Силовая функция двух масс, очевидно, всегда положительна *), конечна, непрерывна и однозначна при любых не совпадающих положениях точек M_1 и M_2. Если эти точки стремятся к одной и той же точке пространства M, так что $M_1 \to M$ и $M_2 \to M$, то функция U неограниченно возрастает.

Если, наоборот, точки M_1 и M_2 неограниченно удаляются друг от друга, так что $\Delta \to \infty$, то U стремится к нулю, причем

$$\lim_{\Delta \to \infty} (\Delta \cdot U) = \lim_{\Delta \to \infty} \left| \Delta^2 \frac{\partial U}{\partial x_1} \right| = \ldots = f m_1 m_2.$$

§ 3. Силовая функция системы материальных точек

1. Рассмотрим теперь систему, состоящую из конечного числа n материальных точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$, которые будем считать притягивающими центрами. Пусть m_i, x_i', y_i', z_i' — масса и координаты в той же системе $Oxyz$ точки M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть, далее $P(x, y, z)$ есть материальная точка единичной массы $(\mu = 1)$, не совпадающая ни с одной из точек M_i. Положим

$$\Delta_i = \sqrt{(x - x_i')^2 + (y - y_i')^2 + (z - z_i')^2}$$

и рассмотрим притяжение, испытываемое точкой P со стороны заданной системы материальных точек M_i.

Согласно § 1 точка M_i притягивает точку P с силой, проекции которой X_i, Y_i, Z_i на координатные оси суть

$$f m_i \frac{x_i' - x}{\Delta_i^3}, \quad f m_i \frac{y_i' - y}{\Delta_i^3}, \quad f m_i \frac{z_i' - z}{\Delta_i^3}.$$

Следовательно, проекции равнодействующей всех сил притяжения, действующих на точку P, определятся формулами

$$\left.\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{n} X_i = f \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (x_i' - x)}{\Delta_i^3}, \\ Y &= \sum_{i=1}^{n} Y_i = f \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (y_i' - y)}{\Delta_i^3}, \\ Z &= \sum_{i=1}^{n} Z_i = f \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (z_i' - z)}{\Delta_i^3}. \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

*) Имея в виду конкретные задачи механики, мы будем предполагать массы материальных точек величинами положительными, а их координаты — вещественными числами. Впрочем, многие результаты теории притяжения будут справедливы и в более общих случаях.

Подобным же образом проекция этой равнодействующей на произвольно заданное направление $L(\alpha', \beta', \gamma')$ будет равна

$$F_L = \sum_{i=1}^{n} F_{iL} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha' X_i + \beta' Y_i + \gamma' Z_i).$$

Величины, определяемые формулами (1.8), рассматриваемые как функции координат точки P (координаты притягивающих центров M_i считаются постоянными), являются частными производными от некоторой функции $U(P)$, которую снова назовем силовой функцией (силовой функцией системы n точечных масс).

Действительно, полагая

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i, \quad U_i = \frac{fm_i}{\Delta_i}, \tag{1.9}$$

мы найдем так же, как в § 1,

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad F_L = \frac{\partial U}{\partial L}.$$

Силовая функция системы материальных точек M_i (1.9) обладает свойствами, аналогичными свойствам силовой функции одного притягивающего центра. Нужно только иметь в виду, что свойства 1) и 3) остаются в силе всюду, кроме точек M_i, так как в каждой из этих точек функции U, X, Y, Z терпят разрывы, обращаясь в бесконечность.

Свойство 2) сохраняется, но теперь

$$\lim_{r \to \infty} (rU) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{r \to \infty} (rU_i) = f \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Точно так же в свойстве 4) имеем

$$\lim_{r \to \infty} (r^2 U) = \ldots = -f \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Свойство 5), очевидно, также сохраняется, так как

$$\nabla U = \sum_{i=1}^{n} \nabla U_i = 0,$$

т. е. силовая функция системы притягивающих центров также удовлетворяет уравнению Лапласа во всем пространстве, за исключением точек M_i.

Поверхность уровня

$$U(x, y, z) = C,$$

даже для системы, состоящей только из двух притягивающих центров, имеет весьма сложный вид, но обладает одним весьма простым свойством, которое можно сформулировать следующим образом:

Направление равнодействующей сил притяжения, действующих на точку P, совпадает с направлением нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.

Действительно, направляющие косинусы нормали к поверхности $U(x, y, z) = C$ суть *)

$$\frac{1}{N}\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{1}{N}\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{1}{N}\frac{\partial U}{\partial z},$$

где

$$N = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2},$$

а направляющие косинусы равнодействующей F всех сил притяжения суть

$$\frac{X}{F}, \quad \frac{Y}{F}, \quad \frac{Z}{F},$$

где

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

так что свойство очевидно.

2. Рассмотрим теперь систему свободных материальных точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. Тогда каждая точка M_i этой системы притягивается ко всем остальным точкам, и составляющие равнодействующей сил притяжения, действующих на M_i, определятся формулами

$$\left.\begin{aligned} X_i &= f\sum_{j=1}^{n}{}' m_i m_j \frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3}, \\ Y_i &= f\sum_{j=1}^{n}{}' m_i m_j \frac{y_j - y_i}{\Delta_{ij}^3}, \\ Z_i &= f\sum_{j=1}^{n}{}' m_i m_j \frac{z_j - z_i}{\Delta_{ij}^3}, \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

где

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2},$$

есть взаимное расстояние между точками M_i и M_j, а знак «штрих» при знаке суммы указывает, что при суммировании должен быть пропущен член, для которого $j = i$.

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 1 (любое издание).

Полагая теперь

$$U=\frac{1}{2}f\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \tag{1.11}$$

мы легко убедимся, что

$$X_i=\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad Y_i=\frac{\partial U}{\partial y_i},\quad Z_i=\frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Таким образом, функция U определяет все силы притяжения, действующие в системе материальных точек и поэтому называется *силовой функцией системы*.

Силовая функция (1.11) системы свободных материальных точек принципиально отличается от силовой функции (1.9) системы притягивающих центров. В самом деле, функция (1.9) зависит только от трех координат точки P, так как координаты притягивающих центров рассматриваются в формуле (1.9) *как величины постоянные*. Наоборот, функция (1.11) содержит $3n$ координат, которые все являются независимыми переменными, а постоянными величинами в ее выражении являются только массы точек системы.

Но вместе с тем функции (1.9) и (1.11) имеют и некоторые общие черты, главной из которых является *независимость от выбора системы координат*, а также то, что и та и другая функции полностью определяют силовое поле, обусловленное наличием притягивающих масс.

Наконец, что также весьма существенно, каждая из этих функций есть простая алгебраическая функция от прямоугольных декартовых координат притягиваемых точек.

Однако последнее свойство может исчезнуть при переходе к каким-либо другим координатам.

§ 4. Цилиндрические и сферические координаты

В приложениях часто приходится пользоваться вместо прямоугольных координат какими-нибудь другими, часто криволинейными, координатами. Наиболее употребительными являются полярные координаты — цилиндрические и сферические, которые мы здесь и рассмотрим.

1. Введем сначала вместо прямоугольных координат в плоскости xy полярные координаты ρ и v, определяемые формулами преобразования

$$x=\rho\cos v,\qquad y=\rho\sin v,$$

$$\rho^2=x^2+y^2,\qquad v=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$