Ч А С Т Ь П Е Р В А Я

ТЕОРИЯ ПРИТЯЖЕНИЯ

Г Л А В А I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПРИТЯЖЕНИЯ

§ 1. Закон притяжения Ньютона

1. Отправным пунктом теории притяжения является закон всемирного тяготения И. Ньютона (1643—1727), сформулированный великим ученым в его бессмертном сочинении «Математические начала натуральной философии» (1687 г.) и признающийся до сих пор одним из основных законов природы *).

Согласно этому закону *всякие две материальные частицы взаимно притягиваются с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.*

Материальная частица — понятие физическое, под которым подразумевается весьма малое количество какого угодно вещества, газообразного, жидкого или твердого, занимающее весьма малый объем.

Абстрагируя и уточняя это несколько неопределенное понятие, мы придем к механическому понятию *материальной точки*, как геометрической точки пространства, т. е. объекту, не имеющему измерений, но обладающему конечной массой.

Рассмотрим в обычном евклидовом пространстве две материальные точки M и P, массы которых обозначим соответственно через m и μ, а через Δ — разделяющее их расстояние.

Согласно закону притяжения Ньютона каждая из этих двух материальных точек притягивается к другой с силой, направленной по прямой MP, величина которой определяется формулой

$$F = f\frac{m\mu}{\Delta^2}, \tag{1.1}$$

*) Превосходный перевод латинского текста сочинения И. Ньютона на русский язык был выполнен академиком А. Н. Крыловым (1863—1945). См. Собрание трудов А. Н. Крылова, т. VII, изд. АН СССР, 1936 г. Краткое изложение сочинения Ньютона можно найти в книге Г. Н. Дубошина «Небесная механика», Историко-библиографический очерк.

где f — коэффициент пропорциональности, называемый обычно постоянной притяжения (или постоянной тяготения).

Так как размерность силы равна размерности массы, умноженной на размерность ускорения, то размерность коэффициента f определится формулой

$$[f] = m^{-1} l^3 t^{-2}.$$

Численное значение постоянной притяжения зависит от выбора основных единиц длины, массы и времени. В системе CGS

$$f = 6{,}670 \cdot 10^{-8}.$$

Если принять основные астрономические единицы (среднее расстояние Земли от Солнца, масса Солнца, средние солнечные сутки), то f будет иметь следующее численное значение:

$$f = 0{,}000295912.$$

Можно, очевидно, выбрать основные единицы и каким-нибудь другим образом; в частности, всегда возможно выбрать основные единицы так, чтобы численное значение постоянной притяжения было равно единице, что удобно для теоретических исследований.

Вообще, выбор основных единиц определяется условиями рассматриваемой задачи и в различных задачах осуществляется по-разному, подчиняясь обычно требованию, чтобы величины, имеющие в данной задаче основное значение, выражались и не очень большими и не очень маленькими числами.

В то же время астрономические величины определяются из наблюдений и измерений, точность которых постоянно возрастает с течением времени, вследствие чего и числовое значение постоянной притяжения f не остается неизменным и делается все более и более точным. Поэтому приведенные выше числа являются приближенными и всегда могут быть заменены более точными и более современными.

В нашей книге основные единицы большей частью оставляются произвольными и численное значение постоянной f остается также неопределенным.

Вместо постоянной притяжения f в астрономии часто употребляется другая величина, называемая постоянной Гаусса, связанная с f формулой

$$f = k^2.$$

В основных астрономических единицах

$$k = 0{,}01720209895.$$

Заметим, что если за единицу времени принять вместо средних солнечных суток — $1/k=58{,}13244087$ средних солнечных суток, то коэффициент пропорциональности в формуле закона Ньютона сделается равным единице.

2. Формула (1.1) совершенно симметрична относительно точек M и P, и роли этих обеих точек, очевидно, также совершенно одинаковы. Однако нам будет удобнее разграничить роли этих точек, а именно, мы будем считать, что *центром притяжения* является точка M, которую будем называть *притягивающей*, а точка P, которую будем называть *притягиваемой*, является объектом приложения силы притяжения. Таким образом, мы будем рассматривать силу притяжения как вектор, приложенный к точке P и направленный к точке M по прямой PM.

Для сокращения дальнейших формул мы будем в ряде случаев предполагать, что $\mu=1$, т. е. будем тогда рассматривать притяжение, которое оказывает материальная точка M на точку P единичной массы.

В этом случае вместо формулы (1.1) будем иметь

$$F=\frac{fm}{\Delta^2}. \tag{1.2}$$

Формула (1.2), так же как и формула (1.1), не зависит от выбора системы координат, однако в приложениях обычно приходится рассматривать составляющие (или компоненты) силы притяжения по каким-либо определенным направлениям в пространстве, что удобнее всего сделать при помощи метода координат.

Рассмотрим некоторую систему прямоугольных декартовых координат с началом в произвольной точке пространства O и с неизменными направлениями осей. Обозначим координаты притягиваемой точки P через x, y, z, а координаты притягивающей точки M через x', y', z'. Тогда

$$\Delta=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

а направляющие косинусы α, β, γ силы притяжения, т. е. направляющие косинусы вектора, приложенного к точке P, определятся формулами

$$\alpha=\frac{x'-x}{\Delta}, \quad \beta=\frac{y'-y}{\Delta}, \quad \gamma=\frac{z'-z}{\Delta}.$$

Обозначая составляющие силы притяжения по осям координат (или проекции этой силы на координатные оси) соответственно через X, Y, Z, мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} X&=\alpha F=fm\frac{x'-x}{\Delta^3},\\ Y&=\beta F=fm\frac{y'-y}{\Delta^3},\\ Z&=\gamma F=fm\frac{z'-z}{\Delta^3}. \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Рассматривая в этих формулах x', y', z' как величины постоянные, а x, y, z как текущие координаты, мы получаем три функции от координат точки P, определяющие величину и направление силы притяжения, действующей на материальную точку единичной массы.

Действительно, формулы (1.3) дают

$$F=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$$

и

$$\alpha=\frac{X}{F},\quad \beta=\frac{Y}{F},\quad \gamma=\frac{Z}{F}.$$

Иными словами, формулы (1.3) определяют поле сил притяжения, вызываемое (или возбуждаемое) наличием притягивающей точечной массы, находящейся в заданной точке пространства M.

3. Зная величины (1.3), можно также найти проекцию силы притяжения на любое заданное направление. Действительно, пусть дано некоторое направление L, т. е. заданы в системе $(Oxyz)$ его направляющие косинусы

$$\alpha'=\cos(L,\ x),\quad \beta'=\cos(L,\ y),\quad \gamma'=\cos(L,\ z).$$

Обозначая через F_L проекцию силы F на направление L, мы имеем

$$F_L=F\cos(F,\ L),$$

но

$$\cos(F,\ L)=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma',$$

а поэтому при помощи формул (1.3) найдем

$$F_L=\alpha'X+\beta'Y+\gamma'Z. \tag{1.4}$$

В частности, по формуле (1.4) можем вычислить проекцию силы притяжения, действующей на точку P, на направление радиуса-вектора r этой точки. В этом случае

$$\alpha'=\frac{x}{r},\quad \beta'=\frac{y}{r},\quad \gamma'=\frac{z}{r}\qquad \left(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right),$$

и мы имеем

$$F_r=\frac{1}{r}(xX+yY+zZ).$$