^{0,5d} J(x) dx = \frac{\omega \gamma h d^2}{4} B_m \cos \omega t$

при заданных численных значениях равно 0,39 А.

9. Принимая в цилиндрической системе координат $B = B_z$, из второго уравнения Максвелла $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\alpha) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \alpha} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$, с учетом независимости поля от угловой координаты получаем $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\alpha) = -\frac{\partial B}{\partial t}$, откуда находим плотность тока $J(r) = \gamma E(r) = -0,5 \omega \gamma r B_m \cos \omega t = -1,57 \cdot 10^5 r \cos 314 t \text{ А/м}^2$.

10. Для нахождения плотности заряда используем соотношение $\rho = \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E}$, записывая выражение $\operatorname{div} \mathbf{E}$ в подходящей системе координат. Например, для варианта б получаем $\rho = \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{j} e^{ar} = 0$.

12. При совпадении осей прямоугольной системы координат с главными осями анизотропии имеем

$$(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

$$\text{и } \mathbf{D} = \mathbf{i}\varepsilon_{xx}E_x + \mathbf{j}\varepsilon_{yy}E_y + \mathbf{k}\varepsilon_{zz}E_z, \text{ так что } \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_{xx}E_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_{yy}E_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_{zz}E_z).$$

При несовпадении осей координат с главными осями анизотропии имеем

$$(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}, \mathbf{D} = \mathbf{i}(\varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z) + \mathbf{j}(\varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z) + \\ + \mathbf{k}(\varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z) = \mathbf{i}D_x + \mathbf{j}D_y + \mathbf{k}D_z, \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

$$14. \rho = \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = \varepsilon_0 a E_0.$$

15. Записывая выражение $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ в цилиндрической системе координат

$$\text{и интегрируя его, находим } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rE_r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, E_r(r) = \frac{1}{\varepsilon_0 r} \int r \rho(r) dr + C.$$

$$16. -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial z} \right) + \\ + \mathbf{j} \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial y} \right).$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0, \nabla U = \mathbf{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial U}{\partial z}, \nabla(\nabla U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z) = \mathbf{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \\ + \mathbf{j} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right).$$

17. Магнитная индукция может выражаться формулой $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z)$, если $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Для варианта *в*, например, имеем $\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = a - c$, так что маг-

нитная индукция может выражаться формулой $\mathbf{B} = iax - kcz$ при $a = c$.

18. Из выражений $\operatorname{div} \boldsymbol{\delta} = 0$, $\boldsymbol{\delta} = \gamma \mathbf{E}$ следует: $\operatorname{div} \gamma \mathbf{E} = \gamma \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{E} \operatorname{grad} \gamma = 0$, откуда получаем $\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{E} \operatorname{grad} \gamma}{\gamma}$. В однородной среде выполняется соотношение

$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$.

23.2. Система уравнений электромагнитного поля

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Уравнение $\operatorname{div} \boldsymbol{\delta} = 0$ вытекает из первого уравнения Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \boldsymbol{\delta}$ в силу тождества $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} \equiv 0$. Поэтому оно не входит в систему уравнений электромагнитного поля.

В силу этого же тождества из второго уравнения Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ следует

равенство $\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, означающее неизменность во времени величины

$\operatorname{div} \mathbf{B}$. Хотя уравнение $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ и следует из второго уравнения Максвелла, однако его нельзя исключить из системы уравнений электромагнитного поля, так как при рассмотрении не изменяющихся во времени полей, когда $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$, из второго

уравнения Максвелла, принимающего в этом случае вид $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, уже не вытекает уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, показывающего, что магнитных зарядов не существует.

3. Так как вектор плотности тока удовлетворяет уравнению $\operatorname{div} \boldsymbol{\delta} = 0$, то в силу тождества $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$ его можно представить в виде $\boldsymbol{\delta} = \operatorname{rot} \mathbf{F}$ и рассматривать как источник некоторого векторного поля $\mathbf{F}$, не обязательно совпадающего с полем вектора напряженности магнитного поля, также удовлетворяющего уравнению $\boldsymbol{\delta} = \operatorname{rot} \mathbf{H}$.

4. В систему уравнений электромагнитного поля входит 16 скалярных переменных: 5 векторных, а именно $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\boldsymbol{\delta}$, и скалярная — плотность заряда. В то же время число скалярных уравнений составляет 17, так как к 5 векторным уравнениям, образующим 15 скалярных, добавляются 2 скалярных: $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$.

Независимыми из них являются 16 уравнений, так как уравнение $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ в общем случае переменного электромагнитного поля вытекает из второго уравнения Максвелла.

5. Из уравнения $\text{rot } \mathbf{H} = \delta$ следует выражение $\text{div } \delta = 0$, которое в силу соотношения $\delta = \gamma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_{\text{пер}}$ можно записать в виде $-\text{div } \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \text{div } (\gamma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{пер}})$ и, учитывая уравнение $\text{div } \mathbf{D} = \rho$, получить выражение $-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div } (\gamma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{пер}})$.

Если, выбрав объем V , проинтегрировать по нему функции обеих частей найденного соотношения, то, принимая во внимание, что $\int_V \rho dV = q$ и $\int_V \text{div}(\gamma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{пер}}) dV = \oint_S (\gamma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{пер}}) d\mathbf{s}$, можно записать выражение $-\frac{dq}{dt} = \oint_S (\gamma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{пер}}) d\mathbf{s}$, показывающее, что заряд в объеме может уменьшаться только за счет протекания тока из объема V сквозь ограничивающую его поверхность.

6. При $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$ и $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ получаем $\text{rot } \mathbf{H} = \delta$, $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, $\text{div } \mathbf{B} = 0$, $\text{div } \mathbf{D} = \rho$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\delta = \gamma \mathbf{E} + \rho \mathbf{v}$.

Если функция $\delta(x, y, z)$ задана, то эти уравнения можно разделить на две группы, переменные в которых не взаимосвязаны: $\text{rot } \mathbf{H} = \delta$, $\text{div } \mathbf{B} = 0$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ и $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, $\text{div } \mathbf{D} = \rho$, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$. Первая группа уравнений описывает не изменяющиеся во времени магнитные поля, вторая — не изменяющиеся во времени электрические поля.

7. Для исключения одной из переменных из системы уравнений электромагнитного поля следует применить операцию rot к обеим частям одного из уравнений Максвелла, подставляя далее в полученное выражение другое уравнение Максвелла. Рассмотрим решение варианта 1) упражнения.

Так как $\text{rot } \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \delta$, то получаем: $\text{rot } \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{E} = -\gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. Аналогично находим $\text{rot } \frac{1}{\gamma} \text{rot } \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{E}$ и $\text{rot } \frac{1}{\gamma} \text{rot } \mathbf{H} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$.

Используя соотношение $\text{rot}_i \text{rot } \mathbf{E} = \text{grad}_i \text{div } \mathbf{E} - \text{div grad } E_i$, получаем при $\mu = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$ в прямоугольной системе координат

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} = \mu \gamma \frac{\partial E_i}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial z^2} = \mu \gamma \frac{\partial H_i}{\partial t}, \quad i = x, y, z.$$

Как видно из уравнений, в прямоугольной системе координат уравнения относительно составляющих E_x, E_y, E_z , как и для составляющих H_x, H_y, H_z , в однородной среде образуют систему несвязанных уравнений. Однако можно убедиться в том, что в цилиндрической системе координат уравнения относительно величин E_r, E_α (как и для величин H_r, H_α) взаимосвязаны.

23.3. Граничные условия на поверхностях раздела сред с различными свойствами

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. В силу условия $E_{t1} = E_{t2}$ можем записать равенство $\oint_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint_{l_2} \mathbf{E} d\mathbf{l}$, где контуры

l_1, l_2 интегрирования, имеющие одинаковую форму, взяты на обеих сторонах поверхности раздела в различных средах. Учитывая, что форма контуров может быть принята произвольной (в частности, они могут быть стянуты в точку), можем, используя закон электромагнитной индукции $\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$, записать усло-

вие $B_{n1} = B_{n2}$. Таким образом, граничные условия $E_{t1} = E_{t2}$ и $B_{n1} = B_{n2}$ не являются независимыми.

Аналогичное рассуждение позволяет прийти к заключению, что из условия $H_{t1} = H_{t2}$ для переменного электромагнитного поля вытекает равенство $D_{n1} = D_{n2}$, так что эти соотношения также не являются независимыми.

2. В случае а) она заключается в возникновении тонкого слоя связанных электрических зарядов на поверхности раздела сред вследствие их различной поляризованности.

В случае б) различная намагниченность $\mathbf{M}$ тел ведет вследствие непрерывности нормальной к поверхности раздела сред составляющей магнитной индукции к скачку нормальной составляющей напряженности магнитного поля, так как $H_n = \frac{1}{\mu_0} (B_n - M_n)$.

4. Граничные условия непрерывности составляющих векторов поля на поверхности раздела с различными свойствами сохраняют свой вид и при анизотропных средах. Однако условия, выражающие скачки составляющих векторов поля, изменяются.

Если тензоры $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ записать в виде

$$(\epsilon_1) = \begin{vmatrix} \epsilon_{m1} & \epsilon_{nt1} \\ \epsilon_{tm1} & \epsilon_{tt1} \end{vmatrix}, \quad (\epsilon_2) = \begin{vmatrix} \epsilon_{m2} & \epsilon_{nt2} \\ \epsilon_{tm2} & \epsilon_{tt2} \end{vmatrix},$$

то из условия $D_{n1} = D_{n2}$ следует выражение $\epsilon_{m1} E_{n1} = \epsilon_{m2} E_{n2} - (\epsilon_{nt1} - \epsilon_{nt2}) E_{t1}$, которое в частном случае, когда $\epsilon_{nt1} = \epsilon_{nt2}$, переходит в соотношение $\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_{m2}}{\epsilon_{m1}}$.

6. При наличии на поверхности раздела сред электрического заряда выражение $-D_{n1} \Delta s_1 + D_{n2} \Delta s_2 = 0$ (см. § 24.6) принимает вид $-D_{n1} \Delta s_1 + D_{n2} \Delta s_2 = \Delta q$, где Δq — заряд, охватываемый замкнутой поверхностью цилиндра. Учитывая, что $\Delta s_1 = \Delta s_2 = \Delta s$ и $\frac{\Delta q}{\Delta s} \approx \sigma$, из последнего выражения получаем условие $-D_{n1} + D_{n2} = \sigma$,

связывающее нормальные к поверхности раздела сред составляющие вектора смещения при наличии на ней поверхностного заряда плотностью σ .

7. Приближенное выражение $H_{t1}ab - H_{t2}cd \approx \oint_{abcd} \mathbf{H} d\mathbf{l}$ (рис. P23.1) следует прирав-

нять полному току i , охваченному контуром интегрирования и протекающему в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка. Тогда $H_{t1} - H_{t2} = \frac{i}{ab} = j$,

и, следовательно, касательная составляющая H_t напряженности магнитного поля претерпевает разрыв на поверхности с размещенным на ней слоем тока. При $\mu_2 = \infty$ имеем $H_{t2} = 0$.

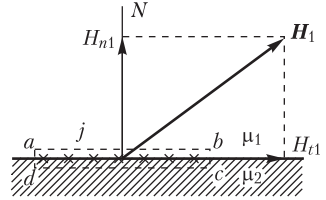


Рис. P23.1

8. В точках на границе двух сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 условие $B_{n1} = B_{n2}$ можно записать в виде $\mu_0(H_{n1} + M_{n1}) = \mu_0(H_{n2} + M_{n2})$, откуда вытекает соотношение $(H_{n1} - H_{n2}) = (-M_{n1} + M_{n2})$. Намагниченность воздуха равна нулю ($M_{n1} = 0$), так что получаем: $(H_{n1} - H_{n2}) = M_{n2}$, или $\mathbf{n}_2(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{n}_2\mathbf{M}$.

11. Положение точек поверхности цилиндра будем определять значением угла α (рис. P23.2). В точке A имеем $E_{ni} = E_i \sin \alpha = 100 \sin \alpha$, $E_{ti} = E \cos \alpha = 100 \cos \alpha$. В силу граничных условий на поверхности цилиндра в воздухе получаем $E_{ne} = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_e} E_{ni} = 200 \sin \alpha$, $E_{te} = E_{ti} = 100 \cos \alpha$,

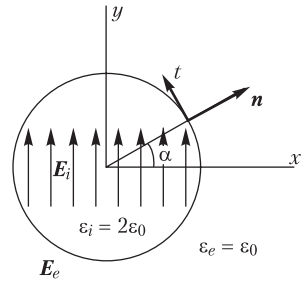


Рис. P23.2

$D_{ne} = 200 \epsilon_0 \sin \alpha$, $D_{te} = 100 \epsilon_0 \cos \alpha$.

В точках поверхности цилиндра в воздухе напряженность поля $E_e = \sqrt{E_{ne}^2 + E_{te}^2} = 10^2 \sqrt{4 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$ не остается постоянной, и, следовательно, оно не является однородным вблизи цилиндра.

12. Так как $H_{t1} = H_{y1}$, $H_{n1} = H_{x1}$, то $H_{y2} = H_{y1}$, $B_{x2} = B_{x1} = \mu_0 H_{x1}$. При совпадении главных осей анизотропии с осями x, y имеем

$$(\mu) = \begin{vmatrix} \mu_x & 0 \\ 0 & \mu_y \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} B_{x2} \\ B_{y2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_x & 0 \\ 0 & \mu_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_{x2} \\ H_{y2} \end{vmatrix},$$

откуда $B_{x2} = \mu_x H_{x2}$, $B_{y2} = \mu_y H_{y2}$, $H_{x2} = \frac{1}{\mu_x} B_{x2} = \frac{\mu_0}{\mu_x} H_{x1}$, $B_{y2} = \mu_y H_{y1}$, $\mathbf{B}_1 = i \mu_0 H_{x1} + j \mu_0 H_{y1}$, так что $\mathbf{B}_2 = i \mu_0 H_{x1} + j \mu_y H_{y1}$, $\mathbf{H}_2 = i \frac{\mu_0}{\mu_x} H_{x1} + j H_{y1}$.

При несовпадении главных осей анизотропии среды с осями x, y имеем

$$(\mu) = \begin{vmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} B_{x2} \\ B_{y2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_{x2} \\ H_{y2} \end{vmatrix},$$

откуда $B_{x2} = \mu_{xx} H_{x2} + \mu_{xy} H_{y2}$, $B_{y2} = \mu_{yx} H_{x2} + \mu_{yy} H_{y2}$. Отсюда находим

$$H_{x2} = \frac{1}{\mu_{xx}} B_{x2} - \frac{\mu_{xy}}{\mu_{xx}} H_{y2} = \frac{\mu_0}{\mu_{xx}} H_{x1} - \frac{\mu_{xy}}{\mu_{xx}} H_{y1}, B_{y2} = \mu_{yx} \frac{\mu_0}{\mu_{xx}} H_{x1} + \left(\mu_{yy} - \frac{\mu_{xy}}{\mu_{xx}} \mu_{yx} \right) H_{y1},$$

$$\mathbf{B}_1 = i \mu_0 H_{x1} + j \mu_0 H_{y1}, \mathbf{B}_2 = i \mu_0 H_{x1} + j \left[\mu_{yx} \frac{\mu_0}{\mu_{xx}} H_{x1} + \left(\mu_{yy} - \frac{\mu_{xy}}{\mu_{xx}} \cdot \mu_{yx} \right) H_{y1} \right],$$

$$\mathbf{H}_2 = i \left(\frac{\mu_0}{\mu_{xx}} H_{x1} - \frac{\mu_{xy}}{\mu_{xx}} H_{y1} \right) + j H_{y1}.$$

24.1. Потенциал электростатического поля

ВОПРОСЫ

1. Условно принято, что напряженность поля направлена в сторону от положительно заряженных тел, и что потенциал убывает в направлении линий напряженности поля. Этим условиям соответствует соотношение $\mathbf{E} = -\text{grad } U$.

9. Если полный заряд проводов линии равен нулю, то потенциал в бесконечно удаленной точке можно принять равным нулю, так как в этом случае на большом удалении от проводов он пропорционален функции r^{-n} , где r — расстояние от проводов до точки определения потенциала, n — положительное число. Если же полный заряд проводов отличен от нуля, то равным нулю можно принять потенциал только на конечном расстоянии от проводов, так как в этом случае потенциал пропорционален функции $\ln r$, которая неограниченно возрастает при $r \rightarrow \infty$.

10. Если мысленно удалить проводящее тело, сохранив уже в однородной среде с проницаемостью ϵ на поверхности s тела заряд, распределенный так же, как он был распределен на поверхности проводящего тела, то поле как внутри s , так и вне ее сохранится тем же. Внутри s поля не будет, а вне ее оно полностью определится зарядом плотностью σ . Поэтому при расчете потенциала по приведенной формуле среду можно рассматривать как однородную.

11. Если интегрирование выполнять только по поверхности заряженного тела, то результат будет неверным. Интегрирование следует выполнить также и по поверхности незаряженного тела, для чего необходимо знать плотность σ наведенного на его поверхности заряда.

12. Если понимать под величиной ρ плотность свободного заряда, то нельзя, так как среда неоднородна. Для получения потенциала необходимо кроме свободного знать распределение и связанного электрического заряда.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

3. Поле вектора $\mathbf{E}$ является потенциальным, если он удовлетворяет уравнению $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. Например, для варианта ∂ имеем $\text{rot}_x \mathbf{E} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -b \neq 0$, и, следовательно, поле в этом случае не является потенциальным.

4. Потенциал связан с напряженностью электрического поля соотношениями $U = -\int E_x dx + f_1(y, z) + C = -\int E_y dy + f_2(x, z) + C = -\int E_z dz + f_3(x, y) + C$. Применяя

их для решения варианта ∂ условия, находим $U = -E_2 y + f_2(z) + C = -E_3 z + f_3(y) + C$, откуда $U(x, y, z) = -E_2 y - E_3 z + C$.

5. Составляющие E_1, E_2, E_3 напряженности поля должны удовлетворять условиям $\text{rot}_x \mathbf{E} = \frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} = 0$, $\text{rot}_y \mathbf{E} = \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} = 0$, $\text{rot}_z \mathbf{E} = \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} = 0$. Для вари-

анта ∂ , в частности, имеем $\frac{\partial E_3}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial E_1}{\partial y} = 0$.

7. Используем формулу $U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p \cos \varphi}{r^2}$, определяющую потенциал поля диполя при $r \gg d$. Поле зарядов, изображенных на рис. P24.1, a , эквивалентно на больших расстояниях полю двух диполей $U_A = \frac{2p \cos \varphi}{4\pi\epsilon r^2}$.

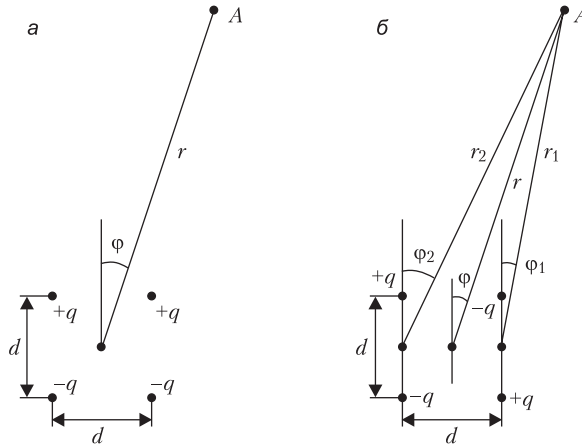


Рис. P24.1

Потенциал поля зарядов, изображенных на рис. P24.1, b и образующих квадруполь, равен

$$U_A = \frac{p}{4\pi\epsilon} \left(\frac{\cos \varphi_2}{r_2^2} - \frac{\cos \varphi_1}{r_1^2} \right) \cong \frac{p \cos \varphi}{4\pi\epsilon r^5} (r_1^3 - r_2^3).$$

Учитывая, что $r_1 \cong r - \frac{d}{2} \sin \varphi$, $r_2 \cong r + \frac{d}{2} \sin \varphi$, находим $r_1^3 - r_2^3 \cong 3r^2 d \sin \varphi$,

$$U_A = \frac{3p \sin 2\varphi}{8\pi\epsilon r^3}, E_r = \frac{9p \sin 2\varphi}{8\pi\epsilon r^4}, E_\varphi = -\frac{3p \cos 2\varphi}{4\pi\epsilon r^4}.$$

Таким образом, характер изменения потенциала на больших расстояниях от двух диполей (пропорционально r^{-2} или r^{-3}) определяется их взаимным расположением.

8. Потенциал на оси z (рис. P24.2) равен $U = \int_0^{2\pi} \frac{\tau R d\phi}{4\pi\epsilon\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{\tau R}{2\epsilon\sqrt{z^2 + R^2}}$, а напряженность поля $E_r = 0$, $E_\phi = 0$, $E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\tau Rz}{2\epsilon(z^2 + R^2)^{3/2}}$.

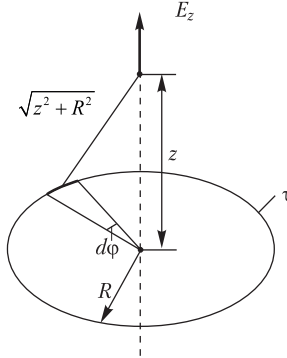


Рис. P24.2

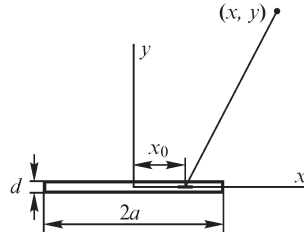


Рис. P24.3

9. Пластину рассматриваем как совокупность бесконечно длинных полосок шириной dx_0 каждая, потенциал поля которых (рис. P24.3) равен $dU = -\frac{\sigma dx_0}{2\pi\epsilon} \times \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}$. Интегрируя это выражение в пределах изменения x_0 от $-a$ до $+a$, находим

$$U(x, y) = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \left\{ x \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} + a \ln \{ [(x-a)^2 + y^2] [(x+a)^2 + y^2] \} - \right. \\ \left. - 4a + 2y \operatorname{arctg} \frac{2ay}{y^2 + x^2 - a^2} \right\}.$$

10. Обозначив в полярной системе координат координаты точки A , в которой определяем потенциал, как r , ϕ , а координаты n -й нити как $r_n = R$, $\alpha_n = (\pi/N) \times (2n - 1)$ (рис. P24.4), можем написать потенциал поля n -й заряженной нити в виде

$$U_n = -\frac{\tau_n}{4\pi\epsilon} \ln [r^2 + R^2 - 2rR \cos(\phi - \alpha_n)].$$

Пользуясь методом наложения, получаем в случае одноконтных зарядов нитей

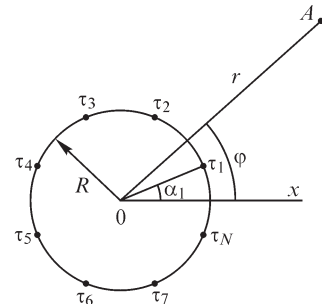


Рис. P24.4

$$U = \frac{\tau}{4\pi\epsilon} \ln \prod_{n=1}^N [r^2 + R^2 - 2rR \cos(\phi - \alpha_n)]$$

и при разноименных зарядах нитей

$$U = \frac{\tau}{4\pi\epsilon} \sum_{n=1}^N (-1)^n \ln[r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)]$$

или

$$U = \frac{\tau}{4\pi\epsilon} \ln \frac{\prod_{n=2,4,\dots} [r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)]}{\prod_{n=1,3,\dots} [r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)]}.$$

Выражения для расчета напряженности поля имеют вид при одноименных зарядах

$$E_{r_n} = -\frac{\partial U_n}{\partial r} = \frac{\tau_n}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{r - R\cos(\varphi - \alpha_n)}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)},$$

$$E_{\varphi_n} = -\frac{\partial U_n}{r\partial\varphi} = \frac{\tau_n}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{rR\sin(\varphi - \alpha_n)}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)},$$

$$E_r = \frac{\tau_n}{2\pi\epsilon} \sum_{n=1}^N \frac{r - R\cos(\varphi - \alpha_n)}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)}, \quad E_\varphi = \frac{\tau_n}{2\pi\epsilon} \sum_{n=1}^N \frac{rR\sin(\varphi - \alpha_n)}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)}$$

и при разноименных зарядах нитей.

$$E_r = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{r - R\cos(\varphi - \alpha_n)}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)},$$

$$E_\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{rR\sin(\varphi - \alpha_n)}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \alpha_n)}.$$

11. Используя формулу $U = \frac{dq}{4\pi\epsilon r}$ для потенциала поля точечного заряда, находим

$$U = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\tau dz}{4\pi\epsilon \sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon} \ln \frac{\sqrt{r^2 + (l/2)^2} + l/2}{\sqrt{r^2 + (l/2)^2} - l/2},$$

где r — расстояние от середины нити до точки расчета потенциала, z — координата, отсчитываемая от середины нити до отрезка dz (рис. P24.5).

Составляющие напряженности поля равны

$$E_r = \frac{\tau l}{4\pi\epsilon r \sqrt{r^2 + (l/2)^2}}, \quad E_\varphi = 0.$$

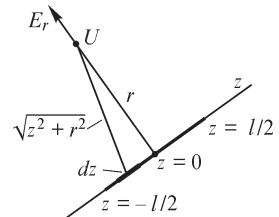


Рис. P24.5

24.2. Уравнения Лапласа и Пуассона

ВОПРОСЫ

2. Имеют смысл выражения: $\text{div grad } U$, $\text{grad div grad } U$.

4. Для получения единственного решения уравнения Лапласа следует задать краевые условия для потенциала на поверхностях проводников и на поверхностях, ограничивающих расчетную область. Если они однородные ($U|_S = 0$),

то решением уравнения Лапласа является функция $U = 0$. В общем случае имеем $U(x, y, z) \neq 0$.

5. Такое поле описывается уравнением Лапласа, так как объемная плотность заряда на поверхности тела обращается в бесконечность и уравнение Пуассона в этих точках записано быть не может.

6. Потенциал — непрерывная функция, так как в противном случае имелись бы точки с неопределенной напряженностью электрического поля. Производные потенциала могут иметь разрывы, так как нормальная составляющая напряженности поля $E_n = -\frac{\partial U}{\partial n}$ изменяется скачком как на поверхности раздела сред с различными диэлектрическими свойствами, так и на заряженной поверхности в однородной среде.

7. Потенциал постоянен внутри поверхности и в общем случае изменяется вне ее.

10. Расчет электростатического поля упрощается, если подлежащее решению дифференциальное уравнение записано относительно скалярной функции (потенциала), а не векторной. В последнем случае его следует решать для каждой из проекций вектора напряженности поля на оси координат.

При решении задач электростатики часто заданы потенциалы тел, что дает возможность записать краевые условия на поверхностях тел в форме $U = \text{const}$, удобной при решении уравнения Лапласа относительно потенциала.

11. Функция $\frac{\partial U}{\partial n}$ связана с поверхностной плотностью заряда на поверхности

проводящего тела соотношением $\sigma = -\varepsilon \frac{\partial U}{\partial n}$. Поэтому, если тело не заряжено, то

можно записать условие $\oint_s \frac{\partial U}{\partial n} ds = 0$, а при $q \neq 0$, когда тело заряжено, — условие

$$-\varepsilon \oint_s \frac{\partial U}{\partial n} ds = q.$$

12. При заданном распределении заряда на поверхностях проводников потенциал можно рассчитать, используя решение уравнения Пуассона $U = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \oint_s \frac{\sigma ds}{r}$, где

s — поверхность заряженных проводников. При заданных потенциалах проводников необходимо решать уравнение Лапласа, поэтому в первом случае получить решение проще.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

1. Примем указанное на рис. P24.6 направление осей координат. Потенциал изменяется только вдоль координаты y , так что уравнение Лапласа принимает вид $\frac{d^2 U}{dy^2} = 0$.

После интегрирования находим $U(y) = C_1 y + C_2$. Посто-

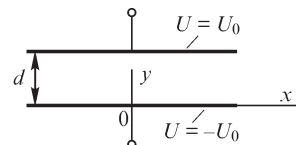


Рис. P24.6

янные C_1, C_2 определяем из условий: $U = -U_0$ при $y = 0$, $U = U_0$ при $y = d$: $-U_0 = C_2$, $U_0 = C_1 d - U_0$.

Таким образом, $U(y) = d^{-1} 2U_0 y - U_0$.

В пространстве между обкладками цилиндрического конденсатора потенциал удовлетворяет уравнению $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = 0$, решение которого имеет вид $U(r) = C_1 \ln r + C_2$. Используя условия $U = -U_0$ при $r = R$ и $U = U_0$ при $r = R + d$, записываем уравнения $-U_0 = C_1 \ln R + C_2$, $U_0 = C_1 \ln (R + d) + C_2$, решая которые, находим постоянные C_1, C_2 :

$$C_1 = 2U_0 \ln^{-1} \frac{R+d}{R}, \quad C_2 = -U_0 \frac{\ln(R+d) + \ln R}{\ln(R+d) - \ln R}.$$

Искомый потенциал

$$U(r) = \frac{2U_0}{\ln(R+d) - \ln R} \ln r - U_0 \frac{\ln(R+d) + \ln R}{\ln(R+d) - \ln R}.$$

2. Потенциал между электродами удовлетворяет уравнению Пуассона $\frac{d^2 U}{dy^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$,

интегрирование которого приводит к выражению $U(y) = -\frac{\rho}{2\epsilon} y^2 + C_1 y + C_2$. Используя краевые условия, получаем

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{1}{d} \left(U_0 + \frac{\rho}{2\epsilon_0} d^2 \right), \quad U(y) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} y^2 + \frac{1}{d} \left(U_0 + \frac{\rho}{2\epsilon_0} d^2 \right) y.$$

3. Пространство между катодом и анодом разбиваем на две области: в первой из них, где $R_k \leq r \leq R_0$, имеем $\rho \neq 0$, во второй, где $R_0 \leq r \leq R_a$, имеем $\rho = 0$. В этих областях потенциал удовлетворяет уравнениям

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU_1}{dr} \right) = -\epsilon_0^{-1} \rho, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU_2}{dr} \right) = 0,$$

интегрирование которых приводит к выражениям

$$U_1(r) = -(4\epsilon_0)^{-1} \rho r^2 + C_1 \ln r + C_2, \quad U_2(r) = D_1 \ln r + D_2.$$

Для определения постоянных C_1, C_2, D_1, D_2 используем краевые условия $U_1 = 0$ при $r = R_k$, $U_2 = U_0$ при $r = R_a$, а также граничные условия $U_1 = U_2$ и $\frac{\partial U_1}{\partial r} = \frac{\partial U_2}{\partial r}$ при $r = R_0$:

$$\begin{aligned} -(4\epsilon_0)^{-1} \rho + C_1 \ln R_k + C_2 &= 0, \quad D_1 \ln R_a + D_2 = U_0, \\ -(4\epsilon_0)^{-1} \rho + C_1 \ln R_0 + C_2 &= D_1 \ln R_0 + D_2, \quad -(2\epsilon_0)^{-1} \rho R_0 + C_1 = D_1. \end{aligned}$$

5. В области 1, где $0 < x < d$, потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона $\frac{d^2 U}{dx^2} = -\varepsilon_0^{-1} \rho$, а в области 2, где $d < x < 2d$, — уравнению Лапласа $\frac{d^2 U}{dx^2} = 0$. При их интегрировании решение в каждой из областей содержит по две постоянные:

$$U_1(x) = f(x) + C_1 x + C_2, \quad U_2(x) = C_3 x + C_4.$$

Учитывая, что при $x = 0$ потенциал $U_1(0) = 0$, получаем $C_2 = 0$. При определении постоянных C_1, C_3, C_4 начало координат для области 2 целесообразно принять на границе областей (рис. P24.7), т. е. в точке 0_2 , а для области 1 — в точке 0_1 .

Уравнения, связывающие постоянные, записываем, используя условие непрерывности потенциала и его производной в точках границы областей при $x_1 = d, x_2 = 0$, а также краевое условие $U_2 = 0$ при $x_2 = d$: $C_3 d + C_4 = 0, f(d) + C_1 d = C_4, f'(d) + C_1 = C_3$.

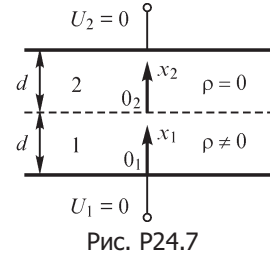


Рис. P24.7

Решая их, находим:

$$C_1 = -0,5 d^{-1} [f(d) + df'(d)], \quad C_3 = 0,5 d^{-1} [df'(d) - f(d)], \quad C_4 = -C_3 d.$$

Для записи выражений $U_1(x)$ и $U_2(x)$ следует рассчитать функции

$$f'(x) = -\varepsilon_0^{-1} \int \rho(x) dx, \quad f(x) = -\iint \rho(x) dx dx,$$

их значения при $x = d$, постоянные C_1, C_3, C_4 . Например, при $\rho(x) = \rho_0 ax$ получаем

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(2\varepsilon_0)^{-1} \rho_0 ax^2, \quad f(x) = -(6\varepsilon_0)^{-1} \rho_0 ax^3, \\ f'(d) &= -(2\varepsilon_0)^{-1} \rho_0 ad^2, \quad f(d) = -(6\varepsilon_0)^{-1} \rho_0 ad^3. \end{aligned}$$

6. Плотность заряда можно рассчитать с помощью выражения $\rho = -2\varepsilon_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} U$. Получаем, например, для варианта в $\rho = -4a\varepsilon_0$.

9. Так как на цилиндрической поверхности потенциал изменяется по закону $U = U_m \sin k\alpha$, то можно предположить, что во всем пространстве он может быть представлен в виде $U(r, \alpha) = U(r) \sin k\alpha$, т. е. он периодичен по углу α . Подставляя $U(r, \alpha)$ в уравнение Лапласа $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} \right) = 0$, получаем уравнение

относительно величины $U(r)$: $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU(r)}{dr} \right) - \frac{k^2}{r^2} U(r) = 0$, которое имеет реше-

нием функцию $U(r) = C_1 r^k + C_2 r^{-k}$, в чем можно убедиться его непосредственной подстановкой в уравнение.

На оси z ($r = 0$) потенциал имеет конечное значение, равное нулю, однако решение $U(r)$ при любом не равном нулю значении постоянной C_2 обращается в бесконечность, что означает, что $C_2 = 0$, и, таким образом, внутри цилиндрической поверхности радиусом R получаем $U_i(r, \alpha) = C_1 r^k \sin k\alpha$. Постоянную C_1 опреде-

ляем с помощью условия $U(R, \alpha) = U_m \sin k\alpha$: $C_1 = U_m R^{-k}$. Поэтому искомое решение при $r \leq R$ записываем в виде $U_i(r, \alpha) = U_m \left(\frac{r}{R}\right)^k \sin k\alpha$.

При $r \rightarrow \infty$ получаем $U \rightarrow 0$, так как потенциал на поверхности $r = R$ в силу заданной зависимости $U(R, \alpha) = U_m \sin k\alpha$ является знакопеременной функцией. Поэтому во внешней области ($r \geq R$) решение следует записать в виде $U_1(r, \alpha) = C_2 r^{-k} \sin k\alpha$, так как только при $C_1 = 0$ имеем $U(r, \alpha) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Постоянную C_2 определяем из условия $U(R, \alpha) = U_m \sin k\alpha = C_2 R^{-k} \sin k\alpha$: $C_2 = U_m R^k$.

Таким образом, при $r > R$ получаем $U_e(r, \alpha) = U_m \left(\frac{R}{r}\right)^k \sin k\alpha$.

Для определения характера поля внутри цилиндрической поверхности $r \leq R$ считаем $E = \sqrt{E_r^2 + E_\alpha^2}$: $E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{U_m}{R} k \left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} \sin k\alpha$, $E_\alpha = -\frac{U_m}{R} k \left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} \cos k\alpha$,

$$E = \frac{U_m}{R} \left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} k \sqrt{\sin^2 k\alpha + \cos^2 k\alpha} = \frac{U_m}{R} \left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} k.$$

При $k = 1$ получаем $E = \frac{U_m}{R}$ и, следовательно, приходим к выводу, что поле при $r < R$ однородно ($E_r/E_\alpha = \operatorname{tg} \alpha$).

10. В какой бы системе координат ни были записаны уравнения Лапласа или Пуассона, при их интегрировании появляются две подлежащие определению постоянные. Для нахождения постоянных и выражения для потенциала его следует приравнять к заданным значениям на поверхностях, ограничивающих область расчета. Чем проще удастся записать уравнения поверхностей, тем легче найти постоянные. Поэтому систему координат выбирают так, чтобы граничные поверхности были координатными в выбранной системе координат. В цилиндрическом конденсаторе, например, уравнения обкладок имеют в полярной системе координат вид $R_1 = \text{const}$, $R_2 = \text{const}$, тогда как в прямоугольной системе они сложнее: $x^2 + y^2 = R_1^2$, $x^2 + y^2 = R_2^2$. Поэтому уравнение Лапласа в этом случае лучше записать в полярной системе координат.

12. Уравнение Лапласа в полости тела следует решать при граничном условии $U = U_0 = \text{const}$ на внутренней поверхности тела. Решением уравнения является функция $U = U_0$, напряженность поля в полости обращается в нуль.

13. Наведенные на поверхности цилиндра заряды должны быть такими, чтобы создаваемое ими поле внутри цилиндра было однородным и направленным навстречу полю напряженностью E_0 . В этом случае напряженность результирующего поля внутри цилиндра обращается в нуль. Для того чтобы внутри цилиндрической поверхности поле было однородным, необходимо, чтобы потенциал на ней изменялся по закону (см. упр. 9) $U(R, \alpha) = U_m \sin \alpha$. Так как при этом $E_i = R^{-1} U_m$, то из условия $E_0 - E_i = E_0 - R^{-1} U_m = 0$ находим $U_m = -E_0 R$. Нормальная

к поверхности составляющая напряженности поля вне цилиндра равна $E_r(R) = E_{0r} - R^{-1}U_m \sin \alpha$. Учитывая, что $E_{0r} = E_0 \sin \alpha$, получаем $E_r(R) = E_0 \sin \alpha + E_0 \sin \alpha = 2E_0 \sin \alpha$ и $\sigma = \epsilon_0 E_r = 2\epsilon_0 E_0 \sin \alpha = 1,77 \cdot 10^{-9} \sin \alpha$ Кл/м².

14. Так как электростатическое поле в проводящей среде отсутствует, то в проводящей пластине $E = 0$, а ее потенциал сохраняет некоторое постоянное значение U_2 . Решение уравнения Лапласа $\frac{d^2 U}{dy^2} = 0$ в областях 1, 3 (рис. P24.8)

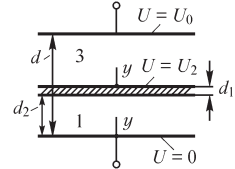


Рис. P24.8

можно записать в виде $U_1(y) = C_1 y + C_2$, $U_3(y) = C_3 y + C_4$.

Используя заданные значения потенциалов $U = 0$, $U = U_0$, а также условие постоянства потенциала U_2 пластины, получаем уравнения: $0 = C_2$, $U_2 = C_1 d_2 + C_2$, $U_2 = C_4$, $U_0 = C_3 (d - d_1 - d_2) + C_4$. Число неизвестных (C_1, C_2, C_3, C_4, U_2) превышает число уравнений, в связи с чем требуется использовать еще одно условие, которым является условие равенства нулю заряда пластины, означающее в соответствии с теоремой Гаусса равенство нулю потока вектора напряженности электрического поля сквозь охватывающую пластину поверхность. Вследствие неизменности поля по осям, параллельным обкладкам и поверхностям пластины, это условие означает равенство напряженности поля с обеих сторон пластины: $-C_1 = -C_3$. Решая уравнения, находим: $C_1 = C_3 = \frac{U_0}{d - d_1}$, $C_4 = \frac{U_0 d_2}{d - d_1}$, $U_1(y) = \frac{U_0}{d - d_1} y$, $E_1 = -\frac{U_0}{d - d_1}$, $U_3(y) = \frac{U_0}{d - d_1} y + \frac{U_0 d_2}{d - d_1}$, $E_3 = -\frac{U_0}{d - d_1}$, $U_2(y) = \frac{U_0 d_2}{d - d_1}$, $E_2 = 0$.

Таким образом, напряженность поля в областях 1, 3 имеет одно и то же значение независимо от места расположения пластины.

15. В отличие от предыдущей задачи следует решать уравнение Лапласа в полярной системе координат:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = 0: U_1(r) = C_1 \ln r + C_2, U_2 = \text{const}, U_3(r) = C_3 \ln r + C_4.$$

Уравнения, позволяющие найти постоянные и потенциал U_2 , имеют вид:

$$0 = C_1 \ln R_1 + C_2, U_2 = C_1 \ln (R_1 + d_2) + C_2,$$

$$U_2 = C_3 \ln (R_1 + d_1 + d_2) + C_4, U_0 = C_3 \ln R_2 + C_4.$$

Условие равенства входящего в проводящий цилиндр и выходящего из него потока вектора напряженности электрического поля позволяет записать уравнение $2\pi (R_1 + d_2) \frac{C_1}{R_1 + d_2} = 2\pi (R_1 + d_1 + d_2) \frac{C_3}{R_1 + d_1 + d_2}$, из которого следует соотношение $C_1 = C_3$. Решив уравнения относительно неизвестных $C_1 \dots C_4$, получаем величины

$$U_1(r) = \frac{U_0 \ln r}{\ln \{(R_1 + d_2)R_2[R_1(R_1 + d_1 + d_2)]^{-1}\}} - \frac{\ln R_1}{\ln \{R_2(R_1 + d_2)[R_1(R_1 + d_1 + d_2)]^{-1}\}},$$

$$E_1(r) = \frac{-U_0}{r \ln \{(R_1 + d_2)R_2[R_1(R_1 + d_1 + d_2)]^{-1}\}}.$$

16. Учитывая соотношение $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, справедливое в диэлектрике, проницаемость которого является функцией координат, записываем выражение $\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \rho$, или $\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} U = -\rho$. В прямоугольной системе координат это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -\rho.$$

Уравнение $\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} U = -\rho$ имеет смысл не при любой функции $\varepsilon(x, y, z)$. Если она разрывна, то в точках разрыва производные $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}$ не существуют и дифференциальное уравнение в этих точках рассматриваться не может. К таким точкам относятся точки поверхностей раздела однородных сред с различными свойствами.

24.3. Плоскопараллельное электростатическое поле

ВОПРОСЫ

6. Удовлетворяющие уравнению Лапласа функции совпадают, если они имеют одинаковые значения на границе области. Однако граничные условия для потенциала и функции потока различны. Действительно, если на поверхности задано условие $U = \text{const}$, то в общем случае на ней $V \neq \text{const}$, и наоборот, если линия границы области является линией напряженности поля, где $V = \text{const}$, то на ней $U \neq \text{const}$.

7. На поверхностях проводников обычно задан потенциал либо его нормальная к ним производная, а не функция потока, которая сама подлежит расчету. На границах области функция потока, как правило, неизвестна. Кроме того, потенциал, в отличие от функции потока, можно применить для анализа не только двумерных, но и трехмерных полей.

24.4. Метод комплексного потенциала

ВОПРОСЫ

2. Функцию следует записать в виде $\zeta = \xi + j\eta$, выделив ее действительную и мнимую части. Уравнение $\eta = \eta(x, y)$ определяет линию, на которой потенциал электростатического поля сохраняет постоянное значение. Поэтому уравнение линии, определяющей контур сечения проводника, $\eta(x, y) = \text{const}$.

3. Плотность заряда на поверхности проводника равна $\sigma = \varepsilon_0 E_n = -\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial n}$. Так как

на поверхности проводника $E_n = E(E_\tau = 0)$, то $\sigma = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$.

5. Поле в неоднородной среде не удовлетворяет уравнению Лапласа, тогда как действительная и мнимая части аналитических регулярных функций комплексного переменного удовлетворяют ему, и, следовательно, не могут описывать поле в неоднородной среде.

12. При конформном (т. е. сохраняющем углы между кривыми) отображении области плоскости z в область плоскости ζ функцией $\zeta = f(z)$ могут изменяться геометрические характеристики тел, но не их заряды и потенциалы. Поэтому емкость тел сохраняется неизменной.

15. Поток сохраняется неизменным, так как заряд провода не меняется.

16. Так как напряженность поля при конформном отображении области изменяется, то и сила взаимодействия проводов, найденная в области ζ , будет отличаться от действительной силы во столько же раз, во сколько различаются напряженности E_z и E_ζ поля в точках расположения проводов.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

1. В однородном электрическом поле величины E_x, E_y не зависят от координат x, y . Поэтому, пользуясь выражениями $E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$, можем за-

писать: $U = -E_x x - E_y y + U_0, V = -E_y x + E_x y + V_0$, так что комплексный потенциал поля $\zeta = V + jU = (-E_y x + E_x y) + j(-E_x x - E_y y) + V_0 + jU_0$.

4. Записать единое выражение для комплексного потенциала во всей области, содержащей несколько однородных сред, сложно ввиду необходимости нахождения такой функции $\zeta(z)$, которая имела бы непрерывную мнимую часть и разрывную ее производную по нормали к поверхности раздела сред. Подбор нескольких функций $\zeta(z)$, каждая из которых описывала бы поле в подобластях, содержащих однородные среды, сложен, так как эти функции должны удовлетворять граничным условиям вида $U_i = U_{i+1}, \varepsilon_i \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_i = \varepsilon_{i+1} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_{i+1}$, а не условиям

вида $U = f_1(x, y)$ либо $V = f_2(x, y)$, где $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ — заданные функции.

6. Искомый комплексный потенциал запишем, используя метод наложения, в виде $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$, где $\zeta_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon} j \ln z + C$ — комплексный потенциал уединенного

заряженного провода круглого сечения, а $\zeta_2 = Az + B$ — комплексный потенциал однородного электрического поля. Выбор входящих в выражение для комплексного потенциала $\zeta = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon} j \ln z + Az + C$ постоянных A, C определяет положение

линий $V = 0$ и $U = 0$.

7. Расположим провода на оси x на одинаковом расстоянии $0,5d$ по обе стороны от начала координат. Пользуясь методом наложения, находим

$$a) \zeta(z) = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln\left(z^2 - \frac{d^2}{4}\right) + C \text{ и } б) \zeta(z) = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{z-0,5d}{z+0,5d} + C.$$

8. Пусть провода имеют координаты $z_n = Re^{j\frac{2\pi}{N}n}$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, N — число проводов. Тогда в точке с координатой z комплексный потенциал можно рассчиты-

тать с помощью выражения $\zeta(z) = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} j \sum_{n=0}^{N-1} \ln\left(z - Re^{j\frac{2\pi}{N}n}\right) + C.$

9. Будем считать, что один из проводов с зарядом, линейная плотность которого $\tau > 0$, имеет координату $x = R$. Комплексный потенциал N проводов с положи-

тельными зарядами равен $\zeta_1(z) = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} j \sum_{n=0}^{N-1} \ln\left(z - Re^{j\frac{2\pi}{N}n}\right) + C_1$, а с отрицательны-

ми зарядами — $\zeta_2(z) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} j \sum_{n=0}^{N-1} \ln\left(z - Re^{j\left(\frac{\pi}{N} + \frac{2\pi}{N}n\right)}\right) + C_2$. В итоге получаем

$$\zeta(z) = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} j \sum_{n=0}^{N-1} \ln \frac{z - Re^{j\frac{2\pi}{N}n}}{z - Re^{j\left(\frac{\pi}{N} + \frac{2\pi}{N}n\right)}} + C.$$

10. При расположении проводов согласно варианту a комплексный потенциал равен

$$\zeta = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} j \ln(z - jh) + \frac{\tau}{2\pi\epsilon} j \ln(z + jh) + C,$$

$$E_x = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} x \left[\frac{1}{x^2 + (y - h)^2} - \frac{1}{x^2 + (y + h)^2} \right],$$

$$E_y = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \left[\frac{y - h}{x^2 + (y - h)^2} - \frac{y + h}{x^2 + (y + h)^2} \right].$$

При расположении проводов согласно варианту $б$ находим

$$\zeta = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} j \ln(z - d) + \frac{\tau}{2\pi\epsilon} j \ln(z + d) + C,$$

$$E_x = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \left[\frac{x - d}{(x - d)^2 + y^2} - \frac{x + d}{(x + d)^2 + y^2} \right],$$

$$E_y = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} y \left[\frac{1}{(x - d)^2 + y^2} - \frac{1}{(x + d)^2 + y^2} \right].$$

11. Приближенное значение радиуса провода в плоскости ω равно

$$R_{\omega} = R \left| \frac{d\omega}{dz} \right|_{z=z_0} = R \frac{\pi}{\alpha} r_0^{(\pi/\alpha)-1}.$$

При $\alpha = \pi/2$ он, в частности, возрастает в $2r_0$ раз.

Ближайшая к началу координат точка провода имеет в плоскости ω координату $(r_0 - R)^{\pi/\alpha} e^{j\varphi_0 \pi/\alpha}$, а наиболее удаленная $(r_0 + R)^{\pi/\alpha} e^{j\varphi_0 \pi/\alpha}$, так что расстояния от них до оси провода составляют $r_1 = r_0^{\pi/\alpha} - (r_0 - R)^{\pi/\alpha}$, $r_2 = (r_0 + R)^{\pi/\alpha} - r_0^{\pi/\alpha}$.

Таким образом, погрешность равна

$$\Delta R_1 = R_{\omega} - r_1 = R \frac{\pi}{\alpha} r_0^{(\pi/\alpha)-1} - r_0^{\pi/\alpha} + (r_0 - R)^{\pi/\alpha},$$

$$\Delta R_2 = R_{\omega} - r_2 = R \frac{\pi}{\alpha} r_0^{(\pi/\alpha)-1} + r_0^{\pi/\alpha} - (r_0 + R)^{\pi/\alpha}.$$

В частности, при $\alpha = \pi/2$ она равна $|\Delta R_1| = |\Delta R_2| = R^2$.

24.5. Электростатическое поле проводов круглого сечения

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

2. Наибольшее значение напряженности поля на поверхности цилиндра меньшего радиуса R_1 будет в точке A_1 . Наибольшее значение напряженности поля на поверхности цилиндра большего радиуса — в точке A_2 . Наименьшие значения напряженности поля — в точках на противоположных сторонах цилиндров. Заменим цилиндры линейными проводами, совпадающими с электрическими осями цилиндров, и для условий рис. В24.3 используем выражения (см. § 24.12)

$$E_{A1} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1 - (h_1 - b)} + \frac{1}{R_2 - (h_2 - b) + d} \right],$$

$$E_{A2} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_2 - (h_2 - b)} + \frac{1}{R_1 - (h_1 - b) + d} \right].$$

Подставляя заданные численные значения, находим (рис. В24.3): $h_1 = \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D} =$

$$= 2,75 \text{ см}, h_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D} = 3,25 \text{ см}, b = \sqrt{h_1^2 - R_1^2} \cong 2,56 \text{ см}, E_{A1} = 2640 \text{ В/м}, E_{A2} = 1846 \text{ В/м}.$$

3. Искомое напряжение между цилиндрами (см. § 24.12) $U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln(k_{\max}/k_{\min})$

можем найти из условия (см. рис. В24.3):

$$E_{A1} = E_{\text{доп}} = \frac{U}{\ln(k_{\max}/k_{\min})} \left[\frac{1}{R_1 - (h_1 - b)} + \frac{1}{R_2 - (h_2 - b) + d} \right],$$

$$U = E_{\text{доп}} \left(\ln \frac{k_{\text{max}}}{k_{\text{min}}} \right) \left[\frac{1}{R_1 - (h_1 - b)} + \frac{1}{R_2 - (h_2 - b) + d} \right]^{-1}.$$

Подставляя численные значения, получаем: $k_{\text{max}} = 5,3$, $k_{\text{min}} = 0,3$, $U \cong 5,6 \cdot 10^4$ В.

24.6. Картина электростатического поля

ВОПРОСЫ

1. Картина поля построена правильно только в случае a , когда ячейки сетки образуют подобные четырехугольники.
4. В силу скачкообразного изменения напряженности поля на поверхности тела при переходе через нее плотность линий поля изменяется скачком. В каждой из областей, как внутренней области тела, так и внешней, картину поля можно построить правильно, однако в этих областях ячейки сетки не будут подобными.

24.7. Метод интегральных уравнений

ВОПРОСЫ

1. Объемная плотность вторичных источников обращается в бесконечность в точках поверхностей раздела сред с различными диэлектрическими проницаемостями. Для сохранения условия $\epsilon_i E_{ni} = \epsilon_e E_{ne}$ при переходе к однородной среде на поверхности следует разместить простой слой электрических зарядов плотностью $\sigma_{\text{вт}}$.
2. Не сохраняется, так как вследствие непрерывности величины E_t в однородной среде ($E_{ti} = E_{te}$) непрерывной будет и величина D_t : $D_{ti} = \epsilon E_{ti} = D_{te} = \epsilon E_{te}$.
3. Можно, так как при переходе через двойной слой электрических зарядов имеет место скачок величины E_t и, следовательно, D_t . Аналогично уравнению для величины $\sigma_{\text{вт}}$ можно получить интегральное уравнение для момента двойного слоя электрических зарядов, если за исходное принять уравнение $E_{ti} = E_{te}$ вместо уравнения $D_{ni} = D_{ne}$. Следует иметь в виду, что в отличие от плотности простого слоя зарядов момент двойного слоя является векторной величиной.
4. При равном нулю полном заряде q тела число входящих силовых линий поля равно числу выходящих линий, в связи с чем после замены среды на однородную должно выполняться условие $\oint_S \sigma_{\text{вт}} ds = 0$, где s — поверхность тела.

24.8. Метод зеркальных изображений

ВОПРОСЫ

5. При нецелом n не удастся разместить провода в однородной среде таким образом, чтобы на сторонах угла α потенциал сохранял постоянное значение. При $\alpha \neq \pi/n$ можно применить метод конформных отображений. Функция $\omega = z^{\pi/\alpha}$ отображает внутреннюю часть двугранного угла плоскости z в верхнюю полуплоскость области ω .

7. При переходе к однородной среде условие $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ на плоскости сохранится, если знак зеркально изображенного заряда будет тем же, что и знак исходного заряда провода.

8. Заданные граничные условия могут быть выполнены в однородной среде при размещении заряда плотностью $-\tau$ во 2-м и 3-м квадрантах, а также заряда плотностью $+\tau$ в 4-м квадранте плоскости.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Если принять потенциал точек поверхности земли равным нулю, то поле заряженного провода в воздухе будет таким же, как и поле двух разноименно заряженных проводов, расположенных симметрично относительно поверхности земли.

Так как потенциал провода можно рассчитать по формуле

$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$, где $r_2 = b + h - R$, $r_1 = b - h + R$ (рис. P24.9), то

линейная плотность заряда равна $\tau = 2\pi\epsilon U \left[\ln \frac{b+h-R}{b-h+R} \right]^{-1}$ и напряженность поля на поверхности земли

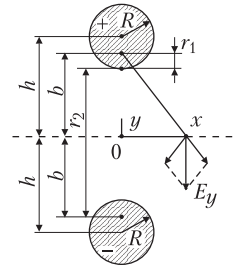


Рис. P24.9

$$E_y(x) = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon\sqrt{b^2+x^2}} \frac{2b}{\sqrt{b^2+x^2}} = -\frac{\tau b}{\pi\epsilon(b^2+x^2)}.$$

Допущение о бесконечно малом сечении провода означает, что электрическая ось провода совпадает с геометрической, так что $E_{y1}(x) = -\frac{\tau h}{\pi\epsilon(h^2+x^2)}$.

Погрешность расчета наибольшего значения напряженности поля (при $x = 0$) составляет

$$\delta = \frac{E_y - E_{y1}}{E_y} 100\% = \left[1 - \sqrt{1 - (R/h)^2} \right] 100\%,$$

откуда получаем, что при $h/R \geq 7$ погрешность $\delta \leq 1\%$.

Плотность заряда на поверхности земли можно рассчитать с помощью выражения

$$\sigma = \epsilon E_y(x) = -\frac{\tau b}{\pi(b^2+x^2)} \text{ или } \sigma(x) = -\frac{2\epsilon b U}{(b^2+x^2) \ln[(b+h-R)(b-h+R)^{-1}]}.$$

Индукцированный на поверхности земли заряд равен взятому с обратным знаком заряду провода, или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) dx = -\frac{\tau b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{b^2+x^2} = -\tau.$$

2. Сила, действующая на отрезок провода длиной 1 м с зарядом линейной плотностью τ со стороны зеркально изображенного заряда плотностью $\tau_1 = -\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_0}{\varepsilon_i + \varepsilon_0} \tau$ равна $f = \tau E = -\tau^2 \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_0}{\varepsilon_i + \varepsilon_0} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 h}$. Ее экстремальные значения равны $\mp \frac{\tau^2}{4\pi\varepsilon_0 h}$ при $\varepsilon_i = \infty$ и $\varepsilon_i = 0$ соответственно. Подставляя численные значения, получаем $f = \mp 1,8 \cdot 10^{-8}$ Н.

24.9. Метод разделения переменных

УПРАЖНЕНИЯ

1. При изменении граничных условий изменяются как собственные числа, принимающие значения $\pi n/b$, $n = 1, 2, \dots$, так и собственные функции, которые становятся равными $\text{sh}(\pi n x/b)$, $\sin(\pi n y/b)$.

2. Решение $U(x, y)$ не является единственным, так как потенциал $U_1(x, y) = U(x, y) + C$, где C — произвольная постоянная, также является решением задачи. В соответствии с теоремой Гаусса поток вектора напряженности электрического поля, проходящий сквозь границу области, равен величине q/ε , где q — заряд, находящийся внутри области. Поэтому функция $\frac{\partial U}{\partial n} = f$ должна удовлетворять интегральному соотношению $\oint_l \frac{\partial U}{\partial n} dl = \frac{\tau}{\varepsilon}$. При отсутствии заряда внутри области оно переходит в соотношение $\oint_l f dl = 0$.

3. Представим искомый потенциал внутри области в виде $U(x, y) = U_1 + U_2$, где U_1 — потенциал, рассчитываемый методом разделения переменных при граничных условиях $U_1 = 0$ на двух сторонах области, например, при $x = 0$ и $x = a$ и заданных граничных условиях на сторонах $y = 0$ и $y = b$, а U_2 — потенциал, рассчитываемый при граничном условии $U_2 = 0$ на сторонах области $y = 0$ и $y = b$ и заданных граничных условиях на двух других сторонах.

4. Потенциал $U(x, y)$ внутри области представим в виде суммы $U_1 + U_2$, где функцию U_1 рассчитываем в предположении, что провод расположен в однородной безграничной среде: $U_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{1}{r}$. Функцию U_2 находим методом разделения переменных при неоднородных граничных условиях на сторонах области, задаваемых в виде $U_2 = -U_1$ (см. упр. 3).

5. Разыскивая решение в виде $U(r, \alpha) = U_1(r)U_2(\alpha) = U_1(r) \sin k\alpha$ и подставляя его в уравнение Лапласа, после несложных преобразований находим уравнение $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dU_1}{dr} \right) - \frac{k^2}{r} U_1 = 0$, решение которого было найдено ранее (см. § 23.2, упр. 9).

24.10. Методы сеток и конечных элементов

ВОПРОСЫ

5. Величина $\oint_s U \varepsilon \frac{\partial U}{\partial n} ds$ пропорциональна энергии электрического поля зарядов,

распределенных с поверхностной плотностью $\sigma = -\varepsilon \frac{\partial U}{\partial n}$ на поверхности s . Поэтому при заданной на границе области функции $f = \frac{\partial U}{\partial n}$ интеграл $\oint_s U \frac{\partial U}{\partial n} ds$ можно

трактовать как величину, пропорциональную энергии поля создающих его источников.

6. В прямоугольных координатах полином второго порядка $U(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2$ имеет шесть коэффициентов $\alpha_0 \div \alpha_5$, для определения которых необходимо, чтобы треугольный элемент содержал шесть узлов, которые располагают по три узла на каждую из сторон элемента. При этом три узла лежат в вершинах элемента.

7. Так как число узлов элемента должно быть равным количеству коэффициентов полинома, принятого для описания потенциала, то при а) $U(x, y, z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$ число узлов составляет четыре, причем их размещают в вершинах тетраэдра, а при б) $U(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 z^2 + \alpha_7 xy + \alpha_8 xz + \alpha_9 yz$ узлы, число которых составляет десять, располагают в четырех вершинах и на шести ребрах тетраэдра.

8. При линейной интерполяции потенциала на стороне, общей для двух треугольных элементов, потенциал изменяется по одному и тому же закону, так как потенциалы вершин элементов имеют одинаковые значения для соседних элементов. Однако вследствие скачка нормальных к общей стороне элементов составляющих напряженности поля модуль напряженности поля претерпевает разрыв на сторонах элементов. Для того чтобы при квадратичной интерполяции потенциал был непрерывным, необходимо, чтобы на общей стороне двух треугольников располагалось по три узла, общих для этих элементов. При выполнении этих условий касательная к их общей стороне составляющая напряженности электрического поля также непрерывна.

9. В уравнение $\frac{\partial J}{\partial U_j} = \sum_n \frac{\partial J_{эл n}}{\partial U_j} = 0$ входят производные $\frac{\partial J_{эл n}}{\partial U_j}$ функционалов тех

элементов, которые имеют общим узел с номером j . Производная функционала p -го элемента с узлами i, j, k $\frac{\partial J_{эл p}}{\partial U_j} = \frac{\partial J_{эл p}}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial U_j}$ при линейной интерполяции по-

тенциала внутри элемента имеет вид: $C_{pi} U_i + C_{pj} U_j + C_{pk} U_k$ (здесь C_{pi} , C_{pj} , C_{pk} — постоянные). Поэтому уравнение $\frac{\partial J}{\partial U_j} = 0$ содержит столько слагаемых, сколько

различных узлов принадлежит элементам, имеющим общим узел j , т. е. $m + 1$.

25.1. Емкость между круглыми цилиндрами

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Наличие полостей в объеме проводящего тела не изменяет ни емкость тела, ни емкость между телами.

2. Емкость уединенного прямолинейного бесконечно длинного проводящего цилиндра не может быть определена, так как при заданной линейной плотности его заряда потенциал U точек его поверхности может быть принят равным произвольному числу. Поэтому и отношение τ/U не определено единственным образом.

3. При уменьшении радиусов проводов потенциалы точек их поверхностей, как и напряжение между проводами $U_1 - U_2 = (\tau/2\pi\epsilon) \ln(D/R)$ при заданной линейной плотности их зарядов, возрастают и стремятся к бесконечности при $R \rightarrow 0$. Поэтому допущение о бесконечной малости радиусов проводов при расчете емкости принять нельзя и емкость такой линии передачи не может быть определена.

4. Понятия емкости тел либо емкости между телами имеет смысл лишь при рассмотрении проводящих тел, потенциалы которых имеют постоянные значения во всех точках поверхностей каждого из тел.

5. При одинаковой линейной плотности электрического заряда цилиндра, подвешенного над поверхностью земли, и двух цилиндров (рис. P25.1) разность потенциалов, равная $U_1 - 0$ в первом случае, в два раза меньше разности потенциалов $U_1 - U_2 = 2U_1$. Поэтому емкости различаются в два раза.

Аналогичная подвешенному над землей цилиндру электрическая цепь содержит один конденсатор емкостью C , тогда как двум цилиндрам соответствует цепь из двух последовательно соединенных конденсаторов емкостью C каждый, так что во втором случае получаем эквивалентную емкость, равную $0,5C$.

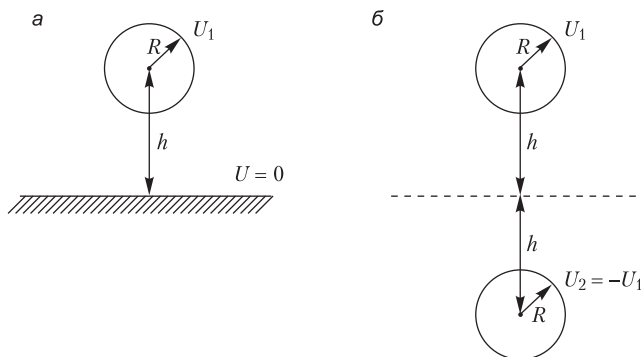


Рис. P25.1

7. Определим потенциалы в точках осей проводов методом наложения. При $\tau_1 \neq 0$, $\tau_2 = 0$ имеем для $r = R_1$: $U_1 = (\tau/2\pi\epsilon) \ln(1/R_1) + A$ и для $r = D$: $U_2 = (\tau/2\pi\epsilon) \ln(1/D) + A$, так что $U_1 - U_2 = (\tau/2\pi\epsilon) \ln(D/R_1)$. При $\tau_2 \neq 0$, $\tau_1 = 0$ имеем $U_1 - U_2 = (\tau/2\pi\epsilon) \ln(D/R_2)$ и искомая емкость $C = \frac{\pi\epsilon l}{\ln(D/\sqrt{R_1 R_2})}$.

9. Емкость в этом случае определить нельзя, так как потенциал поверхности не имеет постоянного значения, а подчинен на ней условию $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$, где n — нормаль к поверхности тела.

25.2. Потенциальные коэффициенты, коэффициенты электростатической индукции и частичные емкости в системе тел

ВОПРОСЫ

2. Собственный потенциальный коэффициент k -го тела зависит от размеров и взаимного расположения всех тел системы, а также от диэлектрической проницаемости среды.

3. Потенциал U_1 первого тела следует искать при условии, что второе тело не заряжено и находится в поле заряда первого тела.

4. Введение в систему проводящих тел дополнительно одного или нескольких проводящих тел приводит к изменению всех собственных и взаимных потенциальных коэффициентов. Действительно, внесение в поле k -го заряженного тела другого незаряженного проводящего тела приводит к изменению потенциалов во всем пространстве, в том числе и в точках поверхности k -го заряженного тела, а следовательно, к изменению собственного потенциального коэффициента k -го тела.

5. Если к заряженному с зарядом $q_1 > 0$ телу приближать незаряженное проводящее тело, то потенциал U_1 тела уменьшится вследствие влияния индуцированных на поверхности незаряженного тела зарядов. Поэтому будет уменьшаться и собственный потенциальный коэффициент α_{11} . Аналогичным образом изменяется и потенциальный коэффициент α_{22} .

Так как при сближении тел возрастает потенциал незаряженного тела, то и взаимные потенциальные коэффициенты $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ также возрастают.

7. Все потенциальные коэффициенты положительны, так как знак потенциала заряженного тела, как и потенциала вносимого в его поле незаряженного тела, совпадает со знаком заряда тела.

УПРАЖНЕНИЯ

2. Для того чтобы выразить коэффициенты электростатической индукции через потенциальные коэффициенты, необходимо решить систему уравнений $\alpha \mathbf{q} = \mathbf{U}$ относительно зарядов: $\mathbf{q} = \alpha^{-1} \mathbf{U}$ и из условия $\alpha^{-1} = \beta$ найти искомые коэффициенты электростатической индукции.

В системе двух тел из уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 = U_1 \\ \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 = U_2 \end{cases}$$

находим $\alpha^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{vmatrix}$ и $\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}}{\Delta}$, $\beta_{12} = -\frac{\alpha_{12}}{\Delta}$, $\beta_{21} = -\frac{\alpha_{21}}{\Delta}$, $\beta_{22} = \frac{\alpha_{11}}{\Delta}$.

В системе трех тел из уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \alpha_{13}q_3 = U_1 \\ \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \alpha_{23}q_3 = U_2 \\ \alpha_{31}q_1 + \alpha_{32}q_2 + \alpha_{33}q_3 = U_3 \end{cases}$$

получаем

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32} & \alpha_{13}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{33} & \alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22} \\ \alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{23} & \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{13}\alpha_{31} & \alpha_{12}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{23} \\ \alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31} & \alpha_{12}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{32} & \alpha_{11}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21} \end{vmatrix},$$

так что $\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}}{\Delta}$, $\beta_{12} = \frac{\alpha_{13}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{33}}{\Delta}$ и т. д. (здесь Δ — определитель системы уравнений).

3. Выражая разность потенциалов $U_1 - U_2$ тел через заряд q_1 одного из них, находим из уравнений $U_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2$, $U_2 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2$: $U_1 - U_2 = (\alpha_{11} - 2\alpha_{12} + \alpha_{22})q_1$, $C = \frac{q_1}{U_1 - U_2} = \frac{1}{\alpha_{11} - 2\alpha_{12} + \alpha_{22}}$.

Так как $\alpha_{11} = \frac{1}{\Delta}\beta_{22}$, $\alpha_{12} = -\frac{1}{\Delta}\beta_{12}$, $\alpha_{22} = \frac{1}{\Delta}\beta_{11}$, где $\Delta = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2$, то получаем

$$C = \frac{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2}{\beta_{11} + 2\beta_{12} + \beta_{22}}.$$

Используя соотношения $\beta_{11} = C_{11} + C_{12}$, $\beta_{12} = -C_{12}$, $\beta_{22} = C_{21} + C_{22}$, находим $C = C_{12} + \frac{C_{11}C_{22}}{C_{11} + C_{22}}$. Это выражение позволяет представить

емкость между двумя телами в виде емкости электрической цепи, содержащей три конденсатора, соединенных последовательно-параллельно (рис. P25.2).

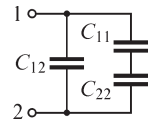


Рис. P25.2

4. Воспользуемся решением предыдущего упражнения: $C_{12} = -\beta_{12}$, $C_{11} = \beta_{11} + \beta_{12}$, $C_{22} = \beta_{22} + \beta_{12}$, а также упражнения 2: $\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}}{\Delta}$, $\beta_{12} = -\frac{\alpha_{12}}{\Delta}$, $\beta_{22} = \frac{\alpha_{11}}{\Delta}$, где $\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2$. В итоге находим:

$$C_{12} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}, \quad C_{11} = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}, \quad C_{22} = \frac{\alpha_{11} - \alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}.$$

5. Поместим начало прямоугольной системы координат в вершине двугранного угла и обозначим координаты проводов x_1, y_1 и x_2, y_2 . Используя метод зеркальных изображений, запишем потенциалы провода 1 при $q_2 = 0$ и провода 2 при $q_1 = 0$:

$$U_1 = \frac{q_1}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{q_1}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{1}{2y_1}\right) - \frac{q_1}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{1}{2x_1}\right) + \frac{q_1}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right) =$$

$$= \frac{q_1}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{2x_1y_1}{R\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right), \quad U_2 = \frac{q_2}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{2x_2y_2}{R\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}\right),$$

откуда получаем

$$\alpha_{11} = \frac{U_1}{q_1} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{2x_1y_1}{R\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right), \quad \alpha_{22} = \frac{U_2}{q_2} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{2x_2y_2}{R\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}\right).$$

Для нахождения потенциального коэффициента α_{21} рассчитаем потенциал в точке расположения провода 2 при $q_1 \neq 0, q_2 = 0$:

$$U_2 = \frac{q_1}{2\pi\epsilon l} \ln\left[\frac{1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}\right] - \frac{q_1}{2\pi\epsilon l} \ln\left[\frac{1}{\sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}\right] -$$

$$- \frac{q_1}{2\pi\epsilon l} \ln\left[\frac{1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}}\right] + \frac{q_1}{2\pi\epsilon l} \ln\left[\frac{1}{\sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}}\right],$$

$$\alpha_{21} = \frac{U_2}{q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon l} \ln\left\{\frac{[(x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2][(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2]}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2][(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2]}\right\}.$$

25.3. Емкость линий передачи

УПРАЖНЕНИЯ

1. Погрешность расчета емкости двухпроводной линии при пренебрежении влиянием земли можно найти по формуле

$$\epsilon = \frac{C_1 - C_2}{C_1} = 1 - \frac{\ln\left(\frac{2h}{R} \frac{D}{\sqrt{4h^2 + D^2}}\right)}{\ln \frac{D}{R}},$$

(C_1, C_2 — емкости при учете влияния земли и при пренебрежении ее влиянием). При заданных численных значениях получаем, что погрешность не превышает одного процента при $h \geq 1,6$ м.

3. Потенциальные коэффициенты рассчитываем по формулам:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{2h_1}{R}\right), \quad \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{2h_2}{R}\right), \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{h_1 + h_2}{D}\right).$$

Искомая емкость равна

$$C = \frac{1}{\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12}} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{4h_1 h_2 D^2}{R^2 (h_1 + h_2)^2}} \cong 6,28 \cdot 10^{-12} l \frac{\Phi}{\text{м}}.$$

4. Для расчета емкости двухпроводной линии воспользуемся конформным отображением области существования поля на верхнюю полуплоскость с помощью функции $\zeta = f(z)$ комплексного переменного z . Провода 1, 2 линии, имеющие в плоскости z координаты $z_1 = x_1 + jy_1 = r_1$, $z_2 = x_2 + jy_2 = r_2$, будут иметь в плоскости ζ координаты $\zeta_1 = \xi_1 + j\eta_1$, $\zeta_2 = \xi_2 + j\eta_2$, их радиусы примут значения $R_1 \cong R |f'(z)|_{z=z_1}$, $R_2 \cong R |f'(z)|_{z=z_2}$. Так как заряды и потенциалы проводов при конформном преобразовании области не изменяются, то емкость также не изменяется и может быть найдена по формуле $C = \frac{1}{\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12}}$, где α_{11} , α_{22} , α_{12} — потенци-

альные коэффициенты проводов в плоскости переменного ζ :

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \left(\frac{2\eta_1}{R_1} \right), \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \left(\frac{2\eta_2}{R_2} \right), \alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \left[\frac{\sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 + \eta_1)^2}}{\sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2}} \right].$$

При расположении начала прямоугольной системы координат в вершине образованного поверхностями нулевого потенциала прямого угла (вариант *a*) функция $\zeta = z^2$ отображает внутреннюю часть угла в верхнюю полуплоскость комплексной переменной $\zeta = \xi + j\eta$.

Провода линии имеют в плоскости ζ координаты $\zeta_1 = r_1^2 e^{j2\theta_1} = \xi_1 + j\eta_1$, $\zeta_2 = r_2^2 e^{j2\theta_2} = \xi_2 + j\eta_2$, их радиусы равны $R_1 = 2R |r_1 e^{j\theta_1}| = 2Rr_1$, $R_2 = 2R |r_2 e^{j\theta_2}| = 2Rr_2$.

В задачах вариантов *б*, *в*, *г* функции, осуществляющие отображение области в верхнюю полуплоскость переменной ζ , имеют соответственно вид $\zeta = e^{\frac{\pi}{d}z}$, $\zeta = \sin \frac{\pi}{d}z$, $\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{R_0} + \frac{R_0}{z} \right)$.

Отображение внутренней части круга (вариант *д*) в верхнюю полуплоскость выполняется с помощью дробно-линейной функции $\zeta = \frac{az + b}{cz + d}$, коэффициенты которой можно определить из условия соответствия координат трех точек в плоскости z трем точкам в плоскости ζ .

Если принять, например, что центр окружности переходит в точку с координатой $+j$ плоскости ζ , а точки $z = R_0$ и $z = -R_0$ — в точки $\zeta = +1$ и $\zeta = -1$ соответственно, то можно получить $\zeta = \frac{z + jR_0}{jz + R_0}$.

Для численных данных варианта *a* получаем: $r_1 = 6,4$ м, $r_2 = 7,2$ м, $R_1 = 0,256$ м, $R_2 = 0,288$ м, $\xi_1 = 9$, $\eta_1 = 40$, $\xi_2 = 20$, $\eta_2 = 48$, $\alpha_{11} = 1,03 \cdot 10^{11}/l$, $\alpha_{22} = 1,04 \cdot 10^{11}/l$, $\alpha_{12} =$

$= 3,4 \cdot 10^{10} / l$, $C = 0,714 \cdot 10^{-11} l$ Ф. При пренебрежении влиянием земли емкость линии равна $C_1 = \pi \varepsilon l (\ln D/R)^{-1} = 0,71 \cdot 10^{-11} l$ Ф, так что погрешность расчета емкости не превышает 1 %.

5. Принимая $q_2 = 0$, находим $U_2 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} U_1$ и с учетом величин

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\left(\frac{2h}{R}\right), \quad \alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\left(\frac{r_{1'2}}{D}\right),$$

где $r_{1'2} = \sqrt{D^2 + 4h^2}$, получаем

$$U_2 = \frac{\ln\left(\frac{r_{1'2}}{D}\right)}{\ln\left(\frac{2h}{R}\right)} U_1 \approx 5,3 \text{ кВ.}$$

Напряжение между проводами равно $U_{12} = U_1 - U_2 \approx 4,7 \text{ кВ}$.

6. Сопоставим емкости трехфазных линий при различном расположении проводов и пренебрежении влиянием земли. Если провода расположены в одной плоскости (варианты *a*, *б*), то

$$C_1 = 2\pi\varepsilon l / \ln\left(\frac{\sqrt[3]{2D}}{R}\right).$$

При расположении проводов в вершинах равностороннего треугольника (варианты *в*, *г*) получаем:

$$C_2 = 2\pi\varepsilon l / \ln\left(\frac{D}{R}\right) > C_1.$$

Сопоставим емкости линии при учете проводящей земли. Выражение для емкости C'_1 линии (вариант *a*) известно (см. § 25.5). При расположении проводов в вертикальной плоскости (вариант *б*) получаем:

$$C'_2 = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left[\frac{2D}{R} \sqrt[3]{\frac{h(h+2D)}{(2h+D)(2h+3D)}}\right]}.$$

Сравнение значений C'_1 и C'_2 показывает, что $C'_1 > C'_2$.

При расположении проводов в вершинах равностороннего треугольника (вариант *в*) имеем

$$C'_3 = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left\{\left(\frac{2D}{R}\right) \sqrt[3]{\frac{h^2(h+\sqrt{3}/2D)}{[(D/2)^2 + (2h+\sqrt{3}/2D)^2] \sqrt{D^2 + 4h^2}}}\right\}}.$$

Сравнение выражений для расчета емкости показывает, что $C'_2 < C'_4 < C'_3 < C'_1$, т. е. наименьшую емкость имеет линия с расположением проводов в вертикальной плоскости (вариант б), а наибольшую — при расположении проводов в вершинах правильного треугольника согласно варианту в.

7. Заряды проводов находим, решая систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \alpha_{13}q_3 = U_1, \\ \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \alpha_{23}q_3 = U_2, \\ \alpha_{31}q_1 + \alpha_{32}q_2 + \alpha_{33}q_3 = U_3, \end{cases}$$

для чего предварительно рассчитываем потенциальные коэффициенты:

$$а) \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{2h}{R}\right) = 1,37 \cdot 10^{11} \frac{1}{l} \frac{1}{\Phi},$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{23} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{\sqrt{4h^2 + D^2}}{D}\right) = 2,55 \cdot 10^{10} \frac{1}{l} \frac{1}{\Phi},$$

$$\alpha_{13} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{\sqrt{4h^2 + 4D^2}}{2D}\right) = 1,45 \cdot 10^{10} \frac{1}{l} \frac{1}{\Phi},$$

$$q_1 = -2,97 \cdot 10^{-7} \cdot l \text{ Кл}, q_2 = -3,64 \cdot 10^{-7} \cdot l \text{ Кл}, q_3 = 6,83 \cdot 10^{-7} \cdot l \text{ Кл};$$

$$б) \alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{2h}{R}\right) = 1,37 \cdot 10^{11} \frac{1}{l} \frac{1}{\Phi}, \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{2(h+D)}{R}\right) = 1,44 \cdot 10^{11} \frac{1}{l} \frac{1}{\Phi},$$

$$\alpha_{33} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{2(h+2D)}{R}\right) = 1,49 \cdot 10^{11} \frac{1}{l} \frac{1}{\Phi},$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{2h+D}{D}\right) = 2,9 \cdot 10^{10} \frac{1}{l} \frac{1}{\Phi},$$

$$\alpha_{13} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{2h+2D}{2D}\right) = 1,98 \cdot 10^{10} \frac{1}{l} \frac{1}{\Phi},$$

$$\alpha_{23} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{2h+3D}{D}\right) = 3,5 \cdot 10^{10} \frac{1}{l} \frac{1}{\Phi},$$

$$q_1 = -3,09 \cdot 10^{-7} \cdot l \text{ Кл/м}, q_2 = -3,78 \cdot 10^{-7} \cdot l \text{ Кл}, q_3 = 6,67 \cdot 10^{-7} \cdot l \text{ Кл};$$

$$в) \alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{2h}{R}\right) = 1,37 \cdot 10^{11} \frac{1}{l} \frac{1}{\Phi},$$

$$\alpha_{33} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left[2\left(h + \frac{\sqrt{3}}{2}D\right)\right] / R = 1,43 \cdot 10^{11} \frac{1}{l} \frac{1}{\Phi},$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{\sqrt{4h^2 + D^2}}{D}\right) = 2,55 \cdot 10^{10} \frac{1}{l} \frac{1}{\Phi},$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{23} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \left[\sqrt{(0,5D)^2 + \left(2h + \frac{\sqrt{3}}{2}D\right)^2} / D \right] = 2,85 \cdot 10^{10} \frac{1}{l} \frac{1}{\Phi},$$

$$q_1 = -3,7 \cdot 10^{-7} \cdot l \text{ Кл}, q_2 = -3,7 \cdot 10^{-7} \cdot l \text{ Кл}, q_3 = 7,07 \cdot 10^{-7} \cdot l \text{ Кл};$$

$$з) \alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \left(\frac{2h}{R} \right) = 1,37 \cdot 10^{11} \frac{1}{l} \frac{1}{\Phi},$$

$$\alpha_{22} = \alpha_{33} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \left[2 \left(h + \frac{\sqrt{3}}{2}D \right) / R \right] = 1,43 \cdot 10^{11} \frac{1}{l} \frac{1}{\Phi},$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \left[\sqrt{(0,5D)^2 + \left(2h + \frac{\sqrt{3}}{2}D\right)^2} / D \right] = 2,85 \cdot 10^{10} \frac{1}{l} \frac{1}{\Phi},$$

$$\alpha_{23} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \left[\sqrt{D^2 + (2h + \sqrt{3}D)^2} / D \right] = 3,17 \cdot 10^{10} \frac{1}{l} \frac{1}{\Phi},$$

$$q_1 = -3,6 \cdot 10^{-7} \cdot l \text{ Кл}, q_2 = -3,6 \cdot 10^{-7} \cdot l \text{ Кл}, q_3 = 7,13 \cdot 10^{-7} \cdot l \text{ Кл}.$$

8. При условии a задачи следует принять $q_2 = q_3 = 0$, так как второй и третий провода не заряжены, что позволяет записать уравнения $U_1 = \alpha_{11}q_1$, $U_2 = \alpha_{21}q_1$, $U_3 = \alpha_{31}q_1$, из которых находим $q_1 = U_1/\alpha_{11}$, $U_2 = \alpha_{21}/\alpha_{11}U_1$, $U_3 = \alpha_{31}/\alpha_{11}U_1$.

Находим (рис. P25.3): $q_1 = 8,03 \cdot 10^{-7} \cdot l \text{ Кл}$ и $a) U_2 = 20,5 \text{ кВ}$, $U_3 = 11,6 \text{ кВ}$; $б) U_2 = 23,2 \text{ кВ}$, $U_3 = 15,9 \text{ кВ}$; $в) U_2 = 20,52 \text{ кВ}$, $U_3 = 23,0 \text{ кВ}$; $з) U_2 = 23,0 \text{ кВ}$, $U_3 = 23,0 \text{ кВ}$.

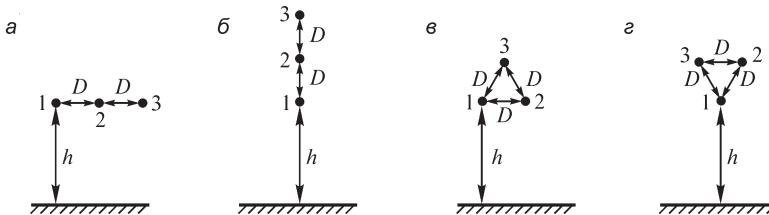


Рис. P25.3

При условии $б$ упражнения следует принять $U_2 = 0$, $q_3 = 0$, так что уравнения, связывающие заряды и потенциалы проводов, принимают вид:

$$\begin{cases} U_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 \\ 0 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 \\ U_3 = \alpha_{31}q_1 + \alpha_{32}q_2. \end{cases}$$

Решая их, получаем

$$q_1 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}} U_1, q_2 = -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} q_1 = -\frac{\alpha_{21}U_1}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}, U_3 = \frac{\alpha_{31}\alpha_{22} - \alpha_{32}\alpha_{21}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}} U_1.$$

Подставляя найденные при решении упр. 7 значения потенциальных коэффициентов, находим:

$$а) q_1 = 8,32 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}, q_2 = -1,55 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}, U_3 = 8,11 \text{ кВ};$$

$$б) q_1 = 8,38 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}, q_2 = -1,7 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}, U_3 = 10,71 \text{ кВ};$$

$$в) q_1 = 8,32 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}, q_2 = -1,55 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}, U_3 = 19,29 \text{ кВ};$$

$$г) q_1 = 8,38 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}, q_2 = -1,7 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}, U_3 = 18,59 \text{ кВ}.$$

При условии варианта в с учетом соотношения $U_2 = U_3 = 0$ находим заряды проводов, решая систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \alpha_{13}q_3 = U_1 \\ \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \alpha_{23}q_3 = 0 \\ \alpha_{31}q_1 + \alpha_{32}q_2 + \alpha_{33}q_3 = 0. \end{cases}$$

Подставляя численные значения, получаем (см. рис. P25.3): а) $q_1 = 8,36 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$, $q_2 = -1,44 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$, $q_3 = -0,62 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$ и т. д.

10. Используя соответствующую функцию комплексного переменного $\zeta = f(z)$ (см. решение упр. 4), отображаем заданную область на верхнюю полуплоскость. Вычислив радиусы R_1, R_2, R_3 проводов, расстояния D_{12}, D_{13}, D_{23} между ними и величины η_1, η_2, η_3 в плоскости переменной ζ , переходим к расчету емкости провода транспонированной трехфазной линии. Так как при конформном отображении области емкость не изменяется, то для расчета емкости провода с учетом влияния проводящей поверхности используем формулу, полученную в § 25.5.

Емкость провода линии при пренебрежении влиянием проводящей поверхности получаем по формуле $C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln(D/R)}$.

25.4. Метод средних потенциалов

ВОПРОСЫ

1. При заданном распределении плотности электрического заряда на поверхности проводящего тела его потенциал можно рассчитать, пользуясь выражением

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_s \frac{\sigma ds}{r}, \text{ после чего найти емкость } C = q/U, \text{ учитывая, что заряд тела } q = \oint_s \sigma ds.$$

Решение задачи нахождения заряда тела по его потенциалу (что зачастую приходится делать на практике) значительно сложнее, так как при этом приходится предварительно отыскивать неизвестное распределение плотности заряда.

2. Погрешность метода средних потенциалов уменьшается с увеличением длины проводов (при $h = \text{const}$), так как в этом случае распределение заряда вдоль них в целом ближе к равномерному, хотя вблизи концов проводов плотность зарядов остается существенно большей, чем в их средней части.

5. Погрешность метода средних потенциалов зависит от распределения заряда на поверхности тел: чем оно ближе к равномерному, тем меньше погрешность

метода. При заданном расстоянии между сферами погрешность возрастает с увеличением их радиусов, тогда как при заданных радиусах сфер она увеличивается с уменьшением расстояния между ними.

26.1. Электрическое поле постоянных токов в диэлектрике и в проводящей среде

ВОПРОСЫ

3. Полный заряд в объеме ΔV , выделенном внутри провода с постоянным током, равен нулю, так как отрицательный заряд имеющихся в объеме электронов равен положительному заряду неподвижных ионов. Поэтому внутри провода с током имеем $\rho = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$. На поверхности провода с током наряду с касательной составляющей напряженности электрического поля, обусловленной протекающим током, имеется также и нормальная составляющая E_n , претерпевающая разрыв вследствие того, что с внутренней стороны поверхности провода $J_n = \gamma E_n = 0$. Поэтому на поверхности провода с током возникает электрический заряд плотностью $\sigma = \epsilon_0 E_n$ и, следовательно, объемная плотность заряда на ней обращается в бесконечность.

Для характеристики распределения электрического заряда используют понятие его поверхностной плотности и поверхностной дивергенции вектора электрического смещения, обозначаемой как $\operatorname{Div} \mathbf{D}$ и определяемой как разность нормальных к поверхности составляющих вектора электрического смещения, взятых по обе ее стороны: $\operatorname{Div} \mathbf{D} = D_{ne} - D_{ni}$. Связь между величинами $\operatorname{Div} \mathbf{D}$ и σ имеет вид $\operatorname{Div} \mathbf{D} = \sigma$.

4. В проводящем теле электрического тока и электрического поля нет, поэтому и плотность электрического заряда во всем объеме тела равна нулю. Однако на его поверхности распределен индуцированный электрический заряд, поверхностная плотность которого $\operatorname{Div} \mathbf{D} = D_{ne} - D_{ni} = D_{ne} = \sigma$.

В диэлектрике свободные заряды отсутствуют и в любой точке его объема выполняется соотношение $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, тогда как на поверхности провода с током имеем условие $\operatorname{Div} \mathbf{D} = \sigma$ (см. ответ на вопрос 3).

9. На границе двух сред с различными удельными электрическими проводимостями γ_1 и γ_2 в силу уравнений $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$, $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ получаем $\operatorname{div} \gamma \mathbf{E} = \gamma \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{E} \operatorname{grad} \gamma = 0$, откуда следует, что $\operatorname{div} \mathbf{E} = -(\operatorname{grad} \gamma \mathbf{E})/\gamma \neq 0$. Так как величины $\operatorname{grad} \gamma$ и $\operatorname{div} \mathbf{E}$ обращаются в бесконечность, это означает существование на границе двух сред электрического заряда в бесконечно малом объеме. В то же время плотность поверхностного электрического заряда на границе двух сред конечна. Плотность заряда можно определить по формуле $\sigma = D_{n2} - D_{n1} = \epsilon_0 J_n$.

11. На поверхности электрода можно принять условие $U = \text{const}$, т. е. считать ее эквипотенциальной.

14. Поверхность заземляющего электрода можно считать эквипотенциальной, если удельная электрическая проводимость вещества заземлителя значительно

превышает удельную электрическую проводимость земли. Если заземлитель выполнен из меди, то при $\gamma_{\text{земли}} = 10^{-2}$ См/м отношение этих величин составляет $5,7 \cdot 10^7 / 10^{-2} = 5,7 \cdot 10^9 \gg 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Электрический потенциал в однородной среде удовлетворяет уравнению Лапласа $\text{div grad } U = 0$, а в неоднородной среде — уравнению $\text{div } \epsilon \text{ grad } U = 0$.

Эти уравнения совпадают с уравнениями, которые описывают потенциал электростатического поля в соответствующей среде.

2. Параметры линии, рассматриваемой как электрическая цепь с распределенными вдоль нее параметрами r и g , суть волновое сопротивление линии $z = \sqrt{r/g}$ и коэффициент распространения $\gamma = \sqrt{rg}$. Из уравнений (см. т. 2, § 16.3)

$U_{\text{вых}} = U_{\text{вх}} \text{ch } \gamma l - I_{\text{вх}} z \text{sh } \gamma l$, $I_{\text{вых}} = I_{\text{вх}} \text{ch } \gamma l - U_{\text{вх}} / z \text{sh } \gamma l$ длинной линии находим с учетом соотношения $U_{\text{вых}} = I_{\text{вых}} r_{\text{н}}$ выражение $U_{\text{вых}}(l) = \frac{U_{\text{вх}} r_{\text{н}}}{r_{\text{н}} \text{ch } \gamma l + z \text{sh } \gamma l}$.

Если линия разомкнута, то, принимая $r_{\text{н}} = \infty$, получаем $U_{\text{вых}}(l) = \frac{U_{\text{вх}}}{\text{ch}(\sqrt{rg} l)}$.

Для нахождения проводимости g на единицу длины линии воспользуемся аналогией электрического поля в неидеальном диэлектрике с электростатическим полем, для чего используем формулу для расчета емкости, приведенную в § 25.1,

п. 3, $g = \frac{\gamma C}{\epsilon l} = \frac{\pi \gamma}{\ln DR^{-1}}$.

3. Учитывая, что электрическое поле в пластине однородное, ее сопротивление $r = \frac{l}{\gamma s} = \frac{1}{\gamma d}$. Так как оно не зависит от размеров сторон квадратной пластины, то и

ток $i = \frac{U_1 - U_2}{r}$ также не зависит от размеров сторон пластины. Таким образом,

любая квадратная пластина одной и той же толщины и удельной электрической проводимости ее материала имеет одно и то же сопротивление постоянному току.

4. Во всех точках пластины, за исключением точек, лежащих на поверхности раздела сред с различными удельными электрическими проводимостями, потенциал описывается уравнением Лапласа.

В точках поверхности выреза A имеем $J_n = -\gamma \frac{\partial U}{\partial n} = 0$ и, следовательно, $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$.

С обеих сторон трещины AB также имеем условие $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$, так как сквозь трещину ток протекать не может. В точках поверхности выреза B потенциал удовлетворяет условиям $\gamma \frac{\partial U}{\partial n_i} = \gamma_{\text{п}} \frac{\partial U}{\partial n_e}$, $U_i = U_e$, где индексы i, e нормали n означают, что

производную $\frac{\partial U}{\partial n}$ потенциала следует вычислять со стороны материала с удельной проводимостью γ и γ_n соответственно.

На сторонах 3, 4 пластины выполнено условие $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$, так как проводимость окружающего пластину диэлектрика $\gamma = 0$. Проводимость вещества, прилегающего к сторонам 1, 2 пластины $\gamma_a \gg \gamma_n$, в связи с чем потенциал U электродов не изменяется и его можно принять постоянным.

Так как на границе «хорошо проводящее вещество — пластина» потенциал скачком не изменяется, то потенциал в точках сторон 1, 2 пластины, примыкающих к электродам, постоянен: $U = U_1$ на стороне 1 и $U = U_2 \neq U_1$ на стороне 2.

5. В соответствии с методом электростатической аналогии диэлектрикам с проницаемостями $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon$ следует поставить в соответствие проводники с удельными проводимостями $\gamma_1, \gamma_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \gamma_1, \gamma = \frac{\epsilon}{\epsilon_1} \gamma_1$. Пластинам 1, 2, как и вкраплению с удельной проводимостью γ_0 , соответствует вещество, удельная проводимость которого $\gamma_b \gg \gamma_1, \gamma_2, \gamma$.

Устройство, аналогичное изображенному на рис. P26.1, показано на рис. P26.2.

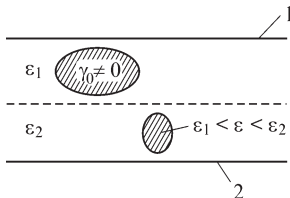


Рис. P26.1

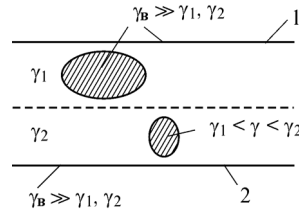


Рис. P26.2

6. Проводимость утечки можно найти с помощью формулы $G = \frac{\gamma}{\epsilon} C$. Здесь C — емкость между несоосными охватывающими друг друга цилиндрами, определяемая по приведенному в § 25.1, п. 4 выражению. При $D \rightarrow 0$ имеем $h_1 \rightarrow \infty, h_2 \rightarrow \infty$, и проводимость $G = 2\pi\gamma l \ln \frac{R_2}{R_1}$ принимает наименьшее значение. При $D \rightarrow R_2 - R_1$ получаем $G \rightarrow \infty$. При заданных значениях параметров $G \cong 9,9 \cdot 10^{-9}$ См.

7. Напряженность электрического поля в слоях кабеля $E_1 = \frac{i}{2\pi\gamma_1 l}, E_2 = \frac{i}{2\pi\gamma_2 l}$.

Напряжение между жилой и оболочкой

$$U = \int_{R_1}^{R_3} E dr = \frac{i}{2\pi l} \left(\frac{1}{\gamma_1} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{R_3}{R_2} \right).$$

Ток утечки не превышает значения $2 \cdot 10^{-3}$ при напряжении $U \leq 80,2$ В.

8. Амплитуды тока проводимости и смещения равны $I_{\text{пр max}} = GU_{\text{max}} = C \frac{\gamma}{\varepsilon} U_{\text{max}}$

и $I_{\text{см max}} = \omega CU_{\text{max}}$.

При частоте $\omega = \gamma/\varepsilon$ ток смещения равен току проводимости. Таким образом получаем $\omega \cong 570$ 1/с.

27.1. Скалярный потенциал магнитного поля

ВОПРОСЫ

3. Скалярный магнитный потенциал становится неоднозначным, если путь интегрирования напряженности магнитного поля охватывает электрический ток. Он будет однозначным, если исключить такие пути, т. е. если ввести «непроницаемые», или запретные для пересечения перегородки, которые контур интегрирования пересекать не может.

5. Как и потенциал электрического поля, скалярный магнитный потенциал всюду непрерывен, так как напряженность магнитного поля конечна во всех точках пространства. В то же время составляющие вектора напряженности магнитного поля могут изменяться скачком, т. е. претерпевать разрыв, например при переходе через слой тока.

6. Упрощение заключается в том, что расчет вихревой составляющей $\mathbf{H}_v$ поля, удовлетворяющей единственному уравнению $\text{rot } \mathbf{H}_v = \mathbf{J}$, значительно проще, чем расчет искомого поля $\mathbf{H}$, так как при этом можно не решать дифференциальных уравнений. Основные вычисления при нахождении искомого поля напряженностью $\mathbf{H}$ связаны с решением скалярного уравнения $\text{div } \mu \text{ grad } U_m = \text{div } \mu \mathbf{H}_v$, тогда как в других случаях приходится решать не скалярное, а векторное уравнение, что значительно сложнее.

7. Магнитный заряд m можем ввести по аналогии с электрическим зарядом q , определяющим поток вектора электрического смещения: $m = \oint_s \mu \mathbf{H}_v d\mathbf{s}$. Магнит-

ный заряд имеет, как видно, размерность Вб, и, следовательно, размерность его объемной, поверхностной и линейной плотностей Вб/м³, Вб/м², Вб/м.

11. В случае однородной безграничной среды имеем во всем пространстве условие $\text{div } \mathbf{H}_v = 0$, означающее, что магнитные заряды отсутствуют и, следовательно, $\mathbf{H}_v = \mathbf{H}$. Однако в неоднородной среде величина $\rho_m = -\text{div } \mu \mathbf{H}_v$ отлична от нуля, так как $\rho_m = -\mu \text{ div } \mathbf{H}_v - \text{grad } \mu \mathbf{H}_v \neq 0$ в точках, где $\text{grad } \mu \neq 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Описываемое скалярным потенциалом поле всегда безвихревое, удовлетворяющее тождеству $\text{rot grad } U_m \equiv 0$. Если $\text{rot grad } U_m \neq 0$, то поле не является потенциальным и не может описываться функцией $U_m(x, y, z)$. Например для варианта a имеем: $\text{grad } U_m = \mathbf{f} = 2aUx\mathbf{i} + 2bUy\mathbf{j}$, $\text{rot } \mathbf{f} = 0$, и, следовательно, скалярный магнитный потенциал может описываться функцией $U_m = ax^2 + by^2$.

2. Используя условие $\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$, находим: $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) = -\frac{B_0 a}{2} \sin az$, откуда получаем $B_r = -\frac{B_0 a}{4} r \sin az$. Можно показать, что это решение не единственное.

3. Допустим, что сумма эквивалентных току фиктивных магнитных зарядов, расположенных в конечном объеме V , не равна нулю. Тогда интеграл $\oint_S \mu \operatorname{grad} U_m d\mathbf{s}$

по поверхности, охватывающей объем V , отличен от нуля, что противоречит принципу непрерывности магнитного потока $\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{s} = \oint_S \mu \mathbf{H}_B d\mathbf{s} = 0$.

4. Соотношение $\operatorname{rot} \mathbf{H}_B = \mathbf{J}$ запишем в прямоугольной системе координат $\frac{\partial H_{By}}{\partial x} - \frac{\partial H_{Bx}}{\partial y} = J_z$, откуда с учетом допущения $H_{Bx} = 0$ находим $H_{By} = \int J_z dx + f(y, z)$.

5. Пользуясь решением упр. 4, запишем H_{By} в виде

$$H_{By}(x, y) = \int_0^x J_z dx = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{i}{ah} x & \text{при } 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq h, \\ \frac{i}{h} & \text{при } a \leq x \leq D-a, \quad 0 \leq y \leq h, \\ \frac{i}{ah} (D-x) & \text{при } D-a \leq x \leq D, \quad 0 \leq y \leq h, \\ 0 & \text{при } x > D. \end{cases}$$

Так как $\frac{\partial H_{By}}{\partial y} = 0$ всюду, за исключением линий $y = 0$,

$0 < x < D$ и $y = h$, $0 < x < D$, где функция H_{By} изменяется скачком, то $\operatorname{div} \mu_0 \mathbf{H}_B = -\rho_m \equiv 0$. На указанных линиях имеем $\rho_m = \pm \infty$, однако поверхностная плотность магнитных зарядов $\sigma_m = \pm \mu_0 H_{By} \neq \infty$ (рис. P27.1).

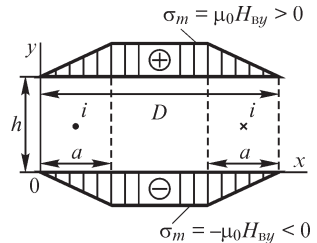


Рис. P27.1

27.2. Векторный потенциал магнитного поля

ВОПРОСЫ

2. Решение уравнения Пуассона для составляющих A_x, A_y, A_z векторного магнитного потенциала показывает, что при $J_x = 0, J_y = 0$ получаем $A_x = 0, A_y = 0$, так что при $\mathbf{J} = kJ_z$ он имеет единственную составляющую $\mathbf{A} = kA_z$. Магнитное поле является плоскопараллельным и обе составляющие магнитной индукции B_x, B_y можно найти, пользуясь выражением $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$: $B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, B_y = \frac{\partial A_z}{\partial x}$.

При наличии вблизи провода тела конечных размеров с магнитной проницаемостью $\mu \neq \mu_0$ магнитное поле становится трехмерным, так как возникает составляющая B_z магнитной индукции. Если бы в этих условиях векторный магнитный потенциал сохранил единственную составляющую A_z , то получили бы вновь соотношение $B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$, что неверно. Поэтому число составляющих

векторного магнитного потенциала не может быть менее двух.

3. Векторный магнитный потенциал имеет единственную составляющую $A_\alpha \neq 0$, если поле плоскомеридианное. При этом $B_r \neq 0$, $B_\alpha = 0$, $B_z \neq 0$. Магнитное поле остается также плоскомеридианным, когда тело с магнитной проницаемостью μ , вносимое в поле, является телом вращения вокруг оси z . Если магнитное поле становится трехмерным, теряя свойство плоскомеридианности, что происходит, например, когда тело с проницаемостью μ не является телом вращения, то возникает составляющая магнитной индукции B_α и поле не может описываться единственной составляющей A_α потенциала.

В общем случае потенциал имеет все три ненулевые составляющие A_r , A_α , A_z , хотя плотность тока может иметь при этом единственную отличную от нуля составляющую J_α .

7. Записывая выражение $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ в прямоугольной системе координат и рассчитывая составляющие B_x , B_y , B_z магнитной индукции, находим $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = \text{const} < 0$ при $y > 0$ и $B_z = \text{const} > 0$ при $y < 0$, т. е. магнитное поле однородно при $y > 0$ и при $y < 0$. Такое поле может создаваться электрическим током, распределенным на плоскости $y = 0$ с постоянной плотностью $\mathbf{j} = -\mathbf{j}_x = \text{const}$.

УПРАЖНЕНИЯ

3. Потенциал плоскопараллельного электростатического поля пропорционален функции $\ln r$, где r — расстояние от точки расположения источника поля до точки определения потенциала. Учитывая аналогию уравнений Пуассона

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} = -\mu J$$

(уравнения записаны в полярной системе координат), описывающих потенциалы U и A , можно определить, что $A \equiv \ln r$.

4. Векторный магнитный потенциал удовлетворяет внутри и вне провода уравнениям $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA}{dr} \right) = -\mu_0 \frac{i}{\pi R^2}$, $0 \leq r \leq R$; $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA}{dr} \right) = 0$, $r \geq R$, имеющим решения:

$$A(r) = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} r^2 + C_1 \ln r + C_2, \quad B(r) = -\frac{dA}{dr} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r - \frac{C_1}{r}, \quad \text{при } 0 \leq r \leq R \text{ и}$$

$$A(r) = C_3 \ln r + C_4, \quad B(r) = -\frac{C_3}{r} \quad \text{при } r \geq R.$$

Для нахождения входящих в решения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 используем следующие условия. Так как при $r = 0$ имеем $B = 0$, то $C_1 = 0$. При $r = R$ магнитная индукция не может иметь разрыва, что приводит к условию $\frac{\mu_0 i}{2\pi R} = -\frac{C_3}{R}$, откуда получаем $C_3 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}$. Потенциал A при $r = R$ также непрерывен: $-\frac{\mu_0 i}{4\pi} + C_2 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln R + C_4$. Одна из постоянных (C_2 или C_4) может иметь произвольное конечное значение, так как изменение векторного магнитного потенциала на постоянную не оказывает влияния на магнитную индукцию. Принимая $C_4 = 0$, получаем $C_2 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} (\ln R - 0,5)$ и окончательно можем написать $A(r) = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} r^2 - \frac{\mu_0 i}{2\pi} (\ln R - 0,5)$, $B(r) = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}$ при $0 \leq r \leq R$; $A(r) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln r$, $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ при $r \geq R$.

5. Поместим начало прямоугольной системы координат в точке на расстоянии $0,5d$ от осей проводов (рис. P27.2).

Потенциал вне проводов в точках оси x равен

$$A_e = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln|x + 0,5d| + \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln|x - 0,5d| + C.$$

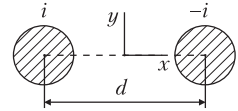


Рис. P27.2

Постоянную C принимаем равной нулю, так как при $x = 0$ имеем $A = 0$.

6. Векторный магнитный потенциал удовлетворяет уравнению $\frac{d^2 A}{dy^2} = -\mu_0 J(y)$,

$$\text{где } J(y) = \begin{cases} \frac{2i}{dh}, & 0 < y < 0,5h, \\ -\frac{2i}{dh}, & 0,5h < y < h. \end{cases}$$

Интегрируя уравнение, получаем $B_x(y) = \frac{dA}{dy} = -\frac{2\mu_0 i}{dh} y + C_1$ при $0 \leq y \leq 0,5h$ и

$$B_x(y) = \frac{2\mu_0 i}{dh} (y - 0,5h) + C_2 \text{ при } 0,5h \leq y \leq h.$$

Постоянные C_1, C_2 интегрирования определяем из условия $B_x = 0$ при $y = 0$ и условия непрерывности величины B_x при $y = 0,5h$: $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{\mu_0 i}{d}$.

Интегрирование функции $B_x(y) = \frac{dA}{dy}$ приводит к выражениям $A(y) = -\frac{\mu_0 i}{dh} y^2 + C$

при $0 \leq y \leq 0,5h$ и $A(y) = \frac{\mu_0 i}{dh} (y - 0,5h)^2 - \frac{\mu_0 i}{d} y + C_3$ при $0,5h \leq y \leq h$.

Условие непрерывности векторного магнитного потенциала при $y = 0,5h$ позволяет получить:

$$C_3 = C + \frac{\mu_0 i h}{4d}.$$

Кривые зависимостей $B_x(y)$, $A(y)$ (принято $C = 0$) показаны на рис. P27.3.

7. При симметричном расположении токов $+i$ и $-i$ относительно плоскости $x = 0$ магнитное поле также симметрично относительно этой плоскости, так что ось y совпадает с одной из линий магнитной индукции. Так как на плоскости $x = 0$ имеем $B_x = \frac{\partial A}{\partial y} = 0$, то векторный магнитный потенциал на ней принимает постоянное, равное нулю значение.

При однонаправленных токах проводов получаем $B_y = 0$ при $x = 0$ и, следовательно, $\frac{\partial A}{\partial x} = 0$,

т. е. векторный магнитный потенциал принимает на оси y экстремальное значение. Так как на плоскости $x = 0$ имеем $B_x = \frac{\partial A}{\partial y} \neq 0$, то $A = A(y) \neq \text{const}$.

8. Векторный магнитный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона в точках жилы и оболочки при $0 \leq r \leq R_1$, $R_2 \leq r \leq R_3$ и уравнению Лапласа $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA}{dr} \right) = 0$ в точках вне токов при $R_1 \leq r \leq R_2$, $r \geq R_3$. При интегрировании уравнений в каждой из областей следует определить по 2 постоянных, так что для нахождения 8 постоянных (всего имеем 4 области) необходимо использовать 8 условий. Интегрирование уравнений приводит к выражениям:

область 1: $0 \leq r \leq R_1$, $A_1 = -0,25 \mu_0 J_1 r^2 + C_1 \ln r + C_2$,

область 2: $R_1 \leq r \leq R_2$, $A_2 = C_3 \ln r + C_4$,

область 3: $R_2 \leq r \leq R_3$, $A_3 = -0,25 \mu_0 J_3 r^2 + C_5 \ln r + C_6$,

область 4: $r \geq R_3$, $A_4 = C_7 \ln r + C_8$.

В силу равенства токов жилы и оболочки и противоположного их направления имеем $B = 0$ при $r \geq R_3$ и, следовательно, $C_7 = 0$. Постоянную C_1 находим из условия $B_\alpha = -\frac{\partial A}{\partial r} \neq \infty$ при $r = 0$: $\frac{\partial A_1}{\partial r} = -0,5 \mu_0 J_1 r + C_1 r^{-1}$, $C_1 = 0$. Постоянные C_2 , C_3 , C_4 ,

C_5 , C_6 , C_8 получаем, используя условия непрерывности потенциала (три условия) и его нормальной производной (три условия) в точках на границах областей 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4:

$$A_1|_{r=R_1} = A_2|_{r=R_1}, \quad A_2|_{r=R_2} = A_3|_{r=R_2}, \quad A_3|_{r=R_3} = A_4|_{r=R_3},$$

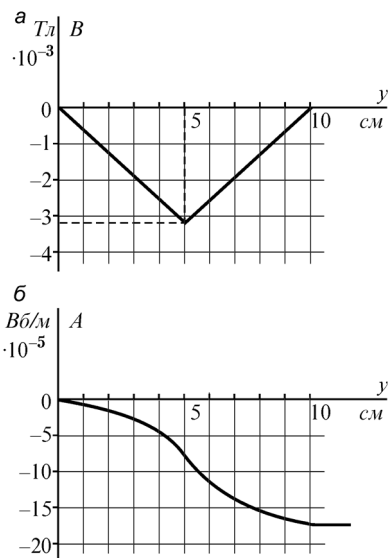


Рис. P27.3

$$\left. \frac{\partial A_1}{\partial r} \right|_{r=R_1} = \left. \frac{\partial A_2}{\partial r} \right|_{r=R_1}, \quad \left. \frac{\partial A_2}{\partial r} \right|_{r=R_2} = \left. \frac{\partial A_3}{\partial r} \right|_{r=R_2}, \quad \left. \frac{\partial A_3}{\partial r} \right|_{r=R_3} = \left. \frac{\partial A_4}{\partial r} \right|_{r=R_3}.$$

Так как в каждое из выражений $A_1(r)$, $A_2(r)$, $A_3(r)$, $A_4(r)$ входят не все постоянные, получаемая при нахождении постоянных система алгебраических уравнений имеет редко заполненную матрицу коэффициентов, что облегчает решение. После подстановки заданных в условии задачи численных значений и решения уравнений можем найти значения векторного магнитного потенциала во всех областях и магнитную индукцию с помощью соотношения $B = -\frac{\partial A}{\partial r}$.

10. Для расчета магнитного потока воспользуемся выражением $\Phi = \oint_l \mathbf{A} d\mathbf{l} = \oint_l A \cos \alpha \, dl$. В точках изображенных на рис. В27.3 контуров вектор $\mathbf{A}$ параллелен вектору плотности тока $\mathbf{J}$, тогда как вектор $d\mathbf{l}$ определяется геометрией контура и направлением его обхода. В обоих вариантах a , b задачи состоящий из прямолинейных отрезков контур следует разбить на участки, записывая интеграл $\oint_l \mathbf{A} d\mathbf{l}$ как сумму интегралов по участкам. Для варианта a имеем: $\Phi =$

$$= \int_1^2 A_{12} \cos \alpha_1 \, dl_1 + \int_2^3 A_{23} \cos \alpha_2 \, dl_2 + \int_3^4 A_{34} \cos \alpha_3 \, dl_3 + \int_4^1 A_{41} \cos \alpha_4 \, dl_4 = l(A_{12} - A_{34}).$$

Отметим, что $\alpha_1 = 0$, $\alpha_4 = \pi$, $\alpha_2 = -\alpha_3 = -0,5\pi$. Принимая во внимание, что $A_{12} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{1}{a} + C$, $A_{34} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{1}{b} + C$, получаем $\Phi = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \cong 1,1 \cdot 10^{-7}$ Вб.

В условиях варианта b можем записать:

$$\Phi = A_{12} l + \int_a^b A_{23}(r) \frac{-l}{\sqrt{l^2 + (b-a)^2}} \left(\frac{b-a}{\sqrt{l^2 + (b-a)^2}} \right)^{-1} dr,$$

так как $\alpha_1 = 0$, $\cos \alpha_1 = 1$, $\cos \alpha_2 = \frac{-l}{\sqrt{l^2 + (b-a)^2}}$, $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha_3 = 0$, $dl_2 = \frac{\sqrt{l^2 + (b-a)^2}}{b-a} dr$.

Учитывая, что $A_{12} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{1}{a} + C$, $A_{23}(r) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln r + C$, находим

$$\Phi = \frac{\mu_0 i l}{2\pi(b-a)} (b \ln \frac{b}{a} - b + a) \cong 0,62 \cdot 10^{-7} \text{ Вб.}$$

11. Так как контуры расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях, то в точках контура направления векторов $d\mathbf{l}$ и векторного потенциала, создаваемого током другого провода, ортогональны. Поэтому $\Psi_m = 0$.

12. Так как $M = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{1}{i_1} \oint_l \mathbf{A} d\mathbf{l}$, получаем: $M = \frac{l}{i_1} (A_2 - A_2') = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{h\sqrt{(d_2+h)^2 + d_1^2}}{(d_2+h)\sqrt{d_1^2 + h^2}}$.

14. Линии магнитной индукции в воздухе подходят под прямым углом к поверхности тела с бесконечно большой магнитной проницаемостью. Поэтому скалярный магнитный потенциал имеет на поверхности постоянное значение, что следует из условия $\frac{\partial U_m}{\partial t} = 0$. Из условия $B_t = 0$ на поверхности тела вытекает, что $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$.

На поверхности тела, вещество которого характеризуется значениями $\mu = 0, \gamma = \infty$, имеем $B_n = 0, B_t \neq 0$, что позволяет, используя соотношения $\mathbf{H} = -\text{grad } U_m, \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, записать выражения $\frac{\partial U_m}{\partial n} = 0, A = \text{const}$.

Граничные значения потенциалов и их нормальных производных на поверхности тел с идеальными свойствами сведены в таблицу:

Свойства вещества	U_m	A	$\frac{\partial U_m}{\partial n}$	$\frac{\partial A}{\partial n}$
$\mu = \infty, \gamma = 0$	const	$f(x, y)$	$f(x, y)$	0
$\mu = 0, \gamma = \infty$	$f(x, y)$	const	0	$f(x, y)$

27.3. Комплексный магнитный потенциал

ВОПРОСЫ

19. Действительно, на движущиеся в проводнике электроны действует сила со стороны магнитного поля соседних токов, так что ток должен под действием этой силы в общем случае перераспределяться. Изменению плотности тока препятствуют силы взаимодействия между электронами, в связи с чем в проводниках этот эффект проявляется незначительно.

21. Так как линии напряженности магнитного поля параллельны оси y , то можем написать $\mathbf{H} = jH_y$, причем при сгущении линий в направлении оси x получаем $\mathbf{H} = jH_y(x)$. Вычисляя проекции вектора $\text{rot } \mathbf{H}$ на оси x, y, z , находим $\text{rot}_x \mathbf{H} = 0, \text{rot}_y \mathbf{H} = 0, \text{rot}_z \mathbf{H} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \neq 0$, на основании чего делаем заключение, что сгущение

линий напряженности магнитного поля в направлении оси x возможно лишь в области с током, плотность которого $J = J_z \neq 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Из выражения $\Phi = \oint_l \mathbf{A} \, dl$ следует, что в плоскопараллельном магнитном поле

магнитный поток можно рассчитать по формуле $\Phi = (A_2 - A_1)l$, где A_2, A_1 — векторный магнитный потенциал на сторонах контура. Так как $A = \mu V_m + C$, то получаем $\Phi = \mu_0 l (V_{m2} - V_{m1}) = 4\pi \cdot 10^{-6} \text{ Вб}$.

2. Совместим плоскость $x = 0$ с поверхностью раздела сред с различными магнитными проницаемостями: $\mu = \mu_1$ при $x < 0$ и $\mu = \mu_2$ при $x > 0$. Граничные усло-

вия непрерывности касательных составляющих напряженности магнитного поля $\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2}$ запишем в виде $\mathbf{j}H_{y1} + \mathbf{k}H_{z1} = \mathbf{j}H_{y2} + \mathbf{k}H_{z2}$ и, учитывая соотношения

$$H_{y1} = \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial A_{x1}}{\partial z} - \frac{\partial A_{z1}}{\partial x} \right), \quad H_{z1} = \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial A_{y1}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x1}}{\partial y} \right),$$

получим

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial A_{x1}}{\partial z} - \frac{\partial A_{z1}}{\partial x} \right) = \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial A_{x2}}{\partial z} - \frac{\partial A_{z2}}{\partial x} \right), \quad \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial A_{y1}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x1}}{\partial y} \right) = \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial A_{y2}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x2}}{\partial y} \right).$$

Граничное условие $B_{n1} = B_{n2}$ записываем в виде $B_{x1} = B_{x2}$, или

$$\frac{\partial A_{z1}}{\partial y} - \frac{\partial A_{y1}}{\partial z} = \frac{\partial A_{z2}}{\partial y} - \frac{\partial A_{y2}}{\partial z}.$$

Для того, чтобы выразить граничные условия $\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2}$, $B_{n1} = B_{n2}$ через скалярный магнитный потенциал, учтем соотношение $\mathbf{H} = -\text{grad } U_m$ и получим:

$$\frac{\partial U_{m1}}{\partial y} = \frac{\partial U_{m2}}{\partial y}, \quad \frac{\partial U_{m1}}{\partial z} = \frac{\partial U_{m2}}{\partial z}, \quad \mu_1 \frac{\partial U_{m1}}{\partial x} = \mu_2 \frac{\partial U_{m2}}{\partial x}.$$

Из первых двух соотношений, связывающих производные скалярного магнитного потенциала по касательным направлениям к поверхности раздела сред, следует, что $U_{m1} = U_{m2}$, т. е. скалярный магнитный потенциал непрерывен на поверхности раздела сред с различными магнитными свойствами.

Скалярный магнитный потенциал, как и его касательная к поверхности раздела сред производная, непрерывен не только в случае плоских, но и неплоских поверхностей.

3. Магнитный поток сквозь сечение трубки, лежащей вне провода и ограниченной линиями радиусов r_{k+1} , r_k , равен $\Delta\Phi_k = (A_{k+1} - A_k)l = -\frac{\mu il}{2\pi} \ln \frac{r_{k+1}}{r_k}$. Величина $\Delta\Phi_k$

имеет одно и то же значение при любом k , если $\frac{r_{k+1}}{r_k} = \text{const}$. Магнитный поток

сквозь сечение любой трубки внутри провода $\Delta\Phi_k = (A_{k+1} - A_k)l = -\frac{\mu il}{4\pi R^2} (r_{k+1}^2 - r_k^2)$

сохраняет постоянное значение, если ее радиусы удовлетворяют соотношению $r_{k+1}^2 - r_k^2 = \text{const}$.

4. Используя метод наложения, находим

$$\zeta = -\frac{i}{2\pi} \ln(z - b) + \frac{i}{2\pi} \ln(z + b) + C = -\frac{i}{2\pi} \ln \frac{z - b}{z + b} + C.$$

Для расчета составляющих H_x , H_y напряженности магнитного поля находим величину $\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\partial V_m}{\partial x} + j \frac{\partial U_m}{\partial x} = -H_y - jH_x$ и получаем в точках оси x : $H_x = 0$, $H_y = \frac{i}{\pi} \frac{b}{x^2 - b^2} \cong \frac{4,8}{x^2 - 0,02} \frac{A}{m}$ и в точках оси y :

$$H_y = -\frac{i}{\pi} \frac{b}{y^2 + b^2} \cong -\frac{4,8}{y^2 + 0,02} \frac{A}{m}, H_x = 0.$$

5. Производная комплексного потенциала равна

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{d\zeta}{dx} = \frac{\partial V_m}{\partial x} + j \frac{\partial U_m}{\partial x} = -H_y - jH_x.$$

Для нахождения величины $H_x + jH_y$ обе части последнего равенства следует умножить на j и найти сопряженную комплексную величину: $\left(j \frac{d\zeta}{dz} \right)^* = H_x + jH_y$.

6. В плоскопараллельном магнитном поле магнитный поток сквозь площадку длиной l можно определить по значению функции потока как $\Phi = \mu_0 \Delta V_m l = \mu(V_{2m} - V_{1m})l$, где V_{2m} , V_{1m} — функция потока на сторонах 2 и 1 площадки. Рассчитав функцию потока из выражения $V_m = -\frac{1}{2\pi} \ln r + C$, находим $\Phi = -\mu_0 \frac{il}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$.

Получаем при условиях: а) $r_2 = r_1$ и $\Phi = 0$, б) $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ и $\Phi = -2,77 \cdot 10^{-5} l$ Вб, в) $r_1 = 2$, $r_2 = 2\sqrt{2}$ и $\Phi = -1,39 \cdot 10^{-5} l$ Вб.

7. Обозначим через R_a , R_c сопротивления на единицу длины алюминиевой оболочки и стальной сердцевинны провода. Так как ток провода распределяется между оболочкой и сердцевинной обратно пропорционально их сопротивлениям, то из соотношений $i_c R_c = i_a R_a$, $i_c + i_a = i$ находим $i_a = \frac{i R_c}{R_c + R_a}$, $i_c = \frac{i R_a}{R_c + R_a}$.

Для численных условий задачи получаем: $R_c/R_a = 10,5$, $i_a = 18,26 A$, $i_c = 1,74 A$. Магнитное поле вне провода такое же, как и поле линейного тока, протекающего вдоль оси провода. Поэтому комплексный потенциал равен $\zeta(z) = -\frac{i}{2\pi} \ln z + C$.

Внутри провода функцию $V_m = -\int_0^r H(r) dr$ находим, записывая напряженность маг-

нитного поля $H(r) = \frac{i_c r}{2\pi r_c^2}$ при $0 \leq r \leq r_c$ и $H(r) = \frac{i_c}{2\pi r} + \frac{J_a \pi(r^2 - r_c^2)}{2\pi r}$ при $r_c \leq r \leq r_a$,

где $J_a = i_a / (\pi(r_a^2 - r_c^2))$:

$$V_m = -\frac{i_c r^2}{4\pi r_c^2} + C \text{ при } 0 \leq r \leq r_c,$$

$$V_m = -\frac{i_c}{4\pi} - \frac{i_c}{2\pi} \ln \frac{r}{r_c} - \frac{J_a}{2} \left(\frac{r^2 - r_c^2}{2} - r_c^2 \ln \frac{r}{r_c} \right) + C \text{ при } r_c \leq r \leq r_a.$$

8. Из выражения $V_m = -i \frac{r_0^2}{4\pi R^2} + C_1$ (см. § 27.11) следует, что $V_{m1} = C_1$ при $r_0 = 0$ и

$V_{m2} = -\frac{i}{4\pi} + C_1$ при $r_0 = R$, т. е. на контуре сечения провода. Магнитный поток

внутри провода на единицу длины составляет $\Phi = \frac{\mu i}{4\pi}$ Вб.

Внутреннее потокоцепление провода на единицу длины, в то же время, равно $\Psi'' = \frac{\mu i}{8\pi}$ (см. т. 1, § 3.5).

Величины Φ и Ψ'' не совпадают, так как при вычислении потока не учитывается то обстоятельство, что линии магнитной индукции внутри провода охватывают различные токи. Таким образом, понятия потока и потокоцепления различны, хотя в некоторых случаях они совпадают.

9. Изобразим на рис. P27.4 сечения проводов и отрезок AB . Обозначив расстояния от центров сечений проводов до точек A, B через r_1, r_2, r'_1, r'_2 , можем записать

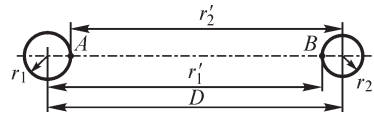


Рис. P27.4

$$\frac{\Phi_{AB}}{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r'_2}{r_1} - \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r'_1} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r'_1 r'_2}{r_1 r_2}.$$

Учитывая, что $r_1 = R, r'_2 = D - R, r'_1 = D - R, r_2 = R$, находим

$$\frac{\Phi_{AB}}{l} = \frac{\mu_0 i}{\pi} \ln \frac{D - R}{R} = 2,27 \cdot 10^{-5} \text{ Вб/м.}$$

27.4. Метод зеркальных изображений

ВОПРОСЫ

5. При определении конфигурации изображенных проводов с токами, а также направлений токов следует исходить из того, что в однородной среде на поверхностях, которые являлись поверхностями намагниченных тел, должна сохраниться той же функция $U_m(x, y, z)$.

Поэтому для сохранения условия $U_m = \text{const}$ на поверхности изображенный ток должен протекать также по изогнутому под углом 90° градусов проводу, причем направление тока в нем должно быть таким же, как и действительного тока. Если одна из сторон изогнутого провода перпендикулярна к поверхности тела, то одна из сторон изображенного провода также должна быть перпендикулярной к этой поверхности.

Если в общем случае контур с током, расположенный над плоской поверхностью намагниченного тела, имеет произвольную форму, то контур изображенного тока должен быть зеркальным изображением заданного контура.

6. Магнитное поле кругового контура с током, охватывающим соосный с ним магнитный цилиндр, является плоскомеридианным, причем линии магнитной индукции подходят к поверхности цилиндра под прямым углом. Учитывая, что

после устранения цилиндра поле должно сохраниться плоскомеридианным, изображенный ток также должен иметь форму кольца, соосного с цилиндром. Магнитная индукция перпендикулярна к поверхности цилиндра только в случае, когда круговой контур изображенного тока имеет радиус, меньший радиуса цилиндра. Искомые величины — радиус изображенного тока и его значение — следует определять из условия постоянства скалярного магнитного потенциала на поверхности цилиндра.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Начало координат принимаем в точке поверхности тела, ближайшей к проводу, и отсчитываем координату x вправо от начала координат вдоль поверхности. Комплексный потенциал поля тока вместе с его зеркальным изображением равен $\zeta = -\frac{i}{2\pi} [\ln(z - jh) + \ln(z + jh)] + C$.

Так как на поверхности тела имеем $H_x = 0$, $H = H_y$, то получаем $H = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \frac{i}{\pi} \frac{x}{x^2 + h^2}$. Экстремальные значения $H \cong 7,1$ А/м достигаются при $x = +h$ и $x = -h$.

Сила взаимодействия провода с телом равна $f' = \frac{f}{l} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi h} = 8,9 \cdot 10^{-4}$ Н/м.

2. В этом случае комплексный потенциал равен $\zeta = -\frac{i}{2\pi} [\ln(z - jh) - \ln(z + jh)] + C$, напряженность магнитного поля на поверхности тела $H = H_x = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \frac{i}{\pi} \frac{h}{x^2 + h^2}$.

Ее наибольшее значение $H = \frac{i}{\pi h} \cong 14,1$ А/м достигается на поверхности тела при $x = 0$. Сила взаимодействия провода с телом равна той же величине $\frac{\mu_0 i^2}{4\pi h}$, однако в отличие от предыдущей задачи она является силой отталкивания.

3. На размещенный внутри двугранного угла провод с током (рис. Р27.5) действует сила $\mathbf{f}_1 = -i\mathbf{f}_{x1}$ со стороны тока i_1 , сила $\mathbf{f}_2 = -j\mathbf{f}_{y2}$ со стороны тока i_2 и сила $\mathbf{f}_3 = -i\mathbf{f}_{x3} - j\mathbf{f}_{y3}$ со стороны i_3 . Их значения можно рассчитать по формулам:

$$f_{x1} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi d_1} l, f_{y2} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi d_2} l,$$

$$f_{x3} = \frac{\mu_0 d_1 i^2 l}{\pi[(2d_1)^2 + (2d_2)^2]}, f_{y3} = \frac{\mu_0 d_2 i^2 l}{\pi[(2d_1)^2 + (2d_2)^2]}.$$

Сила притяжения провода к сторонам угла составляет:

к вертикальной стороне $f_x = f_{x1} + f_{x3} = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} \left[\frac{1}{d_1} + \frac{d_1}{d_1^2 + d_2^2} \right] = 4,5 \cdot 10^{-4} l$ Н,

к горизонтальной стороне $f_y = f_{y1} + f_{y3} = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} \left[\frac{1}{d_2} + \frac{d_2}{d_1^2 + d_2^2} \right] = 4,1 \cdot 10^{-4} l$ Н.

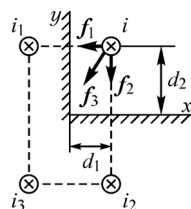


Рис. Р27.5

Если вещество характеризуется идеальными диамагнитными свойствами, то знаки изображенных токов изменяются на противоположные, что приводит к изменению знака действующей на провод силы.

4. Так как зеркально изображенный в одной из плоских поверхностей ток должен быть изображен, в свою очередь, и в другой плоской поверхности, то полное число токов, при котором потенциалы на обеих поверхностях будут постоянными, оказывается бесконечно большим.

Нормальная к поверхности составляющая напряженности магнитного поля в точке с координатой $z = x + j0$ равна (провод с током имеет координату $z = j0,5d$)

$$H_y(x) = \frac{ix}{2\pi} \left[\frac{1}{x^2 + (0,5d)^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{x^2 + [(n-0,5)d]^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{x^2 + [(n+0,5)d]^2} \right].$$

При $N = 1$ учитываются два изображенных тока, при $N = 2$ — четыре тока, при $N = 3$ — шесть токов и т. д.

При учете всех изображенных токов имеем $H_y(x) = \frac{i}{2d} \frac{1 - e^{-2\pi d^{-1}x}}{1 + e^{2\pi d^{-1}x}} = \frac{i}{2d} \operatorname{th} \frac{\pi x}{d}$.

При учете четырех изображенных токов погрешность расчета величины H_y (при $x = d$) составляет 15,4 %, а при учете шести токов — 7,7 %.

5. Сила взаимодействия тока провода и намагниченого тела равна силе взаимодействия двух токов: заданного и зеркально изображенного, равного

$$i' = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} i = \frac{\mu/\mu_0 - 1}{\mu/\mu_0 + 1} i, \quad f = Bli = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi h} \frac{\mu/\mu_0 - 1}{\mu/\mu_0 + 1} l.$$

Кривая зависимости $f/l = F(\mu/\mu_0)$ приведена на рис. P27.6.

Сила взаимодействия имеет наибольшее значение при

допущении $\mu = \infty$: $f_{\max} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi h} l$.

Погрешность расчета силы при допущении $\mu = \infty$ можно найти с помощью формулы $\varepsilon = \frac{f_{\max} - f}{f} 100\%$. По-

грешность не превышает величины ε при допущении $\mu = \infty$, если магнитная проницаемость вещества тела больше величины $\mu = (1 + 200/\varepsilon) \mu_0$. В частности, при $\varepsilon = 5\%$ имеем $\mu = 41\mu_0$.

Таким образом, уже при относительно небольшом значении магнитной проницаемости можно без значительной погрешности принять при расчете электромагнитной силы допущение $\mu = \infty$. Такое допущение упрощает расчет, позволяя оценить значение силы без выполнения сложных вычислений.

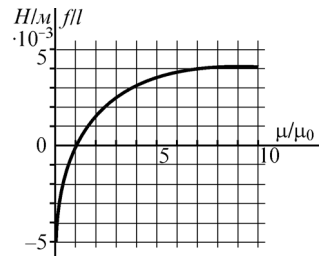


Рис. P27.6

28.1. Индуктивности контуров, катушек и токопроводов

ВОПРОСЫ

1. Изменение распределения плотности тока по сечению провода контура приводит в общем случае к изменению магнитного поля не только внутри провода, но и в окружающем контур пространстве. Поэтому как внутренняя, так и внешняя индуктивности контура зависят от закона распределения плотности тока по сечению провода. В частности, при увеличении частоты протекающего по контуру тока и вытеснении тока на поверхность провода его внутренний поток уменьшается, вследствие чего уменьшается и внутренняя индуктивность контура.

2. Понятие индуктивности контура из бесконечно тонкого провода теряет смысл, так как вследствие неограниченного возрастания магнитной индукции вблизи провода сцепленный с контуром магнитный поток становится бесконечно большим, хотя ток провода и остается конечным. Поэтому индуктивность такого контура не может быть определена.

В то же время взаимная индуктивность двух контуров из бесконечно тонких проводов конечна, если контуры не имеют общих точек. Потокосцепление взаимной индукции в этом случае конечно, так как магнитная индукция, созданная контуром 1 на натянутой на контур 2 поверхности, не обращается в бесконечность ни в одной точке.

4. Так как потокосцепление взаимной индукции зависит не только от распределения магнитной индукции, но также и от распределения плотности тока, то потокосцепление, как и взаимную индуктивность, можно рассчитать, только если функция $J(x, y, z)$ задана в объемах проводов обоих контуров.

5. В приведенном для расчета индуктивности контура выражении под величиной $\mathbf{A}$ следует понимать векторный потенциал поля тока контура, так как интеграл $\frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \mathbf{A} dV$ определяет в этом случае энергию магнитного поля тока, протекающего в контуре.

7. Наибольшее значение индуктивность витка имеет, когда угол между полукольцами составляет 180 градусов (плоский контур), а наименьшее — при совмещении полуколец (угол между плоскостями полуколец равен 0 градусов).

8. Индуктивность двух соединенных индуктивно связанных витков равна $L_{\text{ЭКВ}} = L_1 + L_2 + 2M$, так что при числе витков катушки, равном N , ее эквивалентная индуктивность $L_{\text{ЭКВ}} = \sum_{k=1}^N L_k + \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^N M_{kp}$ (в последнем слагаемом $k \neq p$). Поэтому

индуктивность многовитковой катушки превышает на величину $\sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^N M_{kp}$ сумму индуктивностей ее витков.

9. При протекающих по контурам токах i_1, i_2 электромагнитную силу f , стремящуюся изменить взаимное расположение контуров, можно рассчитать, поль-

зуюсь выражением $f = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial g}$ (g — обобщенная координата). Производная $\frac{\partial M}{\partial g}$ обращается в нуль, если взаимная индуктивность M достигает своего экстремального значения, что имеет место, когда контуры расположены соосно в одной плоскости.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Энергию магнитного поля в проводе радиусом сечения R рассчитаем по формуле $W_M = \int_V W'_M dV = 0,5 \mu l \int_0^{2\pi R} \int_0^R H^2 r dr d\phi$. Учитывая, что при $J = \text{const}$ имеем $H(r) = \frac{Jr}{2}$,

находим: $W_M = \frac{\mu l i^2}{16\pi}$ и $L_{\text{внутр}} = \frac{2W_M}{i^2} = \frac{\mu l}{8\pi}$.

3. Так как $L_{\text{внутр}} = \frac{\mu l}{4\pi}$, $L_{\text{внешн}} = \frac{l}{\pi} \mu_0 \ln \frac{D}{R}$, то $\frac{L_{\text{внешн}}}{L_{\text{внутр}}} = \frac{4\mu_0}{\mu} \ln \frac{D}{R} \cong 9,2 \frac{\mu_0}{\mu}$.

5. Учитывая соотношение $h \gg d, D$, можно определить вид линий напряженности магнитного поля внутри и вне шины. В пространстве между шинами магнитное поле рассматриваем как однородное, и его линии параллельны длинным сторонам шин, тогда как в области вне шин магнитное поле отсутствует и $H = 0$. Величина напряженности магнитного поля между шинами в соответствии с законом полного тока равна $H = i/h$ и не зависит от распределения плотности тока по толщине шин.

Индуктивность можно рассчитать по формуле $L = \frac{2W_M}{i^2}$. В случае а получаем

$W_{\text{внутр}} = \frac{\mu_0 h J^2 d^3}{3} l$, а в случае б: $W_{\text{внутр}} = \frac{\mu_0 h J_0^2 d^3}{20} l$. Так как $W_{\text{внешн}} = \frac{\mu_0 D l}{2h} i^2$, то:

а) $L = \frac{\mu_0}{h} \left(\frac{2d}{3} + D \right) l$, б) $L = \frac{\mu_0}{h} (0,4 + D) l$.

6. Индуктивность токопровода из двух шин толщиной $2d$ каждая рассчитаем по формуле

$$L_0 = \frac{2W_M}{i^2} = \frac{4}{i^2} \frac{1}{2} \int_0^{5d/2} \mu_0 l h H^2(x) dx = \frac{7}{3} \frac{\mu_0 d}{h} l.$$

При расчете индуктивности токопровода с «расщепленными шинами» учтем, что внутри шин напряженность поля изменяется по линейному закону, а вне их сохраняет постоянное значение:

$$L_1 = \frac{2W_M}{i^2} = \frac{4}{i^2} \frac{1}{2} \int_0^{7d/2} \mu_0 l h H^2(x) dx = \frac{17}{6} \frac{\mu_0 d}{h} l.$$

Таким образом, при расщеплении шины токопровода на две его индуктивность возрастает в $L_1/L \cong 1,2$ раза.

7. Индуктивность токопровода находим по формуле $L = \frac{2W_m}{i^2}$, где

$$W_m = \mu_0 l h \left\{ \int_0^d \left(\frac{i}{2dh} \right)^2 x^2 dx + \int_d^{2d} \left(\frac{i}{2h} \right)^2 dx + \int_{2d}^{3d} \left[\frac{i}{2h} - \frac{i}{2hd}(x-2d) \right]^2 dx \right\} = \frac{5\mu_0 i^2 d l}{12h}.$$

Получаем индуктивность $L = \frac{5}{6} \mu_0 \frac{dl}{h}$. При таком способе соединения шин токопровода его индуктивность уменьшается в 2,8 раза в сравнении с индуктивностью L_0 (см. упр. 6) «нерасщепленного» токопровода и в 3,4 раза в сравнении с индуктивностью «расщепленного» токопровода с токами одинакового направления в соседних шинах.

8. Максимально возможное значение взаимной индуктивности контуров найдем из условия, что наибольшее значение коэффициента связи k , определяемое выражением $k = M / \sqrt{L_1 L_2}$, равно 1. Поэтому $M_{\max} = \sqrt{L_1 L_2}$.

10. Погрешность вычисления индуктивности при пренебрежении внутренней индуктивностью $L_{\text{внутр}}$ равна

$$\varepsilon = \frac{100\mu_0 R}{4 \left[\mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{a} - 2 \right) + \frac{100\mu_0 R}{4} \right]} 100\% \cong 89\%,$$

т. е. внутренней индуктивностью пренебречь нельзя. При $\mu = \mu_0$ получаем

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 R}{4 \left[\mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{a} - 2 \right) + \frac{\mu_0 R}{4} \right]} 100\% \cong 7,5\%,$$

что также превышает заданное значение.

11. Индуцируемая в контуре ЭДС равна $e \cong 8,9 \cdot 10^{-4} \sin 314 t$ В. Активное сопротивление $r = \frac{l}{\gamma s} \cong 1,05 \cdot 10^{-3}$ Ом, индуктивность $L = \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{a} - 1,75 \right) \cong 1,4 \cdot 10^{-7}$ Гн, индуктивное сопротивление $\omega L \cong 4,4 \cdot 10^{-5}$ Ом.

Мощность потерь $P = \frac{E^2 r}{r^2 + (\omega L)^2} \cong 3,8 \cdot 10^{-4}$ Вт.

Учитывая, что индуктивное сопротивление ($\omega L = 4,4 \cdot 10^{-5}$ Ом) контура значительно меньше активного ($r = 1,05 \cdot 10^{-3}$ Ом), допущение о малости магнитного потока, обусловленного индуцированным током контура, можно считать оправданным.

12. Учитывая, что индуктивность витка и его сопротивление постоянному току определяются выражениями $L = \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{a} - 1,75 \right)$, $r = \frac{2\pi R}{\gamma \pi a^2} = \frac{2R}{\gamma a^2}$, искомое соотношение, определяющее постоянную времени витка, имеет вид:

$$\tau = \frac{L}{r} = \frac{\mu_0 \gamma a^2}{2} \left(\ln \frac{8R}{a} - 1,75 \right).$$

Если материалом провода витка является сталь, то получаем

$$\tau = \frac{L}{r} = \frac{\mu_0 \gamma a^2}{2} \left(\ln \frac{8R}{a} - 2 + \frac{\mu}{4\mu_0} \right).$$

Кривая $\tau = f(a)$ для витка стали изображена на рис. P28.1.

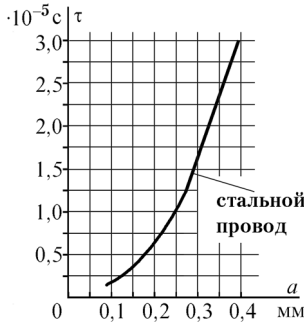


Рис. P28.1

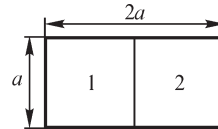


Рис. P28.2

28.2. Метод участков

ВОПРОСЫ

3. В методе участков интегралы по замкнутым контурам представлены в виде суммы интегралов по участкам пути интегрирования. Условным является толкование интегралов по участкам как индуктивностей этих участков либо как взаимных индуктивностей между ними, так как электрический ток всегда замкнут и не может прерываться на концах участков. Физический смысл имеет магнитный поток, сцепленный с контуром, но не с участком контура.

УПРАЖНЕНИЯ

6. Прямоугольный контур размером $a \times 2a$ можно представить в виде двух рядом расположенных квадратных контуров 1 и 2 размерами $a \times a$ (рис. P28.2). Индуктивность прямоугольного контура отличается от величины $2L_{\kappa}$, так как $M_{12} \neq 0$.

7. Внешние индуктивности квадратного и круглого витков равны соответственно:

$$L_{\kappa} = \frac{\mu_0 a}{\pi} \left(2 \ln \frac{a}{r_0} - 1,55 \right), \quad L_o = \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{r_0} - 2 \right).$$

Искомый радиус R является решением уравнения $L_{\kappa} = L_o$:

$$\frac{a}{\pi} \left(2 \ln \frac{a}{r_0} - 1,55 \right) = R \left(\ln \frac{8R}{r_0} - 2 \right).$$

28.3. Индуктивность двухпроводной линии

ВОПРОСЫ

1. Взаимная индуктивность между двумя линиями обращается в нуль при таком их расположении, когда поток взаимной индукции равен нулю: если провода одной из линий размещены в плоскости $y = 0$ на одинаковом расстоянии от плоскости $x = 0$ (их координаты суть $z = a + j0$ и $z = -a + j0$), то провода второй линии должны располагаться в плоскости $x = 0$ (например, координаты проводов второй линии равны $z = 0 + jb$ и $z = 0 - jb$).

2. При постоянном токе плотность тока в любой точке сечения провода имеет одно и то же значение, тогда как при переменном токе она является функцией координат точки. Это приводит к различию не только внутренних индуктивностей проводов, но также и внешних.

УПРАЖНЕНИЯ

4. Принимая длину b рамки неограниченно возрастающей при $a = \text{const}$, $r_0 = \text{const}$, находим величину L/b из выражения для индуктивности прямоугольной рамки (см. § 28.6):

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{a}{b} \ln \frac{2ab}{r_0(a + \sqrt{a^2 + b^2})} = 0, \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \frac{2ab}{r_0(b + \sqrt{a^2 + b^2})} = \ln \frac{a}{r_0}, \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{2}{b} (a + b - \sqrt{a^2 + b^2}) = 0.$$

Таким образом, индуктивность на единицу длины бесконечно длинной рамки равна $L' = \frac{1}{\pi} \left(\mu_0 \ln \frac{a}{r_0} + \frac{\mu}{4} \right)$, что совпадает с выражением для расчета индуктивности

двухпроводной линии при $a = D$, $r_0 = R$ (см. § 28.8).

5. Применяя метод зеркальных отражений, запишем индуктивность двухпроводной линии, образованной заданным проводом и его зеркальным изображением: $L = \frac{l}{\pi} \left(\mu_0 \ln \frac{2h}{R} + \frac{\mu}{4} \right)$. Учитывая, что потокоцепление двухпроводной линии в

два раза превышает потокоцепление подвешенного над поверхностью тела провода, получаем искомую индуктивность $L = \frac{l}{2\pi} \left(\mu_0 \ln \frac{2h}{R} + \frac{\mu}{4} \right)$.

Как видно, индуктивность провода, подвешенного на высоте h над плоской поверхностью идеально проводящего тела, в два раза меньше индуктивности двухпроводной линии, расстояние между проводами которой равно $2h$.

6. Используя методы участков и зеркальных изображений (рис. P28.3), можем записать выражение: $L = L_1 + M_{12} + M_{12'} + M_{1'2} + M_{1'2'}$, где L_1 — индуктивность двухпроводной линии без учета влияния земли, M_{12} , $M_{12'}$, $M_{1'2}$, $M_{1'2'}$ — взаимные индуктивности между проводами линии и их зеркальными изображениями, равные

$$M_{12} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{l}{h_1} - 1 \right), M_{12'} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\ln \frac{2l}{\sqrt{(h_1 + h_2)^2 + D^2} - (h_2 - h_1)} - 1 \right],$$

$$M_{1'2} = M_{12'}, M_{1'2'} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{l}{h_2} - 1 \right).$$

Учитывая, что $L_1 = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D}{R} + \frac{\mu l}{4\pi}$, получаем

$$\begin{aligned} L &= \frac{l}{2\pi} \left\{ \frac{\mu}{2} + \mu_0 \ln \frac{4D^2 h_1 h_2}{R^2 [(h_1 + h_2)^2 + D^2 - (h_2 - h_1)^2]} \right\} = \\ &= \frac{l}{2\pi} \left\{ \frac{\mu}{2} + \mu_0 \ln \frac{4D^2 h_1 h_2}{R^2 [4h_1 h_2 + D^2]} \right\}. \end{aligned}$$

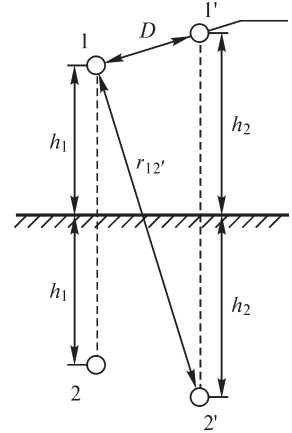


Рис. P28.3

При заданных расстояниях и радиусах проводов находим: $L_1 = 1,18 \cdot 10^{-5} l$ Гн. Погрешность расчета индуктивности при пренебрежении влиянием земли не превышает 1 %.

7. Для расчета индуктивности двухпроводной линии отобразим с помощью функции $\zeta = f(z)$ комплексного переменного заданную область на верхнюю полуплоскость. Выбор отображающей функции, нахождение координат осей проводов в плоскости переменного ζ выполняется аналогично рассмотренному в § 25.3, упр. 4. Учитывая, что при конформном отображении токи и потокосцепления не претерпевают изменений и имеют те же значения, что и в плоскости переменного z , можем рассчитать индуктивность по формуле, полученной при решении предыдущего упражнения, подставляя значения параметров R_0, D_0, h_{10}, h_{20} , получаемые в плоскости переменной ζ . Радиусы проводов примут приближенные значения $R |f'(z)|$ при расчете функции $|f'(z)|$ на оси проводов. Обозначив координаты осей проводов в плоскости ζ через $\zeta_1 = v_1 + ju_1, \zeta_2 = v_2 + ju_2$, получим: $D_0 = \sqrt{(v_1 - v_2)^2 + (u_1 - u_2)^2}, h_{10} = u_1, h_{20} = u_2$. Например, при решении задачи, показанной на рис. B28.1, б, и использовании отображающей функции $\zeta = e^{\frac{\pi}{d} z}$ имеем $R_{10} = R\pi/d, R_{20} = R(\pi/d)e^{\pi/d h_4}, z_1 = jh_1, z_2 = h_4 + jh_2, \zeta_1 = \cos \pi h_1/d + j \sin \pi h_1/d, \zeta_2 = e^{\frac{\pi}{d} h_4} (\cos \pi h_2/d + j \sin \pi h_2/d)$, так что

$$D_0 = \sqrt{\left(\cos \frac{\pi h_1}{d} - e^{\pi/d h_4} \cos \frac{\pi h_2}{d} \right)^2 + \left(\sin \frac{\pi h_1}{d} - e^{\pi/d h_4} \sin \frac{\pi h_2}{d} \right)^2}.$$

Отображающие функции для других конфигураций областей приведены при решении упр. 4, § 25.3.

8. Так как при немагнитном материале проводов линии выражение $L = \mu_0 l / \pi \times \left(\ln \frac{D}{R} + \frac{1}{4} \right)$ дает точное значение индуктивности, то найденные с помощью формул $f_1 = B l i, f_2 = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dg}$ выражения $f_1 = \frac{\mu_0 l i^2}{2\pi D}, f_2 = \frac{1}{2} i^2 \frac{d}{dD} \left[\frac{\mu_0 l}{\pi} \left(\ln \frac{D}{R} + \frac{1}{4} \right) \right]$ совпадают.

Если провода выполнены из ферромагнитного вещества, то допущение о том, что токи сосредоточены на осях, является приближенным, справедливым лишь при выполнении соотношения $D \gg R$.

28.4. Индуктивность трехфазной линии

УПРАЖНЕНИЯ

1. Наличие вблизи проводов линий передачи немагнитных проводящих тел приводит к изменению индуктивностей проводов. Для их нахождения целесообразно воспользоваться, принимая во внимание плоскую поверхность земли, методом зеркальных изображений и рассчитать величины L и M с учетом зеркально расположенных относительно поверхности земли токов. Следует учесть, что даже при симметричном расположении проводов, когда $D_{12} = D_{23} = D_{31}$, расстояния между проводами и их зеркальными изображениями $r_{1'2}$, $r_{1'3}$, $r_{2'3}$ не могут быть равными.

Так как индуктивности проводов 1, 2, 3 с учетом влияния земли равны $L_k = \frac{l}{2\pi} \left(\mu_0 \ln \frac{2h_k}{R_k} + \frac{\mu}{4} \right)$, $k = 1, 2, 3$ (см. § 28.3, решение упр. 5), то среднее значение

индуктивности провода $L = \frac{1}{3}(L_1 + L_2 + L_3)$ суть $L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{2h}{R} + \frac{\mu l}{8\pi}$, где $h = \sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}$, $R = \sqrt[3]{R_1 R_2 R_3}$.

Взаимные индуктивности между проводами рассчитываем по формулам

$$M_{12} = M_{120} + M_{1'2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_{1'2}}{D_{12}}, \quad M_{13} = M_{130} + M_{1'3} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_{1'3}}{D_{13}},$$

$$M_{23} = M_{230} + M_{2'3} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_{2'3}}{D_{23}}.$$

Среднее значение коэффициента взаимной индукции между проводами равно

$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r}{D}$, где под величинами r , D следует понимать их средние значения, равные $r = \sqrt[3]{r_{1'2} r_{1'3} r_{2'3}}$, $D = \sqrt{D_{12} D_{13} D_{23}}$.

Таким образом, эквивалентная индуктивность провода трехфазной линии при учете влияния проводящей земли и наличия транспозиции проводов равна $L' =$

$$= L - M = \frac{l}{2\pi} \left(\mu_0 \ln \frac{2hD}{Rr} + \frac{\mu}{4} \right).$$

2. Эквивалентная индуктивность провода трехфазной линии при указанном

расположении проводов равна $L' = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{D\sqrt[3]{2}}{R} + \frac{1}{4} \right) \approx 1,3 \cdot 10^{-6} l \text{ Гн} = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$,

тогда как индуктивность двухпроводной линии, образованной проводами

а) 1 и 2: $L_{12} \approx 2,5 \cdot 10^{-6} l \text{ Гн} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$.

б) 2 и 3: $L_{23} = L_{12} \approx 2,5 \cdot 10^{-6} \cdot l \text{ Гн} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$,

в) 1 и 3: $L_{13} \approx 2,77 \cdot 10^{-6} \cdot l \text{ Гн} = 2,77 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$.

3. Эквивалентные индуктивности проводов линий определяются выражениями:

$$L'_{(a)} = \frac{l}{2\pi} \mu_0 \left(\ln \frac{D}{R} + \frac{1}{4} \right), \quad L'_{(б)} = \frac{l}{2\pi} \mu_0 \left(\ln \frac{D\sqrt[3]{2}}{R} + \frac{1}{4} \right). \text{ Так как } \sqrt[3]{2} > 1, \text{ то } L'_{(б)} > L'_{(a)}.$$

Значение расстояния $D_{(a)}$, при котором $L'_{(a)} = L'_{(б)}$, определяем из уравнения

$$\ln \frac{D_{(a)}}{R} = \ln \frac{D\sqrt[3]{2}}{R}, \text{ из которого следует, что } D_{(a)} = D\sqrt[3]{2} \cong 1,26 D.$$

4. Мощность, переносимую в крайние фазы, находящиеся на расстоянии $2D$ друг от друга, можно рассчитать по формуле $P_{1\text{вн}} = P_{3\text{вн}} = \omega I^2 \text{Im} (a^2 M_{12} + a M_{13})$, тогда как мощность, переносимую во вторую фазу, — по формуле

$$P_{2\text{вн}} = \omega I^2 \text{Im} (a^2 M_{23} + a M_{21}).$$

Подставляя в эти выражения коэффициенты взаимной индукции

$$M_{12} = M_{23} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{2l}{D} - 1 \right), \quad M_{13} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{l}{D} - 1 \right), \text{ получаем } P_{1\text{вн}} \cong 2700 \text{ Вт}, \quad P_{2\text{вн}} = 0.$$

Если принять допущение о равномерном распределении тока по сечению проводов, что справедливо при относительно небольших радиусах проводов и низких частотах тона, то $r = l/\gamma s$ и $\frac{P_{1\text{вн}}}{P} = \frac{P_{1\text{вн}}}{3I^2 r} \approx 0,32$.

5. На первом этапе расчета применением соответствующей функции комплексного переменного $\zeta(z)$ область расположения линии отображается на верхнюю полуплоскость. Координаты осей проводов, их радиусы, а также расстояния между ними следует рассчитать так же, как это выполнено при рассмотрении двухпроводной линии (см. решение упр. 7, § 28.3). На втором этапе эквивалентную индуктивность провода вычисляем по формуле $L' = \frac{l}{2\pi} \left(\mu_0 \ln \frac{2hD}{Rr} + \frac{\mu}{4} \right)$, учитывая, что

определяемые как средние величины h, D, R, r (см. решение упр. 1) следует рассчитать в плоскости переменного $\zeta = f(z)$. Для расчета эквивалентной индуктивности провода при допущении однородности среды можно использовать выражение

$$L' = \frac{l}{2\pi} \left(\mu_0 \ln \frac{D}{R} + \frac{\mu}{4} \right), \text{ где } D, R — \text{средние значения расстояний между проводами}$$

и их радиусы, рассчитанные в исходной плоскости переменного $z = x + jy$.

29.1. Плоская электромагнитная волна в диэлектрике

ВОПРОСЫ

3. Обратная волна возникает при отражении прямой волны электромагнитного поля от среды, электромагнитные свойства которой отличны от свойств диэлектрика, в котором распространяется волна.

4. Решение волнового уравнения, имеющее своим аргументом функции $z - vt$ и $z + vt$, может в частных случаях содержать произведения функций с аргументами kz , kvt . Действительно, функцию $E_m \sin kz \sin kvt$ можно преобразовать к виду $1/2 E_m [\cos k(z - vt) - \cos k(z + vt)]$. В длинной линии без потерь (см. т. 2, § 17.8), процессы в которой также описываются волновым уравнением, при наложении незатухающих бегущих волн возникают стоячие волны, которые описываются функциями с аргументами βx , ωt . Аналогичные явления могут иметь место и при распространении электромагнитных волн в диэлектрике.

УПРАЖНЕНИЯ

5. При движении наблюдателя вдоль оси z со скоростью $v = -\frac{10^2}{30}t \cong -3,3t$, когда

координата z изменяется по закону $z = z_0 - 3,3t$, функция $E(z, t)$ принимает постоянное значение, равное $10 \cos 30z_0$. Поэтому волна распространяется со скоростью $v \cong 3,3t$ в направлении, обратном направлению оси z .

Из условия $H = \sqrt{\epsilon/\mu} E$ получаем $\mathbf{H} = \mathbf{i} 10 \sqrt{\epsilon/\mu} \cos (100t + 30z)$.

6. При $k > 0$ электромагнитная волна распространяется в направлении оси z и составляющие напряженности магнитного поля равны $H_x = -E_y \sqrt{\epsilon/\mu} e^{j(\omega t - kz)}$, $H_y = E_x \sqrt{\epsilon/\mu} e^{j(\omega t - kz)}$, $\mathbf{H} = (-\mathbf{i} E_y + \mathbf{j} E_x) \sqrt{\epsilon/\mu} e^{j(\omega t - kz)}$.

8. Искомые значения находим из условия $\frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{\mu H^2}{2}$: $H_{\max} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{\text{доп}} \approx 8 \cdot 10^3 \text{ А/м}$,

$B_{\max} \approx 10^{-2} \text{ Тл}$. Объемная плотность электромагнитной энергии при таких значениях напряженности поля $W^* = \epsilon_0 E^2 \approx 80 \text{ Дж/м}^3$.

9. Объемная плотность энергии электромагнитного поля равна $W'_{\text{эм}} = \frac{\mu H^2}{2} + \frac{\epsilon E^2}{2} = \mu H^2$ в предположении, что существует волна лишь одного направления. Так как в соответствии с законом полного тока $H = \frac{i}{2\pi r} = \frac{I_m}{2\pi r} \sin(\omega t - \frac{\omega}{v} z)$, то в объеме диэлектрика кабеля длиной λ между жилой и оболочкой

$$W_{\text{эм}} = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^\lambda \int_0^{2\pi} \frac{\mu I_m^2}{4\pi^2 r} \sin^2(-\frac{\omega}{v} z) dr d\varphi dz = \frac{\mu I_m^2 \lambda}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Энергия электромагнитного поля, поглощаемая в нагрузке, равна $W_{\text{эм}} = UI T = \frac{\mu I_m^2 \lambda}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$, что совпадает с найденным выражением

$$T = \mu \lambda \sqrt{\epsilon/\mu}, E = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_m}{2\pi \sqrt{2} r}, U = \frac{I_m}{2\pi \sqrt{2}} \sqrt{\mu/\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

10. Индуктивность и емкость кабеля единичной длины определяются выражениями $L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$, $C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln R_2/R_1}$, где R_1 , R_2 — радиусы жилы и оболочки (см. § 3.4, т. 1).

Так как скорость распространения электромагнитной волны равна $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$, то, используя выражения $\mu = \frac{2\pi L}{\ln R_2/R_1}$, $\epsilon = \frac{C \ln R_2/R_1}{2\pi}$, получаем: $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

При заданных величинах ϵ , μ имеем $v = 1/\sqrt{4\mu_0\epsilon_0} = c/2$.

29.2. Вектор Пойнтинга

УПРАЖНЕНИЯ

1. При отсутствии потерь в кабеле вектор напряженности электрического поля не имеет составляющих, параллельных оси z кабеля, так что $E = E_r \frac{\tau}{2\pi\epsilon r} =$

$$= \frac{u}{r \ln R_2/R_1}, H = H_\phi = \frac{i}{2\pi r}, R_1, R_2 - \text{радиусы жилы и оболочки.}$$

Вектор Пойнтинга, имеющий единственную составляющую, параллельную оси кабеля, равен $S = E_r H_\phi = \frac{ui}{2\pi r^2 \ln R_2/R_1}$.

2. Будем считать, что электромагнитная волна имеет составляющие напряженностей E_x и H_y электрического и магнитного полей. Ток сквозь ограниченную контуром поверхность имеет наибольшее значение, если вектор $d\mathbf{s}$, нормальный к поверхности, совпадает с ортом $\mathbf{i}$ оси x , т. е. если контур располагается в плоскости $x = \text{const}$. Принимая размер контура вдоль оси y равным a и вдоль оси z равным b , искомый ток можем записать в виде:

$$i = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_s E_x ds = a H_{ym} \sin \frac{kb}{2} \cos \left(\omega t - kz + \frac{kb}{2} \right), \text{ здесь } k = \frac{\omega}{v}.$$

Такое же выражение получаем, рассчитывая ток с помощью уравнения $i = \oint \mathbf{H} d\mathbf{l}$:

$$i = -a H_{ym} \sin [\omega t - k(z + b)] + a H_{ym} [\sin (\omega t - kz)] = a H_{ym} \sin \frac{kb}{2} \cos \left(\omega t - kz + \frac{kb}{2} \right).$$

4. Выделим внутри конденсатора между его обкладками цилиндр радиусом R и высотой d , равной расстоянию между обкладками. На боковой поверхности выделенного цилиндра напряженность E электрического поля имеет единственную составляющую, равную $E = u(t)/d$. Примем, что вектор напряженности магнитного поля имеет на ней также единственную составляющую, равную $H = i_{\text{см}}/2\pi r = \frac{C}{2\pi r} \frac{du}{dt}$ (здесь C — емкость выделенной части конденсатора). Передаваемая сквозь боковую поверхность цилиндра электромагнитная энергия

$$W_{\text{эм}} = \int_0^t \int_s E H dt ds = \int_0^t \int_s \frac{C}{2\pi r d} u(t) \frac{du}{dt} dt ds = C \int_0^t u(t) \frac{du}{dt} dt.$$

После интегрирования находим: $W_{\text{эм}} = \frac{C[u^2(t) - u^2(0)]}{2} = W_{\text{эм}}(t) - W_{\text{эм}}(0)$.

Таким образом, если боковая поверхность выделенного цилиндра является боковой поверхностью слоя диэлектрика конденсатора, то передаваемая сквозь поверхность диэлектрика электромагнитная энергия равна приращению энергии электромагнитного поля конденсатора.

$$5. \text{ Условие равенства передаваемой в слоях электромагнитной энергии } \int_{s_1} E_1 H_1 ds_1 = \int_{s_2} E_2 H_2 ds_2 \text{ запишем, учитывая соотношения } E = \sqrt{\mu/\varepsilon} H, H = i/2\pi r, ds = 2\pi r dr,$$

$$\text{в виде } \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1} \int_{R_1}^R 1/r dr = \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2} \int_R^{R_2} 1/r dr, \text{ которое после интегрирования позволяет получить уравнение } \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1} \ln R/R_1 = \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2} \ln R_2/R.$$

$$\text{При } \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} = \frac{\mu_2}{\varepsilon_2} \text{ имеем } R = \sqrt{R_1 R_2}. \text{ В общем случае, обозначив } \alpha = \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_2}{\mu_2 \varepsilon_1}}, \text{ находим } \ln(R/R_1)^\alpha = \ln R_2/R, \text{ откуда } R = \sqrt[\alpha+1]{R_1^\alpha R_2}.$$

6. Так как напряженности электрического и магнитного полей равны $E(t) = \frac{u(t)}{d} = \frac{U_m}{d} \sin \omega t$, $H(r, t) = \frac{i}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi r} \pi r^2 \varepsilon \frac{dE}{dt} = \frac{\varepsilon U_m \omega}{2d} r \cos \omega t$, то среднее за период значение вектора Пойнтинга $S(r, t) = E(t)H(r, t)$ обращается в нуль (здесь d — расстояние между обкладками).

8. Допустим, что напряженность электрического поля $E_x = E_{xm} \sin(\omega t - \omega z/v)$.

При вычислении ЭДС способом *a* по формуле $e = \oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l}$ под величиной E следует понимать напряженность индуцированного электрического поля, равную $E_{\text{инд}} = vB$, так что

$$e = \oint_l \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l} = a(E_{\text{инд}1} - E_{\text{инд}2}) = av\mu \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (E_1 - E_2) = 2aE_{xm} \sin \frac{\omega b}{2v} \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{v} \left(z + \frac{b}{2} \right) \right].$$

При вычислении ЭДС способом *b* по формуле $e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ также получаем

$$e = -\frac{\partial}{\partial t} a \int_z^{z+b} \mu \sqrt{\varepsilon/\mu} E_{xm} \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{v} z \right) dz = 2aE_{xm} \sin \frac{\omega b}{2v} \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{v} \left(z + \frac{b}{2} \right) \right].$$

При подстановке численных значений находим $E_m \cong 7,9$ В.

29.3. Вихревая и потенциальная составляющие электромагнитного поля

ВОПРОСЫ

1. Вихревая составляющая напряженности электрического поля обращается в нуль, когда векторный магнитный потенциал не изменяется во времени. На-

пример, при перемещении с постоянной скоростью проводящего тела в однородном магнитном поле векторный магнитный потенциал в любой точке объема тела сохраняет одно и то же значение. Однако при этом потенциальная составляющая напряженности электрического поля отлична от нуля в окружающем тело диэлектрике. Ее существование обусловлено появлением на поверхности проводника индуцированных электрических зарядов. Заряды не создают электрического поля внутри проводника, если тело изолировано и к нему не присоединена электрическая цепь. Таким образом, выполнено условие $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$ во всем

пространстве, условие $\text{grad } U = 0$ — внутри проводящего тела и $\text{grad } U \neq 0$ — в окружающем тело диэлектрике.

Если к проводящему телу присоединена электрическая цепь, то под действием индуцированной в проводнике ЭДС в цепи может протекать электрический ток, и тогда получаем условие $\text{grad } U \neq 0$ не только в диэлектрике, но и в объеме тела.

Потенциальная составляющая напряженности электрического поля обращается в нуль, когда действие электрических зарядов, распределенных в пространстве (например, в проводящем теле), компенсируется, заряды одного знака не облажаются и их электрическим полем можно пренебречь.

Например, в плоском проводящем тонкостенном диске, помещенном в нормальное к его плоскости однородное переменное магнитное поле, напряженность электрического поля не содержит потенциальной составляющей, если диск однороден в отношении электрической проводимости вещества, из которого он изготовлен.

2. Переменное электромагнитное поле нельзя в общем случае описать с помощью только электрического и магнитного скалярных потенциалов, так как при этом имеем $\mathbf{E} = -\text{grad } U_s$, $\mathbf{H} = -\text{grad } U_m$ и, следовательно, $\text{rot } \mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{H} = 0$, что неверно.

УПРАЖНЕНИЯ

6. Напряженность индуцированного в кольце электрического поля содержит в силу постоянства удельной электрической проводимости вещества кольца только вихревую составляющую $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t$, направленную по оси провода кольца. Поэтому интегралы $\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l}$, $\oint_l (\partial \mathbf{A} / \partial t) d\mathbf{l} = \partial \Phi / \partial t$ имеют смысл индуцируемой в кольце ЭДС. Так как $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t = -\text{grad } U = 0$, то получаем $\oint_l (\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t) d\mathbf{l} = 0$, тогда как

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \oint_l (\partial \mathbf{A} / \partial t) d\mathbf{l} = i r.$$

7. В силу электрической неоднородности материала кольца напряженность электрического поля содержит две составляющие: вихревую, равную $-\partial \mathbf{A} / \partial t$, и потенциальную $-\text{grad } U$. Возникающие на общих границах полуколец электрические заряды создают электрическое поле. На одной из границ знак элек-

трических зарядов положителен, а на другой — отрицателен, в связи с чем векторы $\text{grad } U$ в полукольцах имеют различные направления. Учитывая, что напряженности поля в полукольцах равны соответственно $E_1 = i/s\gamma_1$, $E_2 = i/s\gamma_2$, из выражений $E_1 = -\partial A_\alpha/\partial t - \partial U/r \partial \alpha|_1$, $E_2 = -\partial A_\alpha/\partial t - \partial U/r \partial \alpha|_2$ получаем: $\partial U/r \partial \alpha|_1 = -\partial A_\alpha/\partial t - i/s\gamma_1$, $\partial U/r \partial \alpha|_2 = -\partial A_\alpha/\partial t - i/s\gamma_2$.

29.4. Передача электромагнитной энергии вдоль проводов линии

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Вектор $\mathbf{H}$ напряженности магнитного поля имеет единственную угловую составляющую H_α как на поверхности жилы кабеля, так и на внутренней поверхности его оболочки, тогда как направление вектора напряженности $\mathbf{E}$ электрического поля на этих поверхностях может быть различным. При допущении бесконечно большой удельной электрической проводимости вещества кабеля и оболочки на обеих поверхностях имеем $E = E_r$, так что в этом случае вектор Пойнтинга имеет единственную составляющую S_z . Энергия электромагнитного поля передается в диэлектрике между жилой и оболочкой кабеля.

Если принять во внимание конечную проводимость вещества жилы и оболочки, то на их поверхностях наряду с радиальной составляющей напряженности электрического поля появляется также и касательная составляющая E_z , которая направлена на поверхностях жилы и оболочки в разные стороны в связи с тем, что ток в них течет в противоположных направлениях.

Вследствие этого вектор Пойнтинга будет иметь не только осевую, но также и радиальную S_r составляющую. В этом случае существуют потоки электромагнитной энергии, направленные внутрь жилы и оболочки кабеля. Эта часть электромагнитной энергии рассеивается в жиле и оболочке кабеля в виде тепла.

2. При допущении идеальной проводимости земли касательная к ней составляющая вектора напряженности электрического поля обращается в нуль, так что вектор Пойнтинга не содержит нормальной к поверхности земли составляющей и, следовательно, энергия электромагнитного поля передается вдоль поверхности земли, не проникая внутрь нее.

Если считать удельную электрическую проводимость земли конечной, то на ее поверхности получаем величины $E_t \neq 0$ и $S_n \neq 0$. В этом случае электромагнитная волна проникает в землю, что приводит к частичной потере энергии электромагнитного поля.

3. Синусоидальное напряжение и ток конденсатора с идеальным диэлектриком сдвинуты на угол 90° . Так как напряженности электрического и магнитного поля между обкладками конденсатора сдвинуты на такой же угол, то их произведение $S = EH$ является знакопеременной функцией, среднее за период значение которой равно нулю.

В одну четверть периода имеем $S > 0$ и электромагнитная энергия поступает внутрь конденсатора, тогда как в следующую четверть периода получаем $S < 0$ и электромагнитная энергия передается из диэлектрика конденсатора.

6. Учитывая, что $R \ll D$, будем считать, что электрические оси проводов совпадают с их геометрическими осями. Напряженности электрического и магнитного полей в точке A запишем в виде:

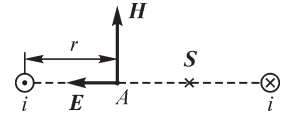


Рис. P29.1

$$E(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon r} + \frac{\tau}{2\pi\epsilon(D-r)} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D-r} \right),$$

$$H(r) = \frac{i}{2\pi r} + \frac{i}{2\pi(D-r)} = \frac{i}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D-r} \right),$$

где r — расстояние от геометрического центра одного из проводов до точки A (рис. P29.1).

Учитывая, что линейная плотность заряда $\tau = \frac{Cu}{l} \cong \frac{\pi\epsilon u}{\ln D/R}$, находим

$$E(r) = \frac{u}{2 \ln D/R} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D-r} \right), \quad S(r) = \frac{ui}{4\pi[r(D-r)]^2} \frac{D^2}{\ln D/R}.$$

На рис. P29.1 показано направление вектора $\mathbf{S}$ Пойнтинга в одной из точек плоскости, проходящей через оси проводов. Их значения приведены в таблице.

r_A	м	0,06	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$S \cdot 10^{-6}$	Вт/м ²	44,5	16,7	4,65	1,47	0,85	0,65	0,6

7. Для напряженности электрического и магнитного полей (рис. P29.2) можем записать выражения (см. решение предыдущей задачи):

$$E(x, t) = \frac{u(x, t) D}{2(D^2/4 - y^2) \ln D/R},$$

$$H(x, t) = \frac{i(x, t) D}{2\pi(D^2/4 - y^2)}.$$

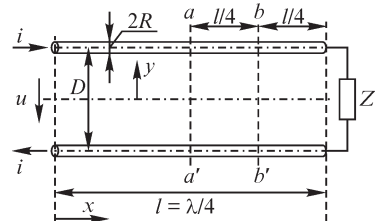


Рис. P29.2

Напряжение между проводами и ток в них распределены вдоль линии по закону (см. т. 2, § 17.3) $\dot{U} = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \dot{I}_1 Z \operatorname{sh} \gamma x$, $\dot{I} = \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z} \operatorname{sh} \gamma x$, где $\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$ — комплексные напряжение и ток в начале линии.

Так как линия нагружена на волновое сопротивление, то последнее выражение можем записать в виде $\dot{U} = \dot{U}_1 (\operatorname{ch} \gamma x - \operatorname{sh} \gamma x)$, $\dot{I} = \dot{I}_1 (\operatorname{ch} \gamma x - \operatorname{sh} \gamma x)$, или, учитывая соотношения $\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} j$, $\operatorname{ch} \frac{2\pi}{\lambda} jx = \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$, $\operatorname{sh} jx = j \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$,

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \left(\cos \frac{2\pi}{\lambda} x - j \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \right) = \dot{U}_1 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} x}, \quad \dot{I} = \dot{I}_1 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} x}.$$

На линиях $a - a'$ и $b - b'$ имеем $x_a = \lambda/8$, $x_b = 3\lambda/16$, так что $\dot{U}_a = \dot{U}_1 e^{-j \frac{\pi}{4}}$, $\dot{U}_b = \dot{U}_1 e^{-j \frac{3\pi}{8}}$ и

$$S_a = \frac{U I D^2}{2\pi(D^2/4 - y^2)^2 \ln D/R} \sin^2 \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$S_b = \frac{U I D^2}{2\pi(D^2/4 - y^2)^2 \ln D/R} \sin^2 \left(\omega t - \frac{3\pi}{8} \right).$$

Как видно, имеем $S \geq 0$ и, следовательно, в любой момент времени энергия электромагнитного поля передается от источника к нагрузке.

8. Подставляя в уравнения длинной линии (см. т. 2, § 17.7) $\dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh} \gamma x$, $\dot{I} = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \frac{\dot{U}_2}{Z} \operatorname{sh} \gamma x$ величины $\frac{\dot{U}_2}{Z} = Z e^{j\pi/6}$, $\operatorname{ch} \gamma x = \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$, $\operatorname{sh} \gamma x = j \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$, получим:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \left(\cos \frac{2\pi}{\lambda} x + e^{-j\pi/6} j \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \right), \quad \dot{I} = \dot{I}_2 \left(\cos \frac{2\pi}{\lambda} x + e^{j\pi/6} j \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \right).$$

При $x_a = \frac{\lambda}{8}$ имеем $\dot{U}_a = 1,225 \dot{U}_2 e^{j30^\circ}$, $\dot{I}_a = 0,707 \dot{I}_2 e^{j60^\circ}$, или $u_a = 1,225 \sqrt{2} U_2 \sin(\omega t + 30^\circ)$, $i_a = 0,707 \sqrt{2} I_2 \sin(\omega t + 30^\circ)$. При $x_b = \lambda/16$ находим $\dot{U}_b = \dot{U}_2 (1,11 + j 0,33)$, $\dot{I}_b = \dot{I}_2 (0,73 + j 0,33)$, $u_b = 1,16 \sqrt{2} U_2 \sin(\omega t + 16^\circ)$, $i_b = 0,8 \sqrt{2} I_2 \sin(\omega t - 6^\circ)$,

$$S_a = \frac{0,138 U_2 I_2 D^2}{(D^2/4 - y^2)^2 \ln D/R} \sin^2(\omega t + 30^\circ),$$

$$S_b = \frac{0,148 U_2 I_2 D^2}{(D^2/4 - y^2)^2 \ln D/R} \sin(\omega t + 16^\circ) \sin(\omega t - 6^\circ).$$

При $l = 0,02 \lambda$ имеем $x_a = 0,01\lambda$, $x_b = 0,005\lambda$, $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x_a \cong 1$, $\sin \frac{2\pi}{\lambda} x_a \cong 0$, $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x_b \cong 1$, $\sin \frac{2\pi}{\lambda} x_b \cong 0$, $S_a = S_b = \frac{U_2 I_2 D^2}{2\pi(D^2/4 - y^2)^2 \ln D/R} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{6} \right) \sin \omega t$.

Построив функцию $S_b(t)$ при $l = 0,25\lambda$, а также функцию $S_a(t) = S_b(t)$ при $l = 0,02\lambda$, видим, что в некоторые промежутки времени они отрицательны, т. е. в эти промежутки времени поток электромагнитной энергии направлен не к приемнику, а от него к генератору. При реактивном или смешанном характере нагрузки происходит обмен электромагнитной энергией между приемником и линией, представляющей собой накопитель энергии, распределенный вдоль линии.

Отметим еще раз, что если линия нагружена на волновое сопротивление (см. упр. 7), то при любом x имеем $S \geq 0$, так как напряжение и ток совпадают по фазе. В этом случае не происходит обмена электромагнитной энергией между генератором и приемником, а осуществляется только ее передача.

30.1. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде

ВОПРОСЫ

4. Составляющие напряженностей электрического и магнитного поля плоской электромагнитной синусоидальной волны в идеальном диэлектрике совпадают по фазе, в связи с чем отношение их комплексных значений, определяющее волновое сопротивление, является вещественным.

Как видно из решения уравнений относительно составляющих напряженностей электромагнитного поля синусоидальной волны в проводящей среде, величины $E(t)$, $H(t)$ сдвинуты по фазе на угол 45° . Поэтому волновое сопротивление проводящей среды является комплексным и носит активно-индуктивный характер.

5. В неидеальном диэлектрике протекают вихревые токи, препятствующие проникновению электромагнитной волны в глубь среды, в связи с чем волна затухает по мере ее удаления от поверхности диэлектрика. Вихревые токи приводят к выделению тепла и нагреву диэлектрика.

6. Приведенное соотношение, определяющее волновое сопротивление среды, справедливо, когда входящие в него величины $\dot{E}$, $\dot{H}$ — напряженности составляющих поля падающей волны. В пластине конечной толщины наряду с падающей существует также и отраженная от ее границ волна. Поэтому отношение величин $\dot{E}$ и $\dot{H}$ не определяет в этом случае волнового сопротивления среды.

7. В любой точке безграничной проводящей среды угол сдвига между величинами $E(t)$, $H(t)$ сохраняется неизменным и равным 45° .

8. С ростом частоты усиливается влияние индуцированных в проводящей среде вихревых токов, ослабляющих стороннее электромагнитное поле. Поэтому скорость затухания поля вдоль координаты его распространения возрастает и глубина проникновения поля в среду уменьшается.

9. Получаемая при таком способе определения скорость носит название фазовой. Введенная при изучении электромагнитного поля в диэлектрике (см. § 29.1) скорость распространения волн также является фазовой, но она одновременно является и скоростью распространения электромагнитной волны.

Фазовая скорость распространения волны в проводящей среде зависит от частоты изменения поля. Она характеризует электромагнитные процессы в проводящей среде только при гармоническом законе изменения поля во времени.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Электрические цепи с минимальным числом элементов, имеющие сопротивление $Z = (1 + j)\sqrt{\omega\mu/2\gamma} = r + jx$, содержат резистор и катушку индуктивности, соединенные последовательно или параллельно.

Получаем $r = x = \sqrt{\omega\mu/2\gamma}$ при последовательном, $g = b = \sqrt{\gamma/2\omega\mu}$ при параллельном соединении.

3. Расположим начало прямоугольной системы координат в середине сечения шины и направим оси, как указано на рис. Р30.1. Имеем $\dot{E} = \dot{E}_x$, $\dot{H} = \dot{H}_y$.

Определим из граничных условий $\dot{H} = \dot{I}/2h$ при $z = -d$, $\dot{H} = -\dot{I}/2h$ при $z = d$ постоянные, входящие в решение $\dot{H} = A_1 e^{-\alpha z} + A_2 e^{\alpha z}$ уравнения $\frac{d^2 \dot{H}}{dz^2} = j\omega\mu_0\gamma\dot{H}$, $\alpha^2 = j\omega\mu_0\gamma$. Из уравнений $A_1 e^{\alpha d} + A_2 e^{-\alpha d} = \frac{\dot{I}}{2h}$, $A_1 e^{-\alpha d} + A_2 e^{\alpha d} = -\dot{I}/2h$ находим $A_1 = \frac{\dot{I}}{4h \operatorname{sh} \alpha d}$, $A_2 = -\frac{\dot{I}}{4h \operatorname{sh} \alpha d}$ и искомое решение запишем в виде $\dot{H} = -\frac{\dot{I}}{2h \operatorname{sh} \alpha d} \operatorname{sh} \alpha z$. С помощью уравнения $\gamma E = -\frac{dH}{dz}$ определяем напряженность электрического поля и плотность тока $\dot{E} = \frac{\dot{I}\alpha}{2\gamma h \operatorname{sh} \alpha d} \operatorname{ch} \alpha z$, $\dot{J} = \frac{\dot{I}\alpha}{2h \operatorname{sh} \alpha d} \operatorname{ch} \alpha z$.

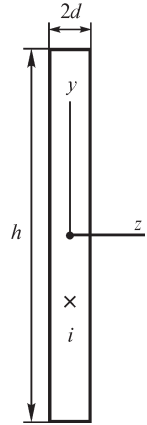


Рис. P30.1

При постоянном токе сопротивление r_0 шины длиной l можно найти по формуле $r_0 = \frac{l}{\gamma s} = \frac{l}{2\gamma h d}$. При переменном токе энергию, проникающую сквозь поверхность шины, можно рассчитать с помощью выражения $\dot{S} = \oint_s (\dot{E} \dot{H}^*) ds$, а внутреннее реактивное и активное сопротивления шины соответственно по формулам

$$x_{\text{внутр}} = \operatorname{Im} \frac{l}{I^2} \oint_s (\dot{E} \dot{H}^*) ds = \frac{2hl}{I^2} \operatorname{Im}(\dot{E} \dot{H}^*)_{z=-d}, \quad r = \frac{2hl}{I^2} \operatorname{Re}(\dot{E} \dot{H}^*)_{z=-d}.$$

Подставляя в последнее выражение найденные выше величины $\dot{E}$ и $\dot{H}$, получаем

$$r = \frac{l}{2\gamma h} \operatorname{Re} [\alpha \operatorname{cth} \alpha d]$$

и $r/r_0 = kd \operatorname{Re} [(1+j) \operatorname{cth} (1+j) kd]$,

где $k = \sqrt{\omega\mu\gamma}/2$. При вычислениях используем соотношение

$$\begin{aligned} \operatorname{cth}(1+j)kd &= \frac{\operatorname{ch}(1+j)kd}{\operatorname{sh}(1+j)kd} = \\ &= \frac{\operatorname{sh} 2kd - j \sin 2kd}{\operatorname{ch} 2kd - \cos 2kd}. \end{aligned}$$

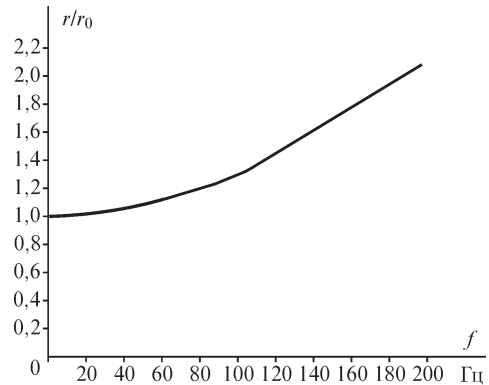


Рис. P30.2

Кривая зависимости $r/r_0 = \varphi(f)$ показана на рис. P30.2.

5. Учитывая, что $J(z) \equiv \operatorname{ch}(1+j)kz = \operatorname{ch} kz \cos kz + j \operatorname{sh} kz \sin kz$ (см. решение упр. 3), находим, что на расстоянии $2d$ фаза плотности тока изменяется на величину $\Delta\psi_J = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} kz \operatorname{tg} kz)$. Из соотношения $\Delta\psi_J = 2\pi n$ получаем $\pi n = kd$, $k = \frac{\pi n}{d}$

$$\text{и } f = \frac{\pi}{\mu\gamma} \left(\frac{n}{d} \right)^2.$$

Подставляя численные значения, получаем $f \cong 440$ Гц при $n = 1$, $f \cong 1750$ Гц при $n = 2$.

30.2. Активное и индуктивное сопротивления проводов

ВОПРОСЫ

6. Так как переменное электромагнитное поле является вихревым, то напряжение $u_{ad} = \int_a^d \mathbf{E} d\mathbf{l}$ зависит от выбора пути между точками a , d . Другими словами,

показание вольтметра зависит от расположения его соединительных проводов, подходящих к точкам a , d . Чем больший внешний магнитный поток, созданный током жилы кабеля, охвачен соединительными проводами, тем большим будет и показание вольтметра. Поэтому при расположении проводов вдоль линии ad (см. рис. В30.1) показание вольтметра будет наименьшим, в этом случае проводами охвачен лишь внутренний магнитный поток провода. При расположении проводов вдоль линии $abcd$ показание вольтметра будет наибольшим, так как наряду с внутренним потоком измерительные провода охватывают также полностью и внешний магнитный поток, приходящийся на длину l жилы.

8. Ребра и углы тел в действительности всегда имеют конечный радиус закругления, так что их можно аппроксимировать соответственно цилиндром и сферой радиусом R . Соотношение радиуса закругления и длины λ электромагнитной волны в ферромагнитном теле определяет возможность рассмотрения последней как плоской: при $R \gg \lambda$ ее можно считать плоской.

В плоской волне характеризующие ее векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ зависят только от одной координаты. Это условие в рассматриваемом случае выполняется приближенно, если длина электромагнитной волны в ферромагнитном теле значительно меньше расстояния, отсчитываемого вдоль его поверхности, на котором амплитуда векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ претерпевает значительное изменение.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Обозначим шины цифрами 1, 2, а их длинные стороны буквами a , b (рис. Р30.3). Для расчета поля внутри любой из шин принимаем прямоугольную систему координат, связанную с той шиной, поле в которой рассчитываем, и располагаем начало координат в центре сечения шины.

Напряженность магнитного поля в любой из шин записываем в виде $\dot{H} = A_1 e^{-\alpha z} + A_2 e^{\alpha z}$ и определяем постоянные A_1 , A_2 из условий $\dot{H} = \dot{H}_a$ при $z = -d$ и $\dot{H} = \dot{H}_b$ при $z = d$:

$$\dot{H} = -\dot{H}_a \frac{\text{sh} \alpha(z-d)}{\text{sh} 2\alpha d} + \dot{H}_b \frac{\text{sh} \alpha(z+d)}{\text{sh} 2\alpha d}.$$

Используя граничные условия $\dot{H}_{1a} = 0$, $\dot{H}_{1b} = -\dot{I}/h$, $\dot{H}_{2a} = -\dot{I}/h$, $\dot{H}_{2b} = 0$, получаем:

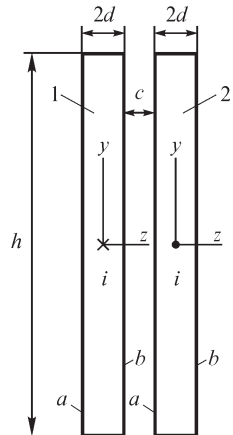


Рис. Р30.3

$$\begin{aligned}\dot{H}_1 &= -\frac{\dot{I}}{h} \frac{\operatorname{sh} \alpha(z+d)}{\operatorname{sh} 2\alpha d}, & j_1 &= \frac{\alpha \dot{I}}{h} \frac{\operatorname{ch} \alpha(z+d)}{\operatorname{sh} 2\alpha d}, \\ \dot{H}_2 &= \frac{\dot{I}}{h} \frac{\operatorname{sh} \alpha(z-d)}{\operatorname{sh} 2\alpha d}, & j_2 &= -\frac{\alpha \dot{I}}{h} \frac{\operatorname{ch} \alpha(z-d)}{\operatorname{sh} 2\alpha d}.\end{aligned}$$

Кривые зависимостей $|\dot{H}_1(z)|$ для заданных численных значений изображены на рис. P30.4.

Сопротивление токопровода содержит активную и реактивную составляющие, причем последнюю можно разделить на две: x_i и x_e , обусловленные соответственно внутренним и внешним магнитными потоками: $Z = Z_{i1} + Z_{i2} + jx_e = Z_i + jx_e$. Внутреннее сопротивление Z_i одной шины токопровода рассчитаем по формуле

$$Z_i = \frac{l}{I^2} \oint_s [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}] ds = \frac{\alpha}{\gamma h} l \operatorname{cth} 2\alpha d,$$

а внешнее — по формуле $x_e = \omega L_e = \omega \mu_0 l \frac{c}{h}$, где c — расстояние между шинами, l — длина шины.

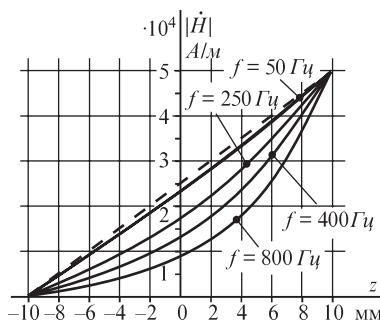


Рис. P30.4

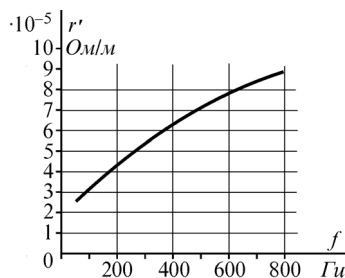


Рис. P30.5

Подставляя численные значения, находим зависимость $r' = r'(f)$, изображенную на рис. P30.5.

2. Воспользуемся полученным в предыдущей задаче решением

$$\dot{H} = -\dot{H}_a \frac{\operatorname{sh} \alpha(z-d)}{\operatorname{sh} 2\alpha d} + \dot{H}_b \frac{\operatorname{sh} \alpha(z+d)}{\operatorname{sh} 2\alpha d},$$

определяющим поле в любой из шин, записывая предварительно величины $\dot{H}_{1a}$, $\dot{H}_{1b}$, $\dot{H}_{2a}$, $\dot{H}_{2b}$, $\dot{H}_{3a}$, $\dot{H}_{3b}$:

$$\begin{aligned}\dot{H}_{1a} &= 0, & \dot{H}_{1b} &= -\frac{I_1}{2h} - \frac{I_2}{2h} - \frac{I_3}{2h} = -\frac{I_1}{h}, & \dot{H}_{2a} &= \dot{H}_{1b} = -\frac{I_1}{h}, \\ \dot{H}_{2b} &= -\frac{I_1}{2h} + \frac{I_2}{2h} - \frac{I_3}{2h} = \frac{1}{2h}(-I_1 + I_2 - I_3), & \dot{H}_{3a} &= \dot{H}_{2b}, & \dot{H}_{3b} &= 0.\end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{aligned}\dot{H}_1 &= -\frac{I_1}{h} \frac{\text{sh} \alpha(z+d)}{\text{sh} 2\alpha d}, \quad \dot{J}_1 = \frac{\alpha I_1}{h} \frac{\text{ch} \alpha(z+d)}{\text{sh} 2\alpha d}, \\ \dot{H}_2 &= -\frac{I_1}{h} \frac{\text{sh} \alpha(z-d)}{\text{sh} 2\alpha d} + \frac{1}{2h} (-I_1 + I_2 - I_3) \frac{\text{sh} \alpha(z+d)}{\text{sh} 2\alpha d}, \\ \dot{J}_2 &= \frac{\alpha I_1}{2h} \frac{\text{ch} \alpha(z-d)}{\text{sh} 2\alpha d} - \frac{\alpha}{2h} (-I_1 + I_2 - I_3) \frac{\text{ch} \alpha(z+d)}{\text{sh} 2\alpha d}, \\ \dot{H}_3 &= -\frac{1}{2h} (-I_1 + I_2 - I_3) \frac{\text{sh} \alpha(z-d)}{\text{sh} 2\alpha d}, \\ \dot{J}_3 &= \frac{\alpha}{2h} (-I_1 + I_2 - I_3) \frac{\text{ch} \alpha(z-d)}{\text{sh} 2\alpha d}.\end{aligned}$$

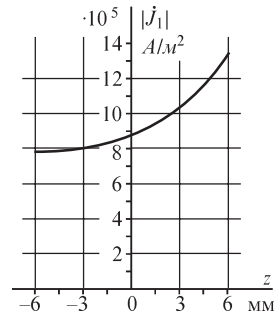


Рис. Р30.6

Зависимость $|\dot{J}_1(z)|$ изображена на рис. Р30.6.

3. Применяя закон полного тока, можем получить величины:

$$\dot{H}_{1a} = \dot{H}_{3b} = 0, \quad \dot{H}_{1b} = \dot{H}_{2a} = -\frac{\dot{I}_1}{h}, \quad \dot{H}_{2b} = \dot{H}_{3a} = \frac{\dot{I}_3}{h}.$$

Для нахождения величин $\dot{H}_{1b} = \dot{H}_{2a}$ воспользуемся выражением, полученным при решении упр. 1:

$$\dot{H} = -\dot{H}_a \frac{\text{sh} \alpha(z-d)}{\text{sh} 2\alpha d} + \dot{H}_b \frac{\text{sh} \alpha(z+d)}{\text{sh} 2\alpha d},$$

а также выражением

$$\dot{E} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}}{dz} = \dot{H}_a \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\text{ch} \alpha(z-d)}{\text{sh} 2\alpha d} - \dot{H}_b \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\text{ch} \alpha(z+d)}{\text{sh} 2\alpha d}.$$

Выбирая контур длиной l , образованный линиями, лежащими на сторонах $1b$ и $2a$ шин, запишем уравнение $\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = -j\omega \Phi$ в виде $\dot{E}_{2a}l - \dot{E}_{1b}l = -j\omega \mu_0 c l \dot{H}_{1b}$ и, учиты-

вая, что $\dot{E}_{2a} = -\frac{\dot{I}_3 \alpha}{\gamma h \text{sh} 2\alpha d} - \frac{\alpha \dot{I}_1}{\gamma h} \text{cth} 2\alpha d$, $\dot{E}_{1b} = \frac{\alpha \dot{I}_1}{\gamma h} \text{cth} 2\alpha d$, после несложных

преобразований находим: $\dot{I}_1 = \frac{\dot{I}}{(2 \text{cth} 2\alpha d + \alpha c) \text{sh} 2\alpha d}$. Подставляя численные

значения, получаем: $\dot{I}_1 = 12 - j 215$ А, $\dot{I}_2 = 988 + j 215$ А.

4. Учитывая условия симметрии, можем на основе закона полного тока записать соотношения:

$$\dot{H}_{1a} = \dot{H}_{4b} = 0, \quad \dot{H}_{2b} = \dot{H}_{3a} = -\frac{1}{h} (\dot{I}_1 + \dot{I}_2), \quad \dot{H}_{1b} = \dot{H}_{2a} = \dot{H}_{3b} = \dot{H}_{4a}.$$

Величину $\dot{H}_{1b}$ найдем, используя закон электромагнитной индукции $\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = -j\omega \mu_0 \Phi$

и выбирая такой контур интегрирования, длина которого равна l и две стороны которого проходят вдоль линий $1b$ и $2a$ $\dot{E}_{2a}l - \dot{E}_{1b}l = -j\omega \mu_0 c l \dot{H}_{1b}$. Записывая вы-

ражения для $\dot{E}_{1b}$, $\dot{E}_{2a}$, $\dot{H}_{1b}$ и повторяя решение предыдущего упражнения, получаем выражение для тока $\dot{I}_1$.

5. Как и при решении упр. 3 и 4, выражаем вначале напряженность магнитного поля на сторонах a и b шин через их токи. Для нахождения токов шин записываем уравнение $\oint_l \dot{E} dl = -j\omega\Phi$ для контура длиной l , образованного линиями, лежа-

щими на сторонах $1b$ и $3a$ шин. Аналогичное уравнение можем записать и для контура с линиями, лежащими на сторонах $2b$ и $4a$ шин.

7. Будем считать, что ток $\dot{I}_1$ первой фазы протекает по левой шине, ток второй фазы $\dot{I}_2 = \dot{I}_1(-0,5 - j\sqrt{3}/2)$ — по средней, а ток $\dot{I}_3 = \dot{I}_1(-0,5 + j\sqrt{3}/2)$ третьей фазы — по правой шине. Напряженность магнитного поля на длинных сторонах шин:

$$\dot{H}_{1a} = \dot{H}_{3b} = 0, \quad \dot{H}_{2a} = \dot{H}_{1b} = -\frac{\dot{I}_1}{h}, \quad \dot{H}_{2b} = \dot{H}_{3a} = \frac{\dot{I}_3}{h} = \frac{\dot{I}_1}{2h}(-1 + j\sqrt{3}).$$

Активные сопротивления шин рассчитываем, пользуясь выражениями $r_1 = r_3 = \frac{lh}{I_1^2} \operatorname{Re}(-\dot{E}_{1b} \dot{H}_{1b}^*), r_2 = \frac{lh}{I_2^2} \operatorname{Re}(\dot{E}_{2a} \dot{H}_{2a}^* - \dot{E}_{2b} \dot{H}_{2b}^*)$, где $\dot{E}_{1b} = -\dot{H}_{1b} \frac{\alpha}{\gamma} \operatorname{cth} 2\alpha d$,

$$\dot{E}_{2a} = \dot{H}_{2a} \frac{\alpha}{\gamma} \operatorname{cth} 2\alpha d - \dot{H}_{2b} \frac{\alpha}{\gamma} \frac{1}{\operatorname{sh} 2\alpha d}, \quad \dot{E}_{2b} = \dot{H}_{2a} \frac{\alpha}{\gamma} \frac{1}{\operatorname{sh} 2\alpha d} - \dot{H}_{2b} \frac{\alpha}{\gamma} \operatorname{cth} 2\alpha d.$$

Выполняя несложные преобразования, находим: $r_1 = l/\gamma h \operatorname{Re}(\alpha \operatorname{cth} 2\alpha d)$, $r_2 = l/\gamma h \operatorname{Re} \alpha (2 \operatorname{cth} 2\alpha d - \frac{1}{\operatorname{sh} 2\alpha d})$, и после подстановки численных значений получаем: $r_1 = 1,8 \cdot 10^{-5} \cdot l$ Ом, $r_2 = 2,34 \cdot 10^{-5} \cdot l$ Ом.

8. Соотношение, связывающее токи $\dot{I}'_1$, $\dot{I}''_1$ шин первой фазы $\dot{I}'_1 + \dot{I}''_1 = \dot{I}_1$, дополним уравнением $\oint_l \dot{E} dl = -j\omega\Phi$, записанным для контура, длинные стороны которого

(длиной l каждая) проходят вдоль шин по сторонам $1b$ первой шины и $2a$ второй шины: $\dot{E}_{2a} - \dot{E}_{1b} = -j\omega\mu_0 c \dot{H}_{1b} = j\omega\mu_0 c \dot{I}'_1/h$. Учитывая, что $\dot{E}_{1b} = -\dot{H}_{1b} \frac{\alpha}{\gamma} \operatorname{cth} 2\alpha d$,

$$\dot{E}_{2a} = \dot{H}_{2a} \frac{\alpha}{\gamma} = \operatorname{cth} 2\alpha d - \dot{H}_{2b} \frac{\alpha}{\gamma} \frac{1}{\operatorname{sh} 2\alpha d}, \quad \dot{H}_{2a} = \dot{H}_{1b}, \quad \dot{H}_{2b} = -\dot{I}'_1/h, \text{ находим после}$$

простых преобразований выражение, аналогичное полученному при решении упр. 3: $\dot{I}'_1 = \frac{\dot{I}_1}{(2 \operatorname{cth} 2\alpha d + \alpha c) \operatorname{sh} 2\alpha d}$. При расчете токов $\dot{I}'_2$, $\dot{I}''_2$ уравнение $\oint_l \dot{E} dl = -j\omega\Phi$ принимает вид $\dot{E}_{4a} - \dot{E}_{3b} = -j\omega\mu_0 c \dot{H}_{3b}$, где

$$\dot{E}_{4a} = \dot{H}_{4a} \frac{\alpha}{\gamma} \operatorname{cth} 2\alpha d - \dot{H}_{4b} \frac{\alpha}{\gamma \operatorname{sh} 2\alpha d}, \quad \dot{H}_{4a} = \dot{H}_{3b}, \quad \dot{H}_{4b} = \frac{\dot{I}_3}{h},$$

$$\dot{E}_{3b} = \dot{H}_{3a} \frac{\alpha}{\gamma \operatorname{sh} 2\alpha d} - \dot{H}_{3b} \frac{\alpha}{\gamma} \operatorname{cth} 2\alpha d, \quad \dot{H}_{3a} = -\frac{\dot{I}_1}{h}.$$

Используя эти соотношения, находим величину $\dot{H}_{3b}$ и далее токи $\dot{I}_2$, $\dot{I}'_2$.

9. Принимая допущение, что линии напряженности магнитного поля в пазу параллельны дну паза, в прямоугольной системе координат имеем $\vec{H} = k \vec{H}_z$. При $h < y < h_1$ имеем $\dot{H} = \dot{I}/d = \text{const}$ в силу условия $\mu = \infty$ вещества зубцов и тела ротора. Поэтому уравнение $\frac{d^2 \dot{H}}{dy^2} = j\omega \mu_0 \gamma \dot{H}$ следует решать при граничных условиях

вида: $\dot{H} = 0$ при $y = 0$, $\dot{H} = \dot{I}/d$ при $y = h$. Определив входящие в решение $\dot{H}(y) = A_1 e^{-\alpha y} + A_2 e^{\alpha y}$ постоянные A_1, A_2 , получаем:

$$\dot{H}(y) = \frac{\dot{I} \operatorname{sh} \alpha y}{d \operatorname{sh} \alpha h}, \quad j(y) = \frac{d\dot{H}}{dy} = \frac{\dot{I} \alpha \operatorname{ch} \alpha y}{d \operatorname{sh} \alpha h}.$$

Электромагнитное поле проникает в провод сквозь его верхнюю поверхность, ограниченную линией $y = h$, так что

$$r = \frac{1}{I^2} \operatorname{Re} \oint_s \vec{S} ds = \frac{1}{\gamma d} \operatorname{Re} (\alpha \operatorname{cth} \alpha h) = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}.$$

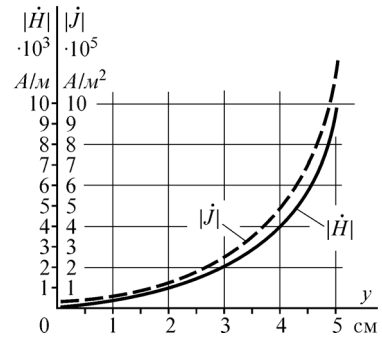


Рис. Р30.7

Кривые $H(y), J(y)$ при заданных численных значениях изображены на рис. Р30.7.

10. Запишем решение дифференциального уравнения $\frac{d^2 \dot{H}}{dy^2} = j\omega \mu_0 \gamma \dot{H}$, описывающего поле в любом из проводников при граничном условии общего вида $\dot{H} = \dot{H}_a$ при $y = 0$ и $\dot{H} = \dot{H}_b$ при $y = h$ на сторонах проводника:

$$\dot{H}(y) = \dot{H}_a \frac{\operatorname{sh} \alpha(h-y)}{\operatorname{sh} \alpha h} + \dot{H}_b \frac{\operatorname{sh} \alpha y}{\operatorname{sh} \alpha h}.$$

На сторонах проводника 1 имеем $\dot{H}_{1a} = 0$, $\dot{H}_{1b} = \dot{I}/d$, тогда как на сторонах проводника 2 — $\dot{H}_{2a} = \dot{I}/d$, $\dot{H}_{2b} = 2\dot{I}/d$. Поэтому можем записать соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{H}_1(y) &= \frac{\dot{I} \operatorname{sh} \alpha y}{d \operatorname{sh} \alpha h}, \quad \dot{H}_2(y) = \frac{\dot{I}}{d \operatorname{sh} \alpha h} [\operatorname{sh} \alpha(h-y) + 2 \operatorname{sh} \alpha y], \\ j_1(y) &= \frac{\dot{I} \alpha \operatorname{ch} \alpha y}{d \operatorname{sh} \alpha h}, \quad j_2(y) = \frac{\dot{I} \alpha}{d \operatorname{sh} \alpha h} [-\operatorname{ch} \alpha(h-y) + 2 \operatorname{ch} \alpha y]. \end{aligned}$$

Активное сопротивление проводника 1 можно рассчитать по формуле, полученной при решении упр. 9, сопротивление проводника 2 — по формуле

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{I^2} \operatorname{Re} \oint_s \vec{S} ds = \\ &= \frac{ld}{I^2} \operatorname{Re} [\dot{E}_2(h) \dot{H}_2(h) - \dot{E}_2(0) \dot{H}_2(0)]. \end{aligned}$$

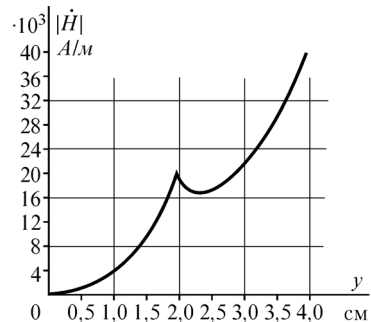


Рис. Р30.8

Кривая зависимости $H(y)$ изображена на рис. Р30.8. При заданных численных значениях получаем $r_1 \cong 3,58 \cdot 10^{-4}$ Ом, $r_2 \cong 1,67 \cdot 10^{-3}$ Ом.

11. Запишем напряженности электрического поля на сторонах $1b$ (при $y_1 = h$) и $2a$ (при $y_2 = 0$) проводников, пользуясь решением предыдущей задачи:

$$\dot{E}_{1b} = \frac{\dot{I}_1 \alpha}{\gamma d \operatorname{sh} \alpha h} \operatorname{ch} \alpha h, \quad \dot{E}_{2a} = \frac{\alpha}{\gamma d \operatorname{sh} \alpha h} (\dot{I} - \dot{I}_1 \operatorname{ch} \alpha h).$$

Для нахождения тока проводника 1 запишем уравнение закона электромагнитной индукции $\oint_l \dot{E} dl = -j\omega\Phi$, выбирая контур интегрирования со сторонами, сов-

падающими со сторонами $1b$, $2a$ проводников: $\dot{E}_{1b} - \dot{E}_{2a} = -j\omega\mu_0 c \dot{I}_1/d$. Здесь c — расстояние между сторонами $1b$ и $2a$ проводников. Подставляя в это выражение величины $\dot{E}_{1b}$, $\dot{E}_{2a}$, получаем после простых преобразований

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{I}}{2 \operatorname{ch} \alpha h + \alpha c \operatorname{sh} \alpha h} = -6,6 - j9,3 \text{ А}, \quad \dot{I}_2 = \dot{I} - \dot{I}_1 = 106,6 + j9,3 \text{ А}.$$

Активные сопротивления проводов рассчитываем так же, как и при решении упр. 9 и 10.

12. Приведем решение при параллельном соединении проводников. Обозначая проводники, начиная от дна паза, цифрами $1, 2, \dots, n$, а их стороны как $1a, 1b, 2a, 2b$ и т. д., можем записать на основе закона полного тока величины напряженностей магнитного поля:

$$\begin{aligned} \dot{H}_{1a} &= 0, \quad \dot{H}_{1b} = \frac{\dot{I}_1}{d}, \quad \dot{H}_{2a} = \dot{H}_{1b} = \frac{\dot{I}_1}{d}, \quad \dot{H}_{2b} = \frac{\dot{I}_1 + \dot{I}_2}{d}, \dots, \\ \dot{H}_{na} &= \frac{\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_{n-1}}{d}, \quad \dot{H}_{nb} = \frac{\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_n}{d}. \end{aligned}$$

В соответствии с законом электромагнитной индукции для контура со сторонами kb , $(k+1)a$ имеем $\dot{E}_{kb} - \dot{E}_{k+1,a} = -j\omega\mu_0 c \dot{H}_{kb}$. Здесь c — расстояние между сторонами kb и $(k+1)a$ проводников.

Количество таких соотношений, получаемых при $k = 1, 2, \dots, n-1$, равно $n-1$. Входящие в них величины $\dot{E}_k$, $\dot{H}_k$ выражаются через токи $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dots, \dot{I}_n$ проводников, так как (см. решение упр. 10)

$$\begin{aligned} \dot{H}_k(y) &= \dot{H}_{ka} \frac{\operatorname{sh} \alpha (d-y)}{\operatorname{sh} \alpha d} + \dot{H}_{kb} \frac{\operatorname{sh} \alpha y}{\operatorname{sh} \alpha d}, \\ \dot{E}_k(y) &= -\dot{H}_{ka} \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\operatorname{ch} \alpha (d-y)}{\operatorname{sh} \alpha d} + \dot{H}_{kb} \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\operatorname{ch} \alpha y}{\operatorname{sh} \alpha d}, \\ \dot{E}_{kb} &= -\frac{(\dot{I}_1 + \dots + \dot{I}_{k-1})\alpha}{\gamma d} \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha d} + \frac{(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_k)\alpha}{\gamma d} \operatorname{cth} \alpha d, \\ \dot{E}_{k+1,a} &= -\frac{(\dot{I}_1 + \dots + \dot{I}_k)\alpha}{\gamma d} \operatorname{cth} \alpha d + \frac{(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_{k+1})\alpha}{\gamma d} \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha d}. \end{aligned}$$

Для нахождения n токов $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dots, \dot{I}_n$ следует $(n - 1)$ соотношение дополнить уравнением $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_n = \dot{I}$.

13. При заданной геометрии шин возможно, учитывая соотношение размеров ($d \ll h$), разделение магнитного потока на внутренний, линии которого параллельны длинным сторонам шин и проходят в теле шин, и внешний, линии которого проходят параллельно этим сторонам шин в пространстве между шинами.

Внутреннюю индуктивность шин при переменном токе находим с помощью выражения $L_i = \frac{x_i}{\omega} = \frac{2lh}{\omega} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{I^2} \dot{E} \dot{H}^* \right)$. Учитывая, что на внутренних (обращенных друг к другу) сторонах шин $\dot{E} = \frac{\alpha \dot{I}}{\gamma h} \operatorname{cth} 2\alpha d$, $\dot{H} = \dot{I}/h$, получаем $L_i = \frac{2l}{\omega \gamma h} \operatorname{Im}(\alpha \operatorname{cth} 2\alpha d)$.

Напряженность магнитного поля внутри левой шины при постоянном токе равна $H_i = \frac{iz}{2dh}$ (при отсчете координаты z от левой стороны шины). Энергия магнитного поля, заключенная внутри шин, равна $W_m = \frac{2l\mu_0 i^2}{3h} d$ и $L_0 = \frac{4l\mu_0}{3h} d$. Внешняя индуктивность шин равна $L_e = \mu_0 lc/h$. Кривая зависимости $L_i/L_0 = f(\omega\mu\gamma)$ изображена на рис. Р30.9.

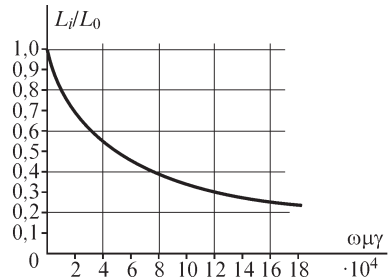


Рис. Р30.9

14. При расчете сопротивления прямоугольной шины в условиях резко выраженного поверхностного эффекта под величиной u , входящей в выражение $Z = (1 + j) \frac{l}{u} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}$, следует понимать периметр, равный $u \approx 2h$. Используя найден-

ное при решении упр. 3, § 30.1 выражение $Z_1 = \frac{l}{2\gamma h} \alpha \operatorname{cth} \alpha d$ и выделяя вещественную и мнимую части величин Z и Z_1 , находим погрешность расчета активного и внутреннего реактивного сопротивлений шины.

15. Учитывая соотношение $E = \sqrt{\omega\mu/\gamma} H$, и используя выражение

$$P = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} lu \frac{H_{me}^2}{2},$$

находим: $P = \sqrt{\frac{\gamma}{2\omega\mu}} lu \frac{E_{tm}^2}{2}$ (здесь u — сечения провода, l — его длина).

16. Выражение для вычисления точного сопротивления провода

$Z_{\text{внутр}} = \frac{l}{2\pi\gamma R} \sqrt{-j\omega\mu\gamma} J_0(x)/J_1(x)$, где $x = R\sqrt{-j\omega\mu\gamma}$, можем записать в виде

$$Z_{\text{внутр}} = \frac{l}{2\pi R} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} (1 - j) \frac{J_0(x)}{J_1(x)} = r_{\text{рпз}} (1 - j) \frac{J_0(x)}{J_1(x)},$$

так как $\frac{l}{2\pi R} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} = r_{\text{ппэ}}$ — активное сопротивление провода при резком проявлении поверхностного эффекта. Учитывая, что активное сопротивление провода определяется выражением $\text{Re} [r_{\text{ппэ}} (1 - j) \frac{J_0(x)}{J_1(x)}]$, можем записать искомую погрешность в виде:

$$\varepsilon = \frac{r_{\text{ппэ}} - r}{r} 100\% = \left\{ \left[\text{Re} \frac{(1-j) J_0(x)}{J_1(x)} \right]^{-1} - 1 \right\} 100\%.$$

Для заданных параметров имеем $x = R\sqrt{-j\omega\mu\gamma} = 1,54\sqrt{-j}$, $\varepsilon \cong -13,8\%$.

17. Активное сопротивление медного провода $r_m = \frac{l}{2\pi\gamma R^2} \text{Re} \frac{x J_0(x)}{J_1(x)}$,

где $x = R\sqrt{-j\omega\mu\gamma}$, оказывается равным $r_m = 2,2 \cdot 10^{-4} l$ Ом.

Такое же сопротивление имеют алюминиевый провод радиусом $R = 0,64$ см и стальной провод радиусом $R = 2,4$ см.

18. Сопротивление медного провода длиной l при переменном токе

$$r_m = \frac{l}{2\pi\gamma_m R_m^2} \text{Re} \frac{x J_0(x)}{J_1(x)}, \text{ так что } r_m/r_0 \cong 2 \text{ (здесь } x = R_m\sqrt{-j\omega\mu_0\gamma_m} \text{)}. \text{ Радиус } R \text{ сталь-}$$

ного провода находим, решая уравнение $\text{Re} \left[R\sqrt{-j\omega\mu_c\gamma_c} \frac{J_0(R\sqrt{-j\omega\mu_c\gamma_c})}{J_1(R\sqrt{-j\omega\mu_c\gamma_c})} \right] = 4$:

$$R_c \cong 2,2 \text{ см.}$$

19. Можно считать, что активное сопротивление провода практически не зависит от свойств вещества сердцевины, если электромагнитное поле проникает сквозь поверхность провода в алюминий на глубину, равную эквивалентной глубине проникновения $b = (\pi f \mu \gamma_{\text{ал}})^{-0,5}$. Из уравнения $b = \Delta$ находим

$$f \geq \frac{1}{\pi \Delta^2 \mu \gamma_{\text{ал}}} \cong 1810 \text{ Гц.}$$

30.3. Неравномерное распределение переменного магнитного потока и электрического тока

ВОПРОСЫ

6. При вычислении интеграла в законе полного тока следует принимать во внимание как сторонний, так и вихревой ток, охватываемые контуром интегрирования.

7. При постоянном токе это выражение пригодно для нахождения напряженности магнитного поля внутри сердечника. Если в обмотке протекает переменный ток, то следует учесть вихревой ток в сердечнике, линии которого замыкаются в плоскостях, нормальных к осевой линии сердечника: $2\pi r H = i_{\text{стор}} w + i_{\text{вихр}}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Искомое отношение можно найти, используя выражение

$$n = \frac{P'_B(d_2)}{P'_B(d_1)} = \frac{d_2(\operatorname{sh} kd_2 - \sin kd_2)(\operatorname{ch} kd_1 - \cos kd_1)}{d_1(\operatorname{sh} kd_1 - \sin kd_1)(\operatorname{ch} kd_2 - \cos kd_2)}.$$

Для заданных численных значений получаем: а) $n = 6,25$, б) $n = 6,1$.

3. Учитывая, что наибольшая, наименьшая и средняя величины магнитной индукции определяются выражениями

$$B_{\text{мнб}} = B_{m0} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} kd + \cos kd}{2}}, B_{\text{мнм}} = B_{m0}, B_{\text{мсп}} = B_{m0} \frac{\sqrt{\operatorname{ch} kd - \cos kd}}{kd},$$

получаем уравнение $\sqrt{\frac{\operatorname{ch} kd + \cos kd}{2}} - \frac{\sqrt{\operatorname{ch} kd - \cos kd}}{10 kd} = 1$, решение которого $kd =$

$= 1,5$ позволяет получить: $d = 0,96$ мм при $f = 50$ Гц и $d = 0,15$ мм при $f = 2000$ Гц.

4. Напряженность магнитного поля на поверхности провода

$$\dot{H}_{\text{ме}} = \frac{\dot{J}_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}} J_1(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma}) \text{ запишем с учетом соотношения } \dot{J}_{m0} = \dot{J}_{\text{ме}} \frac{1}{J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}$$

(здесь $\dot{J}_{m0}$, $\dot{J}_{\text{ме}}$ — комплексные амплитуды плотности тока на оси провода и на его поверхности) в виде $\dot{H}_{\text{ме}} = \frac{\dot{J}_{\text{ме}}}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}} \frac{J_1(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}{J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}$. Принимая во внимание,

что наибольшая плотность тока имеет место на поверхности провода и учитывая, что $\dot{H}_{\text{ме}} = \frac{\dot{I}_m}{2\pi R}$, находим искомый ток: $\dot{I} = \frac{\dot{J}_{\text{доп}} 2\pi R J_1(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma} J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}$. Подстав-

ляя численные значения, получаем $I = |\dot{I}| \cong 200$ А.

5. Записывая проекцию уравнения $\operatorname{rot} \gamma^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = -j\omega\mu_0 \dot{\mathbf{H}}$ на ось z цилиндрической системы координат, являющуюся осью провода, и учитывая, что $\dot{\mathbf{H}} = \dot{H}_z(r)$, получаем уравнение $\frac{d^2 \dot{H}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{H}}{dr} = j\omega\mu_0 \gamma \dot{H}$, совпадающее с уравнением относи-

тельно плотности тока в цилиндрическом проводе круглого сечения. Решение уравнения $\dot{H} = A_0 J_0(x) + B_0 N_0(x)$, где $x = r\sqrt{-j\omega\mu\gamma}$, следует записать в виде $\dot{H} = A_0 J_0(x)$ (так как на оси провода при $x = 0$ имеем $N_0(0) = \infty$) и найти искомую постоянную A_0 из граничного условия при $r = R$, которое имеет вид $\dot{H}(R) = \dot{H}_e$:

$$A_0 = \frac{\dot{H}_e}{J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}.$$

Таким образом, имеем

$$\dot{H}(r) = \frac{\dot{H}_e}{J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})} J_0(r\sqrt{-j\omega\mu\gamma}).$$

Для расчета тока $\dot{I} = \oint_l \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{l}$ в проводе выберем контур интегрирования, расположенный в плоскости $\alpha = \text{const}$, одна из сторон которого совпадает с осью провода, а другая проходит параллельно оси вдоль поверхности провода. Две другие стороны контура лежат на расстоянии l одна от другой и перпендикулярны оси. Используя найденное решение, находим

$$\dot{I} = \dot{I}_\alpha = [\dot{H}(R) - \dot{H}(0)]l = \frac{\dot{H}_e l}{J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})} [J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma}) - 1]$$

и $I_m = 4,2 \cdot 10^2$ А при $l = 1$ м.

30.4. Эффект близости. Электромагнитное экранирование

ВОПРОСЫ

4. Проводящая труба, охватывающая двухпроводную линию либо три провода трехфазной линии, сумма токов проводов которых равна нулю, обладает экранирующими свойствами и ослабляет поле линий в точках вне трубы.

Если каждый из проводов линии (однофазной или трехфазной) охватить проводящей изолированной трубой, то экранирующего эффекта не наблюдается.

Действительно, магнитное поле каждого из проводов в точках вне трубы сохраняется тем же (что и без трубы), так как вследствие равенства нулю всего вихревого тока в стенках каждой трубы интеграл $\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l}$ вдоль пути, охватывающего трубу, сохраняется равным току провода. Экранирующий эффект проводящих труб проявляется, если они электрически соединены между собой, когда вихревой ток каждой из них отличен от нуля.

5. Экранирующее действие сетчатых проводящих экранов (как и сплошных проводящих экранов) в переменном электромагнитном поле основано на эффекте ослабления поля за счет действия индуцируемых в теле экрана вихревых токов. Эффективность экранирования сетчатого экрана определяется соотношением размеров ячеек сетки и длины электромагнитной волны, а также удельной электрической проводимостью материала экрана. Экранирующее действие сетчатого экрана ослабляется, когда длина волны становится меньше размера ячейки сетки экрана.

6. Экран следует расположить так, чтобы щель, образуемая при соединении частей экрана, не препятствовала протеканию индуцируемых в стенках экрана вихревых токов. Так как вихревые токи в стенках экрана замыкаются в плоскостях, параллельных плоскости кольца с током, то для достижения наибольшего экранирующего эффекта щель следует расположить в плоскости кольца.