§ 2. Силовая функция

1. Заметим теперь, что величины (1.3), рассматриваемые, как было условлено, как функции координат точки P, являются частными производными от некоторой функции координат этой точки.

Действительно, введем в рассмотрение следующую функцию:

$$U\ (x,\ y,\ z) = U(P) = \frac{fm}{\Delta}. \tag{1.5}$$

Дифференцируя (1.5) частным образом по x, например, мы получим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{fm}{\Delta^2}\frac{\partial \Delta}{\partial x},$$

но

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = -\frac{x' - x}{\Delta},$$

вследствие чего

$$X = \frac{\partial U}{\partial x},\quad Y = \frac{\partial U}{\partial y};\quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{1.6}$$

Теперь формула (1.4) дает *)

$$F_L = \alpha' \frac{\partial U}{\partial x} + \beta' \frac{\partial U}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial L}$$

и, в частности,

$$F_r = \frac{1}{r}\left(x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + z\frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

Таким образом, функция U определяет однозначно составляющие силы притяжения, действующие на точку P единичной массы, а следовательно, и все силовое поле, возбуждаемое притягивающей точечной массой m.

По этой причине U называется *силовой функцией* массы m, или *функцией сил*, или еще *потенциалом* точечной массы m **).

2. Отметим простые свойства силовой функции, непосредственно вытекающие из формул (1.5) и (1.6):

---

*) $\frac{\partial U}{\partial L}$ называется в математическом анализе *производной от функции точки* $U(P)$ *по направлению* L.

**) Собственно говоря, потенциал массы (как следует из его физического определения) есть силовая функция, *взятая с обратным знаком*. В литературе, однако, часто встречается это неточное название для силовой функции. В этой книге используется более правильная терминология.

Определение понятия «потенциал» см. в любом учебнике физики или теоретической механики.

1) силовая функция $U(P)$ конечна, однозначна и непрерывна во всем пространстве, за исключением точки M, где U обращается в бесконечность;

2) когда точка P неограниченно удаляется от точки M, функция U, оставаясь положительной, безгранично убывает, притом так, что

$$\lim_{\Delta \to \infty} (\Delta \cdot U) = \lim_{r \to \infty} (rU) = fm$$

($\lim(r/\Delta) = 1$, когда $P \to \infty$);

3) все частные производные любого порядка от функции U по координатам точки P (и по любому другому направлению) также суть функции конечные, однозначные и непрерывные во всем пространстве, за исключением точки M, где все они обращаются в бесконечность*);

4) когда точка $P \to \infty$, то любая частная производная функции U имеет своим пределом нуль, причем, в частности,

$$\lim_{r \to \infty} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial x}\right) = \lim_{r \to \infty} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial y}\right) = \lim_{r \to \infty} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial z}\right) = -fm$$

(т. е. функция U *регулярна на бесконечности*);

5) во всем пространстве, за исключением точки M, функция U удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \tag{1.7}$$

которое называется *уравнением Лапласа*.

Для проверки последнего свойства вычислим вторые частные производные от функции U. Мы имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial X}{\partial x} = fm\left\{-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{3(x'-x)^2}{\Delta^5}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial Y}{\partial y} = fm\left\{-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{3(y'-y)^2}{\Delta^5}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial Z}{\partial z} = fm\left\{-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{3(z'-z)^2}{\Delta^5}\right\},$$

откуда находим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \equiv 0,$$

что и требовалось показать.

Если мы введем в рассмотрение *оператор Лапласа*, полагая

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

---

*) Это свойство легко проверяется путем непосредственного дифференцирования функции U.

то уравнение (1.7) может быть написано более кратко в виде

$$\nabla U = 0. \tag{1.7'}$$

С другой стороны,

$$\nabla U = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \operatorname{div} F,$$

что называется в механике расходимостью (или дивергенцией) вектора F.

Отметим еще, что геометрическое место точек пространства, в которых силовая функция U имеет одно и то же значение C, есть поверхность, определяемая уравнением

$$U(x, y, z) = C$$

и называемая поверхностью уровня (или изопотенциальной поверхностью). В рассматриваемом здесь случае силовой функции притягивающей точечной массы m поверхность уровня есть, очевидно, сфера с центром в точке M.

3. Примечание. Мы условились разграничить роли материальных точек M и P, считая, что точка M фиксирована, а точка P может занимать какое угодно положение в пространстве. Поэтому силовая функция U является функцией координат точки P (или функцией точки P).

Однако в некоторых случаях необходимо рассматривать обе точки как равноправные.

Обозначая тогда эти точки буквами M_1 и M_2, а их массы через m_1, m_2, введем в рассмотрение функцию, определяемую формулой

$$U = f\frac{m_1 m_2}{\Delta}, \tag{1.5'}$$

где

$$\Delta = \overline{M_1 M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Таким образом, U является функцией всех шести координат двух точек M_1 и M_2, так что

$$U = U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2).$$

Нетрудно видеть, что проекции на координатные оси сил притяжения, действующих на точки M_1 и M_2, определятся соответственно формулами

$$X_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = f m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{\Delta^3}, \quad Y_1 = \ldots, \quad Z_1 = \ldots,$$

$$X_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = f m_1 m_2 \frac{x_1 - x_2}{\Delta^3}, \quad Y_2 = \ldots, \quad Z_2 = \ldots$$

Поэтому функция U, определяемая формулой (1.5′), называется силовой функцией взаимного притяжения двух точечных масс m_1 и m_2, или, просто, силовой функцией двух масс.

Силовая функция двух масс, очевидно, всегда положительна *), конечна, непрерывна и однозначна при любых не совпадающих положениях точек M_1 и M_2. Если эти точки стремятся к одной и той же точке пространства M, так что $M_1 \to M$ и $M_2 \to M$, то функция U неограниченно возрастает.

Если, наоборот, точки M_1 и M_2 неограниченно удаляются друг от друга, так что $\Delta \to \infty$, то U стремится к нулю, причем

$$\lim_{\Delta \to \infty} (\Delta \cdot U) = \lim_{\Delta \to \infty} \left| \Delta^2 \frac{\partial U}{\partial x_1} \right| = \ldots = f m_1 m_2.$$

§ 3. Силовая функция системы материальных точек

1. Рассмотрим теперь систему, состоящую из конечного числа n материальных точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$, которые будем считать притягивающими центрами. Пусть m_i, x'_i, y'_i, z'_i — масса и координаты в той же системе $Oxyz$ точки M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть, далее $P(x, y, z)$ есть материальная точка единичной массы $(\mu = 1)$, не совпадающая ни с одной из точек M_i. Положим

$$\Delta_i = \sqrt{(x - x'_i)^2 + (y - y'_i)^2 + (z - z'_i)^2}$$

и рассмотрим притяжение, испытываемое точкой P со стороны заданной системы материальных точек M_i.

Согласно § 1 точка M_i притягивает точку P с силой, проекции которой X_i, Y_i, Z_i на координатные оси суть

$$f m_i \frac{x'_i - x}{\Delta_i^3}, \quad f m_i \frac{y'_i - y}{\Delta_i^3}, \quad f m_i \frac{z'_i - z}{\Delta_i^3}.$$

Следовательно, проекции равнодействующей всех сил притяжения, действующих на точку P, определятся формулами

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{n} X_i = f \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (x'_i - x)}{\Delta_i^3}, \\ Y &= \sum_{i=1}^{n} Y_i = f \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (y'_i - y)}{\Delta_i^3}, \\ Z &= \sum_{i=1}^{n} Z_i = f \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (z'_i - z)}{\Delta_i^3}. \end{aligned} \right\} \tag{1.8}$$

*) Имея в виду конкретные задачи механики, мы будем предполагать массы материальных точек величинами положительными, а их координаты — вещественными числами. Впрочем, многие результаты теории притяжения будут справедливы и в более общих случаях.